ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
(ΙΗΣΟΥΪΤΩΝ)

●ΛΥΣΕΙΣ 2000 ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ
●ΟΛΑΙ ΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΥΠΟ F. G.-M.

ΠΛΗΡΗΣ ΚΑΙ ΠΙΣΤΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ
ΕΚ ΤΗΣ Ε' ΓΑΛΛΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ
ΥΠΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Α. ΓΚΙΟΚΑ
Τ. ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

I

COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

EXERCICES
DE GEOMETRIE
COMPRENANT
L'EXPOSÉ DES MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES
ET 2000 QUESTIONS RÉSOLUES
PAR F. G. - M.

CINQUIÈME ÉDITION

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Π. ΧΙΩΤΕΛΛΗ
ΑΘΗΝΑΙ

COURS DE MATHEMATIQUES ELEMANTAIRES

EXERCICES
DE GÉOMÉTRIE

COMPRENANT

L' EXPOSÉ DES MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES
ET 2000 QUESTIONS RÉSOLUES

PAR F.G.-M.

CINQUIÈME ÉDITION

PARIS VIe — LIBRAIRIE GÉNÉRALE, RUE DE VAUGIRARD, 77

TOURS
MAISON ALFRED MAME ET FILS
IMPRIMEURS - ÉDITEURS

PARIS
J. DE GIGORD
LIBRAIRE, RUE CASSETTE, 15

ET CHEZ LES PRINCIPAUX LIBRAIRES
Tous droits reservés.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

(ΙΗΣΟΥΪΤΩΝ)

• ΛΥΣΕΙΣ 2000 ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ
• ΟΛΑΙ ΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΥΠΟ **F. G.-M.**

ΠΛΗΡΗΣ ΚΑΙ ΠΙΣΤΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ
ΕΚ ΤΗΣ Ε' ΓΑΛΛΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ
ΥΠΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ **Δ. ΓΚΙΟΚΑ**
Τ. ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

EXERCICES
DE GEOMETRIA
COMPRENANT

L'EXPOSÉ DES MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES
ET 2000 QUESTIONS RÉSOLUES

PAR F. G. - M.

CINQUIÈME ÉDITION

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Π. ΧΙΩΤΕΛΛΗ
ΑΘΗΝΑΙ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ παρόντος βιβλίου, θὰ ἦτο περιττὴ νομίζομεν πᾶσα, μακρὰ ἢ βραχεῖα, σχετικὴ διαφώτισις τοῦ ἀναγνώστου, ἐπειδὴ ἀμφιβάλλομεν ἐὰν ὑπάρχουν πολλοὶ ἐπιστήμονες τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν τῆς τελευταίας πεντηκονταετίας, οἵτινες νὰ μὴν εἶναι εὐχαρίστως πρόθυμοι νὰ ὁμολογήσουν τὰς ὑπηρεσίας τὰς ὁποίας τοὺς προσέφερεν, κατὰ τὰς προπαρασκευαστικὰς μελέτας των διὰ τὴν σπουδὴν τοῦ εἰδικοῦ κλάδου ὃν ἠκολούθησαν ἀργότερον, τὸ τόσον ἐπαγωγικόν, τόσον μεθοδικὸν καὶ τόσον πλῆρες εἰσαγωγικὸν αὐτὸ βιβλίον εἰς τὴν Γεωμετρίαν.

Ἀλλὰ καὶ ἀργότερον, ὅσοι ἐκ τούτων ἐπεδόθησαν εἰς μελέτας θεωρητικωτέρας ἐπὶ τῆς Γεωμετρίας — ἢ καὶ στενώτερον ἐπαγγελματικάς, ὡς οἱ καθηγηταὶ τῶν Μαθηματικῶν τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως — ἐπανειλημμένως, πιστεύομεν, θὰ ἀπέσπασαν τῆς βιβλιοθήκης των τὸν ὀγκώδη αὐτὸν τόμον καὶ μετὰ ἀγάπης, προσοχῆς καὶ πολλῆς πάντοτε ὠφελείας θὰ διεξῆλθον μερικὰς σελίδας τοῦ ἔργου, ἢ θὰ συνεβουλεύθησαν μερικὰς προτάσεις του καὶ μάλιστα, ἰδιαιτέρως, τὰς ἀπὸ πάσης ἀπόψεως περιφήμους καὶ πολλάκις ἐξονυχιστικὰς τοῦ ζητήματος σημειώσεις, αἱ ὁποῖαι συνοδεύουν τὸ πλεῖστον σχεδὸν τῶν διαλαμβανομένων θεμάτων εἰς τὸ βιβλίον αὐτό.

Διὰ τοὺς λόγους αὐτούς, περιοριζόμεθα ἡμεῖς ἐνταῦθα εἰς μερικὰς ἁπλᾶς μόνον ὑποδείξεις, ἐπὶ τοῦ τρόπου καθ' ὃν νομίζομεν ὅτι ἡ μελέτη τοῦ βιβλίου αὐτοῦ θὰ ἀποβῇ ὠφελιμωτέρα.

α) Κατ' ἀρχήν, ἡ *Εἰσαγωγὴ* θὰ πρέπει νὰ μελετηθῇ κατόπιν μιᾶς, ἀρκετὰ πλήρους, προηγουμένης μελέτης ἑνὸς καλοῦ διδακτικοῦ βιβλίου τῆς Στοιχειώδους Γεωμετρίας — καὶ μάλιστα, κατὰ τὸ δυνατόν, καὶ τῶν στοιχείων ἐπὶ τῶν κωνικῶν τομῶν καὶ τοῦτο ἐπειδὴ πλεῖσται ὅσαι τῶν μεθόδων ἀποδείξεως θεωρημάτων, λύσεως προβλημάτων κλπ., ἀναφέρονται ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν προτάσεων Στοιχείων τῆς Γεωμετρίας, ὡς καὶ ἐπὶ θεμάτων ἀνηκόντων εἰς τὸ VIII βιβλίον (κωνικαὶ τομαί).

β) Αἱ ἀσκήσεις τῶν ἑπομένων βιβλίων (I — VII), δύνανται νὰ μελετῶνται κατόπιν τῆς ἀναγνώσεως τοῦ ἀντιστοίχου βιβλίου. Αἱ κατὰ τὴν λύσιν αὐτῶν παραπομπαὶ εἰς ἑπόμενα βιβλία καλὸν

εἶναι νὰ κρατῶνται εἰς σημειώσεις, ὥστε, προϊούσης τῆς μελέτης, νὰ καθίσταται ὁ ἀναγνώστης ἐνήμερος τῆς σημασίας τῶν προηγουμένων αὐτῶν παραπομπῶν.

γ) Εἶναι αὐτονόητον, ὅτι ὁ ἀναγνώστης τοῦ βιβλίου, ὁ ἐπιθυμῶν νὰ προσπορισθῇ ἐξ αὐτοῦ τὴν μεγίστην δυνατὴν ὠφέλειαν, δὲν θὰ πρέπει νὰ παραλείπῃ νὰ δίδῃ καὶ ὁ ἴδιος συμπληρωματικὰς ἀποδείξεις, ὅταν τοῦτο τοῦ εἶναι δυνατόν, τῶν μελετωμένων ἀσκήσεων, παραλλήλως πρὸς ἐκείνας τοῦ κειμένου, ἐπειδὴ καὶ ὅταν αὗται ὑστεροῦν τῶν ἀναγραφομένων εἰς βραχύτητα ἢ κομψότητα, ἀναπτύσσουν πάντοτε τὴν πρωτοβουλίαν καὶ ἀσφαλίζουν τὴν κατοχὴν τοῦ θέματος.

Θὰ πρέπει ἀκόμη νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ παροῦσα ἐργασία εἶναι *μετάφρασις* ὅσον τὸ δυνατὸν πιστὴ τοῦ γαλλικοῦ κειμένου καὶ ἀπηλλαγμένη πάσης προσωπικῆς ἐπεμβάσεως τοῦ μεταφραστοῦ (*), ἐπειδὴ μίαν τοιαύτην πρωτοβουλίαν καὶ ἀνεπιθύμητον θὰ τὴν ἐθεώρει οὗτος ἀλλὰ καὶ ἀσέβειαν πρὸς τὸ κείμενον καὶ εἰς τὴν παμψηφίαν σχεδὸν τῶν περιπτώσεων τουλάχιστον περιττήν.

Ἐπιβεβλημένην ἐξαίρεσιν τοῦ κανόνος τούτου ἀποτελοῦν αἱ πολυάριθμοι ὑποσημειώσεις εἰς τὸ κείμενον *(Σημ. μετ.)*, τὰς ὁποίας ἐθεωρήσαμεν ἀπαραιτήτους διὰ τὴν σαφήνειαν, κατανόησιν πληρεστέραν τῶν ἀναγραφομένων ἀλλὰ καὶ πρὸς ἀπόδειξιν μερικῶν ἀναποδείκτων προτάσεων. Τὰς τοῦ τελευταίου τούτου εἴδους ὑποσημειώσεις παρεθέσαμεν μόνον ὁσάκις ἠδυνήθημεν νὰ δώσωμεν ἀποδείξεις τῶν ἐν λόγῳ προτάσεων συντόμους (**).

Ἰδιαιτέρως εὐχαριστοῦμεν τὸν σεβαστὸν συνάδελφον κ. Θεόδωρον Γεροντόπουλον, Διευθυντὴν Κοργιαλενείου καὶ Ἀναργυρείου Σχολῆς Σπετσῶν, μεταφράσαντα τὸ VI Βιβλίον τοῦ παρόντος ἔργου καὶ τὴν Δίδα Ἑλένην Τσιόκου, Ἐπιμελήτριαν Ε.Μ.Π. ἥτις μετέφρασεν τμῆμα ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς (μέχρι σ. 96).

Τέλος ἐξαιτούμεθα τὴν ἐπιεικῆ κρίσιν τοῦ ἀναγνώστου διὰ τυχὸν μικρὰς τυπογραφικὰς ἀβλεψίας — μοιραίας ἄλλωστε εἰς ἔργα τοιαύτης ἐκτάσεως.

Δ. ΓΚΙΟΚΑΣ

(*) Ἐκτὸς σπανιωτάτων τινῶν ἐξαιρέσεων — ὡς ἐπὶ τὸ ἑλληνικώτερον ἀποδόσεως φράσεων τινῶν, συντομεύσεων, ἐπεξηγήσεων (τῶν τελευταίων ἐντὸς ἀγκυλῶν) κλπ.

(**) Ἐκτὸς δύο ἢ τριῶν ἐξαιρέσεων (Βλ. εἰς τὸ τέλος τοῦ VII βιβλίου)

ΙΣΤΟΡΙΚΑΙ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Εὐθὺς ὡς ἤρχισαν οἱ ἄνθρωποι νὰ σκέπτωνται, ἐδημιουργήθη ἡ ἀνάγκη νὰ ἐκτιμήσουν διάφορα μεγέθη καὶ ἐξέλεξαν πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν καταλλήλους μονάδας. Δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀναζητήσωμεν τὴν ἀρχὴν τῶν ἐννοιῶν τοῦ χώρου, τοῦ μεγέθους, τοῦ ἀριθμοῦ καὶ εἶναι ἀδύνατον νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἡμερομηνίαν τῶν πρώτων ἀνακαλύψεων τῶν σχετικῶν μὲ τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων. Ἐν τούτοις, πιστεύεται γενικῶς ὅτι ἡ λεγομένη Γεωμετρία ἔσχε τὴν γένεσίν της παρὰ τοῖς Χαλδαίοις καὶ τοῖς Αἰγυπτίοις. Ὁ Ἡρόδοτος, ὁ *πατὴρ τῆς Ἱστορίας*, ἀναβιβάζει τὴν ἀρχὴν τῆς ἐπιστήμης ταύτης εἰς τὴν ἐποχὴν καθ' ἣν ὁ Σέσωστρις κατένειμεν τὰς γαίας μεταξὺ τῶν κατοίκων τῆς Αἰγύπτου. Ὁ Ἀριστοτέλης τοποθετεῖ ὁμοίως εἰς αὐτὴν τὴν χώραν τὸ λίκνον τῶν μαθηματικῶν.

Ὀφείλομεν νὰ εἴπωμεν ἐν τούτοις ὅτι ἡ Ἑλλὰς εἶναι ἡ ἀληθὴς «πατρὶς τῆς Γεωμετρίας», διότι εἰς αὐτὴν ἡ Γεωμετρία ἐκαλλιεργήθη ἐντατικῶς, ἐν αὐτῇ εἶδον τὸ φῶς σημαντικαὶ ἀνακαλύψεις καὶ ἐταξινομήθησαν τὰ ἐπιτευχθέντα ἀποτελέσματα, εἰς τρόπον ὥστε νὰ σχηματίσουν ἓν ἐπιστημονικὸν (*) σύστημα.

Κατὰ τὸν ΣΤ' αἰῶνα π. Χ. ὁ ***Θαλῆς***, ὁ ἐκ Φοινίκης, μεταβαίνει νὰ διδαχθῇ εἰς τὴν Αἴγυπτον, ὅπου καὶ μετρεῖ τὸ ὕψος τῶν πυραμίδων διὰ τῆς σκιᾶς των. Φέρει τὴν Γεωμετρίαν εἰς τὴν Ἑλλάδα, ἱδρύει εἰς Μίλητον τὴν Ἰωνικὴν σχολὴν καὶ πλουτίζει τὴν ἐπιστήμην μὲ πολλὰ θεωρήματα ἐπὶ τοῦ *ἰσοσκελοῦς τριγώνου*, τῆς *ἐγγεγραμμένης γωνίας* καὶ τῶν *ὁμοίων τριγώνων*.

Πυθαγόρας (γεννηθεὶς εἰς Σάμον, περὶ τὸ 580 π. Χ.). Εἶναι ὁ πλέον ἔνδοξος ὀπαδὸς τοῦ Θαλοῦ. Ἐταξίδευσεν καὶ αὐτὸς εἰς Αἴγυπτον καὶ Ἰνδίας καὶ κατόπιν ἀπεσύρθη εἰς Ἰταλίαν, ὅπου ἵδρυσεν τὴν περίφημον Σχολήν του. Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται ἡ ἀπόδειξις τοῦ *ἀσυμμέτρου* τῆς διαγωνίου ἑνὸς τετραγώνου, συγκρινομένης πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ, ἡ θεωρία τῶν *κανονικῶν σωμάτων*, τὸ θεώρημα τοῦ *τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης* τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τὸ πρῶτον σπέρμα τῆς θεωρίας τῶν *ἰσοπεριμέτρων*.

(*) Σημ. μετ. Αἱ γνώσεις τῶν Χαλδαίων, Ἀσσυρίων, Αἰγυπτίων καὶ τῶν ἄλλων Ἀνατολικῶν λαῶν ἦσαν ἐμπειρικαί, ὄχι μόνον ὅσον ἀφορᾷ τὴν Γεωμετρίαν ἀλλὰ καὶ τὴν Ἀστρονομίαν καὶ τας ἄλλας Θετικὰς Ἐπιστήμας. Ἡ Ἐπιστήμη, μὲ τὴν σημασίαν τὴν ὁποίαν ὁ ὅρος ἔχει σήμερον, ἐγεννήθη εἰς τὴν Ἑλλάδα· ειδικώτερον ἡ Γεωμετρία, ὁ κλάδος οὗτος τῶν Μαθηματικῶν Ἐπιστημῶν, θεμελιοῦται ὡς κατ' ἐξοχὴν ἐπιστήμη, αὐτοτελής, πλήρης, στερουμένη ἀντινομιῶν καὶ στηριζομένη ἐπὶ πρώτων ἐννοιῶν καὶ ἀξιωμάτων. Αἱ πρῶται αὗται ἔννοιαι ἔχουν ἀφορμὴν τὴν ἐμπειρίαν, ἀπὸ τὴν ὁποίαν προκύπτουν διὰ συνεχῶν ἀφαιρέσεων, τὰ δὲ ἀξιώματα εἶναι προτάσεις αἵτινες ὁρίζουν σχέσεις μεταξὺ τῶν πρώτων ἐννοιῶν.

Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος (θανὼν περὶ τὸ 430 π. Χ.). Εἶναι ὁ πρῶτος ἀσχοληθεὶς μὲ τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου.

Ἱπποκράτης ὁ Χῖος (περὶ τὸ 450 π. Χ.). Ἠσχολήθη μὲ τὰς αὐτὰς ἐρεύνας, καθὼς ἐπίσης καὶ μὲ τὴν μελέτην τοῦ προβλήματος τοῦ *διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου*, καταστὰς ἔνδοξος διὰ τοῦ τετραγωνισμοῦ τῶν *μηνίσκων*, τοὺς ὁποίους ἐπενόησεν.

Πλάτων (430 — 347 π. Χ.). Ἐμαθήτευσεν κατ' ἀρχὰς ἐν Αἰγύπτῳ καὶ κατόπιν πλησίον τῶν Πυθαγορείων. Ἐπανελθὼν εἰς Ἀθήνας ἵδρυσεν τὴν Ἀκαδημίαν. Εἰσήγαγε εἰς τὴν Γεωμετρίαν τὴν *ἀναλυτικὴν μέθοδον*, τὰς *κωνικὰς τομάς*, τὴν θεωρίαν τῶν γεωμετρικῶν τόπων καὶ ἔδωσε μίαν γραφικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ *διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου*. Ἐθεώρει τὸν Θεὸν ὡς *ἀεὶ γεωμετροῦντα* καὶ ἀνέγραψεν ἐπὶ τῆς θύρας τῆς Σχολῆς του «Οὐδεὶς νὰ εἰσέλθῃ ἐὰν δὲν εἶναι γεωμέτρης» (*).

Ἀρχύτας ὁ Πυθαγόρειος (γεννηθεὶς εἰς Τάραντα, περὶ τὸ 430 π. Χ.). Εἶναι ὁ πρῶτος ἀσχοληθεὶς μὲ καμπύλην *διπλῆς καμπυλότητος*, ἐπ' εὐκαιρίᾳ τοῦ προβλήματος τῶν *δύο μέσων ἀναλόγων*, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ Ἱπποκράτης ἀνήγαγεν τὸ πρόβλημα τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου.

Κατὰ τὴν αὐτὴν ἐποχὴν ὁ ***Δεινόστρατος***, μαθητὴς τοῦ Πλάτωνος, ἔλυσεν τὸ πρόβλημα τῆς τριχοτομήσεως τῆς γωνίας, τῇ βοηθείᾳ μιᾶς καμπύλης, τὴν ὁποίαν ὠνόμασεν *τετραγωνίζουσαν*.

Περσεύς. Ἠρεύνησεν τὰς ἰδιότητας τῶν σπειροειδῶν, δηλ. τῶν γραμμῶν κατὰ τὰς ὁποίας ἕν ἐπίπεδον τέμνει τὴν δακτυλιοειδῆ ἐπιφάνειαν τὴν καλουμένην *σπεῖραν*.

Εὐκλείδης (περὶ τὸ 285 π. Χ.). Ἐδίδαξεν εἰς Ἀλεξάνδρειαν καὶ συνέταξεν τὰ *Στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας*, εἰσαγαγὼν τὴν μέθοδον τῆς εἰς *ἄτοπον ἀπαγωγῆς*.

Τὰ Στοιχεῖα περιλαμβάνουν δέκα τρία βιβλία, εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ προσθέσωμεν ἕτερα δύο, ἀποδιδόμενα εἰς τὸν ***Ὑψικλῆν***, Ἀλεξανδρινὸν γεωμέτρην, ζήσαντα 150 ἔτη μετὰ τὸν Εὐκλείδην. Τὰ ἓξ πρῶτα βιβλία πραγματεύονται τὰ ἐπίπεδα σχήματα, τὰ τέσσαρα ἑπόμενα, ὀνομαζόμενα *ἀριθμητικά*, πραγματεύονται ἰδιότητας τῶν ἀριθμῶν καὶ τὰ πέντε τελευταῖα ἀναφέρονται εἰς τὰ ἐπίπεδα καὶ στερεὰ σχήματα. Εἰς τὰ Γυμνάσια διδάσκονται τὰ ἓξ πρῶτα βιβλία καὶ τὰ ἑνδέκατον καὶ δωδέκατον.

Ὀφείλεται ἐπίσης εἰς τὸν Εὐκλείδην ἓν βιβλίον, φέρον τὸν τίτλον *περὶ Δεδομένων*. Ἔγραψεν ἐπὶ τῶν *κωνικῶν τομῶν* καὶ ἄφησε τρία βιβλία *περὶ Πορισμάτων*, τὰ ὁποῖα δὲν ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν.

Ἀρχιμήδης (287 — 212 π. Χ.). Ἠσχολήθη εἰδικῶς μὲ τὴν *Γεωμετρίαν τῆς μετρήσεως*. Ἐτετραγώνισεν τὴν παραβολήν, ἐμελέτησεν τὰς σπειροειδεῖς, ἔδωσεν τὴν ἔκφρασιν τῶν ὄγκων τμημάτων ἐλλειψοειδῶν καὶ ὑπερβολοειδῶν, τὴν πρότασιν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου καὶ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον. Κληροδοτεῖ εἰς τὰς ἑπομένας γενεὰς

(*) Σημ. μετ. Ἡ ἀναγραφὴ πλήρως εἶχεν ὡς ἑξῆς: «Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τὴν στέγην. ἤγουν μηδεὶς ἄδικος παρεισερχέσθω τῇδε, δίκαιον γὰρ καὶ ἰσότης ἐστὶ Γεωμετρία».

ὄχι μόνον ἕνα μεγάλον ἀριθμὸν νέων θεωρημάτων, ἀλλὰ καὶ τὴν *μέθοδον δι' ἐξαντλήσεως*.

Ἀπολλώνιος (περὶ τὸ 247 π. Χ.). Ἐπραγματεύθη τὴν *Γεωμετρίαν τῆς Θέσεως*, δηλαδὴ τῆς μορφῆς καὶ τῆς σχέσεως τῶν σχημάτων. Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται τὸ ἔργον περὶ *κωνικῶν*, εἰς ὀκτὼ βιβλία. Ἐξ αὐτῶν ἑπτὰ ἐσώθησαν· τὸ ὄγδοον ἀπεκατεστάθη ὑπὸ τοῦ ἀστρονόμου Halley, τὸ 1646, βάσει πληροφοριῶν τοῦ Πάππου. Τὸ ἔργον του ὑπῆρξεν ἡ αἰτία νὰ τοῦ δοθῇ ἡ ἐπωνυμία τοῦ «*κατ' ἐξοχὴν γεωμέτρου*». Εὑρίσκει τις ἐκεῖ τὰς κυριωτέρας ἰδιότητας τῶν *ἑστιῶν*, τὸ σπέρμα τῶν θεωριῶν τῶν *πολικῶν*, τῶν *ἐξειλιγμένων*, τῶν *μεγίστων* καὶ *ἐλαχίστων*.

Μετὰ τὰ μεγάλα ὀνόματα τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου πρέπει νὰ περιορισθῇ τις εἰς τὸ νὰ ἀναφέρῃ ταχέως μερικοὺς ἄλλους γεωμέτρας.

Νικομήδης (150 π. Χ.). Εἶναι γνωστὸς ἀπὸ τὴν *κογχοειδῆ καμπύλην*, ἡ ὁποία ἐπιτρέπει τὴν λύσιν διὰ μιᾶς μηχανικῆς μεθόδου τοῦ προβλήματος τῶν *δύο μέσων ἀναλόγων*, ὡς ἐπίσης καὶ τοῦ τῆς τριχοτομήσεως τῆς γωνίας.

Ἵππαρχος (περὶ τὸ 150 π. Χ.). Ἐθεώρησεν τὴν *στερεογραφικὴν προβολὴν* καὶ ἠσχολήθη μὲ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα.

Μενέλαος (περὶ τὸ 80 π. Χ.). Εἰς τὸ βιβλίον του *περὶ σφαιρικῶν* ἀνεκάλυψεν πολλὰς τῶν ἰδιοτήτων τῶν σφαιρικῶν τριγώνων καὶ ἔδωσεν ὡς λῆμμα τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῆς θεωρίας τῶν *διατεμνουσῶν*.

Πτολεμαῖος (περὶ τὸ 125 π. Χ.). Εἰς τὴν μαθηματικήν του *σύνταξιν*, ἔδωσεν τὸ πρῶτον σύγγραμμα *εὐθυγράμμου καὶ σφαιρικῆς τριγωνομετρίας* καὶ τὸ ὁποῖον διεσώθη μέχρις ὑμῶν.

Πάππος (περὶ τὸ τέλος τοῦ 6ου μ. Χ. αἰῶνος). Συνεκέντρωσεν εἰς τὰς *μαθηματικὰς συλλογάς* του τὰς ἀνακαλύψεις τῶν πλέον διασήμων μαθηματικῶν καὶ πλῆθος προτάσεων καὶ λημμάτων, προοριζομένων νὰ εὐκολύνουν τὴν ἀνάγνωσιν τῶν ἔργων του. Τοῦ ὀφείλομεν τὸ περίφημον θεώρημα τῶν (Πάππου - Guldin) καὶ τὴν πρώτην μνείαν τοῦ *ἀναρμονικοῦ λόγου*.

Διοκλῆς. Ἐφευρίσκει τὴν *κισσοειδῆ*, διὰ νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα τῶν δύο μέσων ἀναλόγων· ἀλλὰ ἡ μηχανικὴ γραφὴ τῆς καμπύλης ταύτης ὀφείλεται εἰς τὸν Νεύτωνα.

Τοὺς μεγάλους γεωμέτρας διαδέχονται μερικοὶ *σχολιασταί*. κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον πρωτότυποι καὶ φθάνομεν εἰς τὴν περίοδον στασιμότητος, ἥτις διήρκεσεν μέχρι τοῦ 16ου αἰῶνος.

Viète (1540 — 1643). Ἤνοιξε τὴν νέαν ἐποχὴν τῆς ἐπιστήμης, συνεπλήρωσε τὴν *ἀναλυτικὴν μέθοδον* τοῦ Πλάτωνος τῇ βοηθείᾳ τῆς Ἀλγέβρας, κατεσκεύασε γραφικῶς τὰς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου βαθμοῦ, προπαρασκευάσας οὕτω τὸν δρόμον εἰς τὸν Καρτέσιον καὶ ἐτελειοποίησε τὴν σφαιρικὴντριγωνομετρίαν.

Kepler (1571 — 1631). Εἰς τὸ ἔργον του *Nouvelle Stéréométrie* εἰσήγαγε τὸ πρῶτον τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου εἰς τὴν Γεωμετρίαν, ἔκαμε παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ μηδενισμοῦ τῆς αὐξήσεως μιᾶς μεταβλητῆς εἰς τὸ μέγιστον ἢ εἰς τὸ ἐλάχιστον αὐτῆς καὶ ἔδωσε μίαν

γραφικὴν μέθοδον διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν συνθηκῶν μιᾶς ἐκλείψεως τοῦ ἡλίου.

Cavalieri (1598 — 1647). Ἐδημοσίευσε τὸ ἔργον *Géométrie des indivisibles* (Γεωμετρία τῶν ἀδιαιρέτων). Εἰς τὸ ἔργον τοῦτο ἐθεώρησεν τὰ στερεὰ ὡς ἀποτελούμενα ἀπὸ μίαν ἀπειρίαν ἐπιπέδων καὶ τὰ ἐπίπεδα ὡς συνένωσιν μιᾶς ἀπειρίας γραμμῶν. Ἡ γόνιμος αὕτη ἰδέα, παρὰ τὴν ἀνακρίβειαν τῆς ὑποθέσεως ἐφ' ἧς στηρίζεται, ἐπιτρέπει νέους ὑπολογισμοὺς τῶν ἐπιφανειῶν, τῶν ὄγκων καὶ τὸν γεωμετρικὸν προσδιορισμὸν τῶν κέντρων βάρους.

Guldin (1577 — 1643). Ἀνεκάλυψε τὰ περίφημα θεωρήματα τὰ ὁποῖα φέρουν τὸ ὄνομά του καὶ τὰ ὁποῖα βραδύτερον εὑρέθησαν εἰς τὸ ἔργον τοῦ Πάππου.

Grégoire de Saint - Vincent (1584 — 1667). Ἐτελειοποίησε τὴν μέθοδον δι' ἐξαντλήσεως τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ δυνάμεθα εὐλόγως νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ μικρὸν διαφορικὸν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται μεταξὺ τῆς καμπύλης καὶ τῶν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν τοῦ ἑνὸς ἐκ δύο πολυγώνων, ἐγγεγραμμένον ἢ περιγεγραμμένον, ὡδήγησε τοὺς Barrow, Leibniz καὶ τὸν Νεύτωνα εἰς τὸν ἀπειροστικὸν λογισμόν.

Roberval (1602 — 1673). Ἔδωσεν μίαν μέθοδον, διὰ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένας πρὸς ὡρισμένας καμπύλας. Ἡ μέθοδος αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν συνθέτων κινήσεων, εἰσαχθείσης εἰς τὴν μηχανικὴν ὑπὸ τοῦ Γαλιλαίου.

Fermat (1590 — 1663). Ἐδημοσίευσεν τὴν ὡραίαν μέθοδον τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων, εἰσαγαγὼν διὰ πρώτην φορὰν τὸ ἄπειρον εἰς τοὺς ὑπολογισμούς, ὅπως ὁ Kepler τὸ εἰσήγαγεν εἰς τὴν καθαρὰν Γεωμετρίαν. Ἐπίσης ἀνυπέρβλητον ἔργον αὐτοῦ εἶναι ἡ *Théorie des nombres*.

Desargues (1593 — 1662). Ἐπεξέτεινεν εἰς τὰς κωνικὰς τομὰς τὰς ἰδιότητας τοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται ὡς βάσεις τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου μελετῶμεν τὰς τομάς. Ἐθεώρησεν τὰς παραλλήλους ὡς τεμνομένας εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ἔδωσεν τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῆς *ἐνελίξεως ἓξ σημείων*, θεωρῶν μίαν εὐθεῖαν τέμνουσαν μίαν κωνικὴν τομὴν καὶ ἓν τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτήν. Εἰς αὐτὸν ἐπίσης ὀφείλεται καὶ τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῶν δύο ὁμολόγων τριγώνων.

Pascal (1623 — 1662). Ἔγραψεν εἰς ἡλικίαν δέκα ἓξ ἐτῶν τὸ ἔργον του *Traité des sections coniques*. Εἰς ἡλικίαν δέκα ὀκτὼ ἐτῶν τὰς ἀνακαλύψεις του ἐπὶ τῆς *κυκλοειδοῦς* καὶ ἔδωσεν τὸ περίφημον θεώρημα τοῦ *μυστικοῦ ἑξαγράμμου*, σχετικῶς πρὸς τὴν ἰδιότητα τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς μίαν κωνικὴν ἑξαγώνου.

Descartes (Καρτέσιος, 1596 — 1650). Μὲ τὴν ἀνεκτίμητον σύλληψιν τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀλγέβρας εἰς τὴν θεωρίαν τῶν καμπύλων, μετέβαλεν ἀληθῶς τὴν ὄψιν τῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν. Ἡ Φυσικὴ καὶ ἡ Ἄλγεβρα καθ' ἑαυτὴν ὠφελήθη μεγάλως ἀπὸ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἡ ἀνάλυσις ἐπλουτίσθη μὲ τὴν μέθοδον τῶν ἀπροσδιορίστων συντελεστῶν.

Ἡ *ἀναλυτικὴ μέθοδος* τοῦ Καρτεσίου ἐκαλλιεργήθη ἐξ ἄλλου ὑπὸ

μεγάλου ἀριθμοῦ γεωμετρῶν, ἐκ τῶν ὁποίων περιοριζόμεθα νὰ ἀναφέρωμεν ὀλίγους τινάς.

De Witt (1625—1672). Ἔδωσεν μίαν ὀργανικὴν κατασκευὴν τῶν κωνικῶν.

Wallis (1616—1703). Εἶναι ὁ πρῶτος γράψας ἐν «*Traité analytique des sections coniques*».

Viviani (1622—1703). Ἔθεσεν τὸ πρόβλημα τοῦ ἀκριβῶς τετραγωνισίμου σφαιρικοῦ θόλου.

Huygens (1629—1695). Πολλαπλῶς ἔνδοξος, ἔδωσεν τὴν θεωρίαν τῶν *ἐξειλιγμένων*, εἰσήγαγεν τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῶν *δρωσῶν δυνάμεων* καὶ ἐδημοσίευσεν τὸ ἔργον *Traité de la Lumière*.

La Hire (1640—1718). Συνεχιστὴς τῶν θεωριῶν τοῦ Καρτεσίου καὶ τοῦ Pascal, ἔδωσεν μίαν νέαν μέθοδον διὰ τὰς τομὰς κωνικῶν καὶ κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν, ἐν ὑπόμνημα ἐπὶ τῶν *ἐπικυκλοειδῶν* καί, τὸ 1685, τὸ μέγα ἔργον αὐτοῦ «*Traité des sections coniques*».

Newton (Νεύτων, 1642—1727). Μέγας γεωμέτρης. Ἐδημοσίευσεν τὸ ἔργον *L'Arithmétique universelle*, ὑπόδειγμα τέλειον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τοῦ Καρτεσίου, εἰς τὴν λύσιν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων καὶ τὴν κατασκευὴν τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων. Τὸ μέγα ἔργον του, *Les Principes*, περιλαμβάνει μέγαν ἀριθμὸν προτάσεων τῆς καθαρᾶς Γεωμετρίας ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν τόξων τῶν ἐπικυκλοειδῶν. Ἡ σημασία ὅλων τούτων ἐν τούτοις ὠχριᾷ ἐνώπιον τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ *ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ*, τῆς ὁποίας τὴν δόξαν διεκδικεῖ ὁ Νεύτων ἀπὸ τὸν Leibniz.

Leibniz (1646—1716). Εἶναι ὁ κύριος συγγραφεὺς τῶν θαυμαστῶν ἀποδοτικῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας ὠνόμασεν *διαφορικὸν λογισμὸν* καὶ *ὁλοκληρωτικὸν λογισμόν*. Ὁ διαφορικὸς λογισμὸς ἐφαρμόζεται κυρίως εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων. Ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς ἐφαρμόζεται εἰς τοὺς τετραγωνισμοὺς ἐπιφανειῶν, κυβισμοὺς ὄγκων καὶ ὑπολογισμοὺς μήκους τόξων καμπύλων.

Halley (1646—1742). Δὲν εἶναι μόνον διάσημος ἀστρονόμος ἀλλὰ καὶ διακεκριμμένος γεωμέτρης. Εἰς αὐτὸν ὀφείλομεν τὴν μετάφρασιν καὶ ἀποκατάστασιν τῶν πλείστων ἔργων τοῦ Ἀπολλωνίου.

Maclaurin (1698—1746). Εἰς τὸ ἔργον του «*Traité des fluxions* ἀποδεικνύει τὴν μεγάλην ὠφέλειαν ποὺ δύναταί τις νὰ ἀποκομίσῃ ἀπὸ θεωρήσεις καθαρῶς γεωμετρικὰς διὰ τὴν μελέτην θεμάτων σχετικῶν μὲ τὴν ἕλξιν τῶν ἐλλειψοειδῶν.

R. Simson (1687—1768). Εἰς τὸ ἔργον του *Traité des coniques*, ἐδημοσίευσεν τὰ θεωρήματα τῶν Desargues καὶ Pascal, ὁμοίως τὸ πρόβλημα τοῦ Πάππου *ad quatuor lineas* καὶ ἠσχολήθη νὰ ἀνακαλύψῃ τὰ πορίσματα τοῦ Εὐκλείδου.

Οἱ *Bernoulli* ἐφήρμοσαν πρὸ πάντων τὸν ἀπειροστικὸν λογισμόν.

Jacques Bernoulli (1654—1705). Εἶναι εἷς ἐκ τῶν πρώτων χρησιμοποιησάντων τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμόν. Ἐμελέτησεν τὴν λογαριθμικὴν ἕλικα.

Μαρκήσιος de l'Hopital (1651—1704). Ἔδωσεν τὴν θεωρίαν τῶν ἀπειροστῶν.

Jean Bernoulli (1667 — 1748). Ἐφάμιλλος τοῦ ἀδελφοῦ του Jacques, προέτεινε τὸ πρόβλημα τοῦ *βραχυστοχρόνου*. Ἐπίσης ἐμελέτησεν τὸ πρόβλημα τῶν *ἰσοπεριμέτρων*.

Περιοριζόμεθα εἰς τὸ νὰ ἀναφέρωμεν τὰ ὀνόματα τοῦ *Rolle* (1652 — 1749) καὶ τοῦ ἀλγεβρικοῦ του θεωρήματος, τοῦ *Riccati* (1676 — 1754), τοῦ ὁποίου τὸ ὄνομα φέρει μία διαφορικὴ ἐξίσωσις, τοῦ *Taylor* (1685—1731) καὶ τῆς *σειρᾶς του*, τοῦ *Moivre* (1667—1756), τοῦ *Cotes* (1682 — 1716) καὶ τῶν θεωρημάτων του, τοῦ *Cramer* (1704 — 1752) καὶ τοῦ ἔργου του *Introduction à l'analyse des courbes algébriques*, διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς ἕνα ἐκ τῶν μεγαλυτέρων ἀναλυτῶν.

Euler (1707 — 1783). Ἐδημοσίευσεν τὸ ἔργον του *Introduction à l'analyse des infinis* καὶ μέγαν ἀριθμὸν ὑπομνημάτων ἐπὶ διαφόρων περιοχῶν τῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν.

Clairaut (1713 — 1765). Εἰς ἡλικίαν δέκα ἐξ ἐτῶν ἔγραψεν τὸ ἔργον του *Traité des courbes à double courbure* καὶ ἐξέθεσεν διὰ πρώτην φοράν, μὲ ἕνα τρόπον μεθοδικόν, τὴν θεωρίαν τῶν συντεταγμένων τοῦ χώρου, ἐφαρμόζων αὐτὴν εἰς τὰς καμπύλας ἐπιφανειῶν καὶ εἰς τὰς καμπύλας διπλῆς καμπυλότητος αἵτινες προκύπτουν ἐκ τῆς τομῆς των.

D'Alembert (1716 — 1783). Εἶναι κυρίως γνωστὸς ἀπὸ τὸ ἔργον του *Traité de dynamique*.

Lambert (1728 — 1777). Ἐδημοσίευσεν τὸ ἔργον του *Traité de perspective* καὶ τὸ *Traité géométrique de comètes*.

Bezout (1730 — 1783). Γνωστὸς ἀπὸ τὸ ἔργον του *Cours complet de mathématiques*.

Lagrange (1736 — 1813). Συγγραφεὺς τοῦ ἔργου *Mécanique analytique* καὶ τοῦ *Calcul des variations*.

Laplace (1749 — 1827). Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται μέγας ἀριθμὸς ἐργασιῶν τῆς ἀναλύσεως καὶ τῆς *Οὐρανίου Μηχανικῆς*.

Ἡ δύναμις καὶ ἡ γονιμότης τῶν ἀναλυτικῶν μεθόδων ἐξήσκησαν ἔκτοτε τοιοῦτον θέλγητρον ἐπὶ τῶν διανοιῶν, ὥστε δὲν ἐκαλλιέργουν πλέον, οὕτως εἰπεῖν, τὴν καθαρὰν Γεωμετρίαν. Ἡ ἀφύπνισις συνετελέσθη περὶ τὸ τέλος τοῦ 18ου αἰῶνος καὶ ἐπανέφερεν τὴν προσοχὴν ἐπὶ καθαρῶς γεωμετρικῶν μεθόδων.

Monge (1746 — 1818). Συνήνωσεν τὰ στοιχεῖα τῶν διεσπαρμένων κατασκευῶν εἰς τὰ ἔργα τοῦ Desarques, τοῦ Frégier καὶ τῶν διαφόρων πρακτικῶν καὶ ἵδρυσεν τὴν παραστατικὴν Γεωμετρίαν. Ἀνήγαγεν οὕτω εἰς ἕνα μικρὸν ἀριθμὸν ἀναλλοιώτων ἀρχῶν καὶ κατασκευῶν, ὡρισμένων καὶ εὐκόλων, ὅλας τὰς γεωμετρικὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι δυνατὸν νὰ παρουσιασθοῦν εἰς τὴν κοπὴν τῶν λίθων, τῶν οἰκοδομικῶν ξύλων; τὴν προοπτικὴν καὶ τὴν γνωμονικήν. Ἀνέπτυξεν ἐξ ἄλλου τὴν ἱκανότητα τῆς ἐποπτείας τῶν σχημάτων τοῦ χώρου καὶ ἀνεκάλυψεν ἰδιότητάς των.

Carnot (1753 — 1823). Ἔδωσεν τὴν *μέθοδον τῶν διατεμνουσῶν* καὶ τῆς *Γεωμετρίας τῆς θέσεως*, ἥτις ἐπέτρεψεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ μίαν δοθεῖσαν περίπτωσιν ἑνὸς προτεινομένου προβλήματος, τὰς διαφόρους ἄλλας περιπτώσεις αἵτινες δυνατὸν νὰ παρουσιασθοῦν.

Legendre (1762 — 1833). Κατέστη δημοφιλής διά τοῦ ἔργου του *Éléments de Géométrie*, δημοσιευθέντος τό 1794. Ἀφωσιώθη ἐπίσης εἰς τήν ἀνωτέραν *ἀνάλυσιν* καί τήν *θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν*.

Dupin (1784 — 1873). Εἰς τό ἔργον του *Développements et ses Applications de Géométrie*, πραγματεύεται, δι' ἁπλῶν γεωμετρικῶν θεωρήσεων, μερικάς τῶν πλέον δυσκόλων προτάσεων τῆς ἀναλύσεως.

Brianchon (1785 — 1864). Ἔκαμε γνωστάς τάς ἰδιότητας τοῦ περιγεγραμμένου περί κωνικήν ἑξαγώνου καί ἐδημοσίευσεν ὑπόμνημα *ἐπί τῶν καμπύλων δευτέρου βαθμοῦ*.

Poncelet (1788 — 1857). Ὑπῆρξεν ὁ κύριος δημιουργός *τῶν μεθόδων μετασχηματισμοῦ τῶν σχημάτων*, διά τῶν γονίμων αὐτοῦ θεωριῶν, τῆς *ὁμολογίας* καί τῆς τῶν *ἀντιστρόφων πολικῶν*. Τό ἔργον του *Traité des propriétés projectives des figures* καταδεικνύει τήν ἀσυνήθη ἰσχύν τῶν ὀργάνων τούτων ἐρεύνης, ἅτινα ἐπενόησε καί μετεχειρίσθη. Καί εἶναι μέν δυνατόν νά ἀνεύρῃ τις εἰς προηγούμενα ἔργα σπέρματά τινα τῶν ἀνωτέρω μεθόδων· ἐν τούτοις θά πρέπει νά ὁμολογηθῇ ὅτι ὑπάρχει μεγάλη ἀπόστασις μεταξύ ἑνός μεμονωμένου θεωρήματος, οσηνδήποτε σπουδαιότητα καί ἄν ἔχῃ τοῦτο, καί μιᾶς πλήρους θεωρίας, ἀγούσης εἰς πολυαρίθμους ἐφαρμογάς.

Poinsot (1777 — 1859). Ὁ τόσον ἄλλως γνωστός διά τῆς *θεωρίας τῶν ζευγῶν* αὐτοῦ· ἐμελέτησε τά *ἀστεροειδῆ πολύεδρα*.

Cauchy (1789 — 1857). Χειρίζεται τό αὐτό θέμα· οὗτος ἄλλως ἠσχολήθη μέ θέματα ἀναφερόμενα εἰς τό σύνολον τῶν κλάδων τῶν Μαθηματικῶν.

Möbius (1790 — 1868) καί *Steiner* (1796 — 1863). Ἐφαρμόζουν ἐπιτυχῶς τάς μεθόδους μετασχηματισμοῦ τῶν σχημάτων. Εἰς τόν τελευταῖον ὀφείλομεν μέγαν ἀριθμόν θεωρημάτων.

Gergonne (1771 — 1859). Εἰς τά *Annales mathématiques* αὐτοῦ ἐφαρμόζει τάς νέας θεωρίας καί διατυπώνει τήν ἀρχήν τοῦ *δυασμοῦ*, γενικεύων τά πορίσματα τῆς μεθόδου τῶν *ἀντιστρόφων πολικῶν*.

Chasles (1793 — 1880). Ἐπιλαμβάνεται ὅλων τῶν νεωτέρων θεωριῶν καί τάς ἐπεκτείνει διά τῶν ἰδίων του ἐρευνῶν, ἐμφανίζων ταύτας κατά τρόπον κομψόν καί αὐστηρόν, διά τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν μετασχηματισμῶν, οὕς ἀποκαλεῖ *ὁμογραφίαν* καί *συσχετισμόν τῶν σχημάτων*· ὁ *ἁρμονικός λόγος* εἶναι ἡ θεμελιώδης βάσις τῶν θεωριῶν τούτων. Τά ἔργα αὐτοῦ: *Géométrie supérieure*, *Traité des coniques* καί ἡ ἀποκατάστασις παρ' αὐτοῦ τῶν *πορισμάτων τοῦ Εὐκλείδου*, ἀφῆκαν ἐποχήν εἰς τήν Ἱστορίαν τῆς Γεωμετρίας.

Cremona (1830 — 1903). Συνοψίζει εἰς τήν *προβολικήν Γεωμετρίαν* αὐτοῦ τάς ἀρχάς τῆς νεωτέρας Γεωμετρίας, τάς ὁποίας ἔθεσαν οἱ *Poncelet*, *Steiner*, *Chasles*. Ἀντιθέτως πρός τήν συνήθειαν τῶν πλείστων συγγραφέων ὁ σοφός οὗτος οὐδέποτε ἀμνημονεῖ τῶν προγενεστέρων αὐτοῦ ἐπιστημόνων.

Οἱ *Stabbs*, *Thomson*, *Liouville* κλπ. ἐργάζονται ἐπί τῆς *ἀντιστροφῆς τῶν σχημάτων*, ὁ *Bellavitis* δημιουργεῖ τήν θεωρίαν τῶν *ἰσοδυναμιῶν (équipollences)*, ἐνῷ ὁ *Mannheim* ἀναπτύσσει τήν *Κινητικήν Γεωμετρίαν*. Ταύτης ὁ *Roberval* εἶχεν ἤδη δώσει μίαν πρώτην ἔννοιαν, διά τῆς μεθόδου του τῶν ἐφαπτομένων καί τήν ὁποίαν μέ-

θοδον ἠκολούθησεν ὁ *Poinsot* εἰς τὴν θεωρίαν του ἐπὶ τοῦ στιγμιαίου κέντρου περιστροφῆς.

Εἰς τὸν διὰ μηχανικῶν μέσων μετασχηματισμὸν τῶν σχημάτων εἰργάσθησαν ὁ *Peaucellier*, γνωστὸς ἐκ τοῦ *ἀντιστροφέως του*, *Kempe*, *Hart*, *Sylvester*, *Liguine*, *Darboux*.

Εἰς τὰς ἡμέρας μας (*) ἡ Γεωμετρία ἐπλουτίσθη δι' ἑνὸς μεγάλου ἐνδιαφέροντος κεφαλαίου, χάρις εἰς τὰς ἐργασίας πλήθους διακεκριμμένων Γεωμετρῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων πρέπει πρωτίστως νὰ ἀναφέρωμεν τοὺς *Lemoine*, *Brocard* καὶ *Neuberg*.

Ἀκολούθως δὲ τοὺς *J. Casey*, *G. Tarry*, *M. d'Ocagne* καὶ *G. de Longchamps*.

Κατὰ τὰ διάφορα ἐπιστημονικὰ συνέδρια, ὁ *M. E. Vigarié* ὑπῆρξεν ὁ ἱστοριογράφος τῶν ἐρευνῶν τῶν σχετικῶν μὲ τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Τριγώνου.

Κατὰ τὸ 1904, ὁ *Gaston Darboux* ἐδημοσίευσεν τὴν ἀξιοσημείωτον ἐργασίαν *Étude sur le développement des Méthodes géométriques au XIXe. siècle*.

(*) (1890 — 1910).

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ

Ι. ΓΕΝΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΙΙ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

ΙΙΙ. ΧΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

IV. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

V. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΚΑΙ ΕΠΕΚΤΑΣΙΣ

VI. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

VII. ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ I

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ II

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ IV

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ V

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ VI

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ VII

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ VIII

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ ΛΕΞΙΚΟΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ

ΔΙΑ ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΩΝΤΑΙ ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΝΑ ΛΥΩΝΤΑΙ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

I

ΓΕΝΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

Εἰσαγωγή

1. Εἶναι χρήσιμον νὰ προτάξωμεν τῆς ἐκθέσεως τῶν μεθόδων μερικὰς ὑποδείξεις, σχετικὰς πρὸς διαφόρους προτάσεις τὰς ὁποίας ἐνδεχομένως θὰ χρειασθῇ ν' ἀποδείξωμεν.

2. Τρόπος διατυπώσεως τῶν θεωρημάτων. Ἡ διατύπωσις ἑνὸς θεωρήματος συνίσταται κυρίως ἀπὸ μίαν ὑπόθεσιν καὶ ἀπὸ ἓν συμπέρασμα.

Παράδειγμα. Πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας, ἰσαπέχει τῶν δύο πλευρῶν αὐτῆς.

Ἡ ὑπόθεσις συνίσταται εἰς τὸ νὰ θεωρήσω, ὅτι τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου· τὸ συμπέρασμα συνίσταται εἰς τὸ νὰ εἴπω, ὅτι τὸ σημεῖον ἰσαπέχει τῶν δύο πλευρῶν.

3. Σημείωσις. Ἡ ὑπόθεσις διατυποῦται συνήθως εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς προτάσεως· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὸ συμπέρασμα καὶ νὰ εἴπωμεν π.χ.:

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας.

4. Εἴδη προτάσεων. Δύο προτάσεις συγκρινόμεναι πρὸς ἀλλήλας δύνανται νὰ εἶναι *ἀντίστροφοι, ἀντίθετοι, ἀντιφατικαί.*

Προτάσεις ἀντίστροφοι. Δύο προτάσεις λέγονται ἀντίστροφοι, ὅταν ἡ ὑπόθεσις καὶ τὸ συμπέρασμα τῆς πρώτης, εἶναι ἀντιστοίχως συμπέρασμα καὶ ὑπόθεσις τῆς δευτέρας.

Προτάσεις ἀντίθετοι. Δύο προτάσεις εἶναι ἀντίθετοι, ὅταν αἱ συνθῆκαι τῆς δευτέρας εἶναι τὸ ἀντίστροφον ἢ ἡ ἄρνησις τῶν συνθηκῶν τῆς πρώτης· οὕτω, ἡ ὑπόθεσις τῆς ἀντιθέτου προτάσεως εἶναι τὸ ἀντίθετον τῆς ὑποθέσεως τῆς ἀπ' εὐθείας προτάσεως καὶ τὸ συμπέρασμα τῆς ἰδίας αὐτῆς ἀντιθέτου προτάσεως, εἶναι ἐπίσης τὸ ἀντίθετον τοῦ συμπεράσματος τῆς ἀπ' εὐθείας διατυπωθείσης προτάσεως.

Προτάσεις ἀντιφατικαί. Δύο προτάσεις εἶναι ἀντιφατικαί, ὅταν ἔχουν τὴν ἰδίαν ὑπόθεσιν καὶ διαφορετικὸν συμπέρασμα, ἢ διαφορετικὰς ὑποθέσεις καὶ τὸ αὐτὸ συμπέρασμα.

5. Προτάσεις ἀντίστοιχοι. Εἰς πᾶσαν πρότασιν δοθεῖσαν, ἀντιστοιχοῦν:

1) Ἡ ἀντίστροφος πρότασις.
2) Ἡ ἀντίθετος πρότασις καὶ ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς.
3) Αἱ δύο ἀντιφατικαὶ προτάσεις καὶ αἱ ἀντίστροφοί των.

Παραδείγματα. Ἀρχικὴ πρότασις. Πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας, ἰσαπέχει τῶν πλευρῶν αὐτῆς.

Ἀντίστροφος πρότασις. Πᾶν σημεῖον ἰσαπέχον τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας, κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου αὐτῆς.

Ἀντίθετος πρότασις καὶ ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς. 1) Πᾶν σημεῖον λαμβανόμενον ἐκτὸς τῆς διχοτόμου, ἀπέχει ἀνίσως τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.

2) Πᾶν σημεῖον ἀνίσως ἀπέχον τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας, δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου της.

Ἀντιφατικαὶ προτάσεις. 1) Πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου, ἀπέχει ἀνίσως τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας. 2) Πᾶν σημεῖον λαμβανόμενον ἐκτὸς τῆς διχοτόμου, θὰ ἰσαπέχῃ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.

6. Παρατηρήσεις. 1) Τὸ ἀντίστροφον ἑνὸς θεωρήματος δυνατὸν νὰ εἶναι μία πρότασις ψευδής. Οὕτω ἐκ τοῦ γνωστοῦ θεωρήματος: *ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι* δὲν δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι ὅλαι αἱ ἴσαι γωνίαι εἶναι ὀρθαί.

2) Ἡ ἀντίθετος πρότασις ἑνὸς θεωρήματος δυνατὸν νὰ εἶναι ψευδής, τοιαύτη εἶναι ἡ ἑξῆς: ὅλαι αἱ μὴ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἄνισοι.

3) Εἶναι προφανὲς ὅτι ἐὰν μία πρότασις εἶναι ἀληθής, ἡ ἀντιφατική της, θὰ εἶναι ψευδὴς καὶ ἀντιστρόφως.

4) Ἡ ἀντιφατικὴ πρότασις χρησιμεύει, ὅταν ἀποδεικνύωμεν διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς τὸ ἀντίστροφον δοθέντος θεωρήματος.

7. Ἐξάρτησις τῶν προτάσεων. I. Ἐὰν ἓν θεώρημα καὶ τὸ ἀντίθετόν του εἶναι ἀληθῆ, τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν ἀντίστροφον πρότασιν ἑκάστου τῶν θεωρημάτων τούτων.

Παράδειγμα. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, ἴσα τόξα ὑποτείνονται ὑπὸ ἴσων χορδῶν καὶ ἄνισα τόξα ὑποτείνονται ὑπὸ ἀνίσων χορδῶν.

Δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι: ἴσαι χορδαὶ ὑποτείνονται ὑπὸ ἴσων τόξων καὶ ἄνισοι χορδαὶ ὑποτείνονται ὑπὸ ἀνίσων τόξων.

II. Ἐὰν ἓν θεώρημα καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις εἶναι ἀληθῆ, τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν ἀντίθετον πρότασιν ἑκάστου τῶν θεωρημάτων τούτων.

Παράδειγμα. Πᾶσα εὐθεῖα κάθετος εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτῖνος, εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν καὶ ἀντιστρόφως, πᾶσα εὐθεῖα ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα εἰς τὸ σημεῖον ἁφῆς.

Προκύπτει ἀναγκαίως ὅτι: πᾶσα εὐθεῖα μὴ κάθετος εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτῖνος, δὲν εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν, καθὼς ἐπίσης καὶ πᾶσα εὐθεῖα μὴ ἐφαπτομένη, δὲν εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτῖνος.

8. Συμπέρασμα. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τῶν Α καὶ Α' μίαν πρότασιν καὶ τὴν ἀντίστροφόν της, διὰ τῶν Β καὶ Β' τὰς ἀντιθέτους προτάσεις τῶν Α καὶ Α', διὰ Γ καὶ Γ' τὰς ἀντιφατικὰς προτάσεις τῆς Α', δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας τὰς Α καὶ

Β, διὰ νὰ προκύψουν αἱ Α' καὶ Β' ἢ νὰ ἀποδείξωμεν τὰς Α καὶ Α' διὰ νὰ προκύψουν ἡ Β καὶ ἡ ἀντιστροφός της Β'.

Τέλος δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας, ὅτι ἡ Α εἶναι μία πρότασις ἀληθής, ἐὰν εὕρωμεν ὅτι μία τῶν ἀντιφατικῶν προτάσεων Γ ἢ Γ' τῆς ἀντιστρόφου Α' εἶναι ψευδὴς πρότασις, ὅτε θὰ συμπεράνωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῆς Α' καὶ ἐν συνεχείᾳ τῶν Β καὶ Β'.

Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ἐπίσης ὅτι: «Ἡ ἀντίστροφος καὶ ἡ ἀντίθετος μιᾶς τυχούσης προτάσεως ἀληθοῦς ἢ ψευδοῦς, εἶναι πάντοτε ἀμφότεραι ἀληθεῖς ἢ ψευδεῖς» (L. Gérard).

9. Σύγχρονοι ὑποθέσεις. Ἓν καὶ τὸ αὐτὸ θεώρημα δύναται νὰ διατυπώνῃ ἢ νὰ περιέχῃ περισσοτέρας τῆς μιᾶς ὑποθέσεις, αἱ ὁποῖαι ὀφείλουν νὰ συνυπάρχουν, διὰ νὰ καταλήξουν εἰς μοναδικὸν συμπέρασμα. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν, ὑπάρχουν τόσαι ἀντίστροφοι προτάσεις, ὅσαι καὶ ὑποθέσεις.

Παράδειγμα. Δύο ἐφεξῆς γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, εἶναι παραπληρωματικαί.

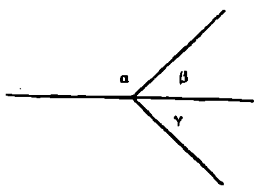
Ἡ συνθήκη τοῦ νὰ εἶναι ἐφεξῆς, αἱ γωνίαι, εἶναι μία πρώτη ὑπόθεσις καὶ ἐκείνη τοῦ νὰ ἔχουν τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς ἐπ' εὐθείας, εἶναι μία δευτέρα.

Θὰ ἔχωμεν τὰς δύο ἀντιστρόφους:

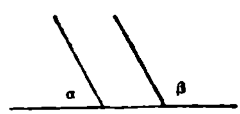
1) Ἐὰν δύο παραπληρωματικαὶ γωνίαι εἶναι ἐφεξῆς, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

2) Ἐὰν δύο παραπληρωματικαὶ γωνίαι ἔχουν τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς ἐπ' εὐθείας, θὰ εἶναι ἐφεξῆς.

Ἡ πρώτη πρότασις εἶναι ἀληθής· αὕτη ἀνταποκρίνεται εἰς τὸ σχ. 1. Ἡ δευτέρα δὲν εἶναι· διότι ἐὰν λάβωμεν τὴν γωνίαν γ ἴσην πρὸς τὴν β, αἱ γωνίαι α καὶ γ εἶναι παραπληρωματικαί, ἔχουν τὰς δύο πλευρὰς ἐπ' εὐθείας καὶ ὅμως δὲν εἶναι ἐφεξῆς.



Σχ. 1.



Σχ. 2.

Εἰς τὸ σχ. 2, αἱ γωνίαι α καὶ β εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ἔχουν τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς ἐπ' εὐθείας καὶ ὅμως δὲν εἶναι ἐφεξῆς.

10. Παρατήρησις. Αἱ ἐνδείξεις τὰς ὁποίας ἐδώσαμεν εἶναι ἐνδιαφέρουσαι καὶ ἀκόμη ἀναγκαῖαι, διὰ νὰ προλάβωμεν τὰ ἀνακριβῆ συμπεράσματα καὶ τὰ ἀνακριβῆ πορίσματα, ὅταν ἐπιχειροῦμεν νὰ ἐξαγάγωμεν, ἀπ' εὐθείας ἀπὸ ἓν θεώρημα, τὸ ὁποῖον εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ μελετήσωμεν, τὸ ἀντίστροφον ἢ τὸ ἀντίθετον αὐτοῦ. Οὕτω «εἶναι καλὸν ὅπως οἱ μαθηταὶ ἔχουν γενικὰς ἰδέας ἀκριβεῖς ἐπὶ τῶν ἀποδεικτικῶν μεθόδων· ἀκολουθοῦν εὐκολώτερον τὰς λεπτομερείας ἑνὸς θεωρήματος καὶ δύνανται νὰ συντομεύσουν τὴν σχετικὴν ἐργασίαν διὰ τὰς ἀντιθέτους, ἀντιστρόφους κ.λ.π. προτάσεις» (J. Bourget).

§ I. Ταξινόμησις τῶν μεθόδων

11. Σκοπὸς τῶν μεθόδων. Αἱ μέθοδοι ὑποδεικνύουν τὴν ὁδὸν τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀκολουθήσωμεν, διὰ ν' ἀποδείξωμεν ἓν θεώρημα ἢ διὰ νὰ λύσωμεν ἓν πρόβλημα.

Εἰς τὴν Γεωμετρίαν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑποδείξωμεν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ὁδὸν ἡ ὁποία, εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, ὁδηγεῖ ἀναποφεύκτως εἰς τὸν σκοπόν· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ διευθύνωμεν τὰς ἀναζητήσεις μας καὶ νὰ εὕρωμεν εὐκολώτερον τὰ ζητούμενα ἀποτελέσματα.

12. Κύρια εἴδη τῶν μεθόδων. Διαιροῦμεν τὰς μεθόδους εἰς δύο κυρίως ὁμάδας. Διακρίνομεν τὰς γενικὰς μεθόδους καὶ τὰς εἰδικὰς μεθόδους.

Αἱ γενικαὶ μέθοδοι δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις. Αἱ εἰδικαὶ μέθοδοι δὲν δύνανται νὰ χρησιμεύσουν, παρὰ μόνον εἰς μερικὰ θέματα· ἡ χρῆσις τῶν περισσοτέρων ἐξ αὐτῶν, εἶναι τόσον περιωρισμένη, ὥστε πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὅτι αἱ μέθοδοι αὗται δὲν ἀποτελοῦν παρὰ ἁπλᾶ τεχνάσματα.

Αἱ γενικαὶ μέθοδοι εἶναι ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

13. Ἡ ἀνάλυσις. Ἡ ἀνάλυσις εἶναι ἡ μέθοδος διὰ τῆς ὁποίας, ἀπὸ μίαν πρότασιν ἄγνωστον Α φθάνομεν εἰς μίαν ἄλλην ἄγνωστον πρότασιν Β, κατόπιν ἀπὸ αὐτὴν τὴν πρότασιν Β εἰς μίαν τρίτην Γ, ἀπὸ ταύτην εἰς μίαν τετάρτην Δ κ.ο.κ., μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς μίαν γνωστὴν πρότασιν.

Μεταξὺ τῆς προτάσεως ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀνεχωρήσαμεν, καὶ τῆς προτάσεως εἰς τὴν ὁποίαν ἐφθάσαμεν, δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ οἱοσδήποτε ἀριθμὸς ἐνδιαμέσων προτάσεων.

14. Ἡ σύνθεσις. Ἡ σύνθεσις εἶναι ἡ μέθοδος διὰ τῆς ὁποίας μεταβαίνομεν ἀπὸ μίαν γνωστὴν πρότασιν Δ εἰς μίαν ἄλλην γνωστὴν Γ, ἀπὸ τὴν δευτέραν ταύτην Γ εἰς μίαν τρίτην Β, ἀπὸ ταύτην εἰς μίαν τετάρτην κ.ο.κ., μέχρις ὅτου φθάσωμεν οὕτω εἰς τὴν ἀρχικὴν πρότασιν Α, τὴν ὁποίαν ἐπρόκειτο νὰ μελετήσωμεν.

Ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἀκολουθοῦν ἀντιθέτους δρόμους: ἐνῷ ἡ πρώτη ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν πρὸς μελέτην πρότασιν, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς μίαν γνωστὴν πρότασιν, ἡ δευτέρα ἀναχωρεῖ ἀπὸ μίαν γνωστὴν πρότασιν διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πρὸς μελέτην πρότασιν.

15. Συμπέρασμα. Ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ πρὸς μελέτην ἄσκησις καὶ ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ μέθοδος ποὺ θὰ ἀκολουθήσωμεν, πρέπει αἱ προτάσεις νὰ προκύπτουν αἱ μὲν ἐκ τῶν δὲ μὲ ἀσφάλειαν, καθὼς ἐπίσης δύο διαδοχικαὶ προτάσεις πρέπει νὰ εἶναι, ἀπὸ λογικῆς ἀπόψεως, ἀντίστροφοι.

16. Προτάσεις ἀντίστροφοι. Δύο προτάσεις εἶναι, ἀπὸ λογικῆς ἀπόψεως, ἀντίστροφοι, ὅταν ἑκάστη τούτων καὶ ὅλαι αἱ συνέπειαί της εἶναι ἐπακόλουθον τῆς ἄλλης.

Παράδειγμα. Ὅταν αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας ἑνὸς ἄλλου, αἱ πλευραὶ τοῦ πρώτου τριγώνου εὑρίσκονται εἰς σταθερὸν λόγον μὲ τὰς ἀντιστοίχους τοῦ δευτέρου, τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει μὲ τὰ ἀντίστοιχα ὕψη κ.λ.π.

Ἀντιστρόφως, ἐκ τῆς ἀναλογίας τῶν πλευρῶν, προκύπτει ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν καὶ ὅλαι αἱ ἀπορρέουσαι ἰδιότητες.

Οὕτω, ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν δύο τριγώνων καὶ ἡ σταθερότης τῶν λόγων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, δίδουν γένεσιν εἰς δύο ἀντιστρόφους προτάσεις.

Ἡ ἰσότης τῶν πλευρῶν δύο τριγώνων καὶ ἡ ἰσότης τῶν ἀπέναντι γωνιῶν δὲν δίδουν γένεσιν, ἀπὸ λογικῆς ἀπόψεως, εἰς δύο προτάσεις ἀντιστρόφους· διότι ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν πλευρῶν προκύπτει βεβαίως ἡ ἰσότης τῶν ἀπέναντι γωνιῶν, ἀλλὰ ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν, δὲν προκύπτει ἡ ἰσότης τῶν πλευρῶν.

16 α. Σημείωσις. Εἰς τὴν παράγραφον 16 ἡ ἔκφρασις προτάσεις ἀντίστροφοι, δὲν ἔχει τὴν σημασίαν ἣν ἐσημειώσαμεν εἰς τὴν παράγραφον 4. Εἶναι λυπηρὸν ὅτι, οἱ ἴδιοι ὅροι ἐφαρμόζονται εἰς τὴν γεωμετρίαν μὲ δύο διαφορετικὰς σημασίας.

§ II. *Ταξινόμησις τῶν Γεωμετρικῶν Ἀσκήσεων καὶ Ἀπόδειξις τῶν θεωρημάτων διὰ τῆς ἀναλύσεως*

17. Ἀσκήσεις τῆς Γεωμετρίας. Αἱ ἀσκήσεις ἢ τὰ θέματα τῆς γεωμετρίας περιλαμβάνουν τὰ θεωρήματα, τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους καὶ τὰ προβλήματα.

Ἁρμόζει νὰ ἀσχοληθῶμεν ἐν πρώτοις μὲ τὰ θεωρήματα, καθόσον χρησιμεύουν ταῦτα διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων.

Ὁ προσδιορισμὸς τῶν γεωμετρικῶν τόπων θὰ ἐξετασθῇ κατόπιν, διότι ἡ χρῆσις αὐτῶν ἀποτελεῖ μίαν τῶν πλέον γονίμων μεθόδων διὰ τὴν λύσιν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων.

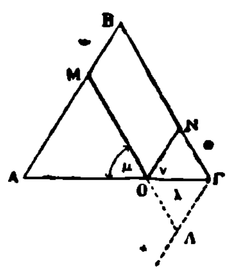
18. Χρῆσις τῆς ἀναλύσεως. Διὰ ν' ἀποδείξωμεν ἓν θεώρημα διὰ τῆς ἀναλύσεως, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἐκ τοῦ πρὸς ἀπόδειξιν θεωρήματος, θεωρουμένου ὡς ἀληθοῦς, συνάγομεν μίαν δευτέραν πρότασιν, ἐκ ταύτης ἐρχόμεθα εἰς μίαν τρίτην κ.ο.κ., μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς μίαν γνωστὴν πρότασιν. Ἀλλὰ πρέπει αἱ διαδοχικαὶ προτάσεις, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, νὰ εἶναι, ἀπὸ ἀπόψεως λογικῆς, ἀντίστροφοι.

Κατωτέρω δίδονται μερικὰ παραδείγματα θεωρημάτων ἀποδεικνυομένων διὰ τῆς ἀναλύσεως.

Θεώρημα

19. **Διὰ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἄγονται δύο παράλληλοι πρὸς τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ· δείξατε, ὅτι τὸ οὕτω πως σχηματισθὲν παραλληλόγραμμον, ἔχει σταθερὰν περίμετρον.**



Σχ. 3.

Ἔστωσαν ΟΜ, ΟΝ δύο παράλληλοι πρὸς τὰς ἴσας πλευρὰς ΓΒ, ΑΒ.

Πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου ΟΜΒΝ εἶναι σταθερά. Ἀρκεῖ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ἡμιπερίμετρος ΟΜ+ΟΝ εἶναι σταθερά.

1) Διὰ νὰ ἀναγνωρίσωμεν ὅτι αὐτὴ εἶναι σταθερά, πρέπει νὰ μεταφέρωμεν τὰ δύο ταῦτα εὐθύγραμμα τμήματα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, λαμβάνοντες ΟΛ=ΟΝ.

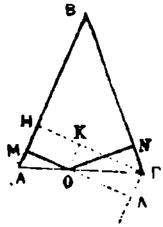
Αἱ γωνίαι λ καὶ μ εἶναι ἴσαι, ὡς κατὰ κορυφήν, αἱ μ καὶ ν ἐπίσης ἴσαι, ὡς ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Α καὶ Γ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΓΟΛ καὶ ΓΝΟ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην. Ἄρα ἡ γωνία ΟΓΛ=ΟΓΝ=Α καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ΓΛ, ΑΒ εἶναι παράλληλοι καὶ τὸ ΜΛΓΒ εἶναι ἓν παραλληλόγραμμον· συνεπῶς ΟΜ+ΟΝ=ΜΛ=ΒΓ, μῆκος σταθερόν.

2) Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν διαφορετικὰ τὸ ἄθροισμα ΟΜ+ΟΝ, πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον τῶν τμημάτων τοῦ τύπου τούτου, δι' ἄλλων ἴσων τμημάτων.

Οὕτω ΟΜ=ΒΝ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ ἑνὸς παραλληλογράμμου. Τὸ τρίγωνον ΟΝΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι γων. ν=Α=Γ, συνεπῶς ΟΝ=ΓΝ· ἄρα ΟΜ+ΟΝ=ΒΓ. Ποσότης σταθερά.

Θεώρημα

20. **Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ, εἶναι μία ποσότης σταθερά.**



Σχ. 4.

1) Μία ἀνάλυσις ἀνάλογος πρὸς τὴν προηγουμένην, μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ νὰ προεκτείνωμεν τὴν ΟΜ κατὰ μίαν ποσότητα ΟΛ, ἴσην πρὸς ΟΝ καὶ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΓΛ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ· συνεπῶς τὸ ἄθροισμα ΟΜ+ΟΝ εἶναι σταθερόν, διότι τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΛ. Οὕτω τὸ ΟΜ+ΟΝ ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος ΓΗ, ποσότητα σταθεράν.

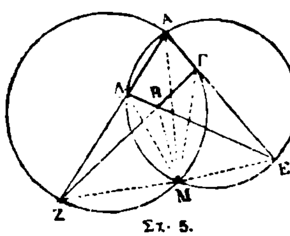
2) Ἂν φέρωμεν τὴν ΟΚ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ θὰ ἔχωμεν:

ΟΜ=ΗΚ, ΟΝ=ΓΚ

διότι τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΝΟ καὶ ΓΚΟ εἶναι ἴσα, ἄρα ΟΜ+ΟΝ=ΓΗ.

Θεώρημα τοῦ Miquet

21. **Τέσσαρες εὐθεῖαι, τεμνόμεναι ἀνὰ δύο, σχηματίζουν τέσσαρα τρίγωνα· αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τέσσαρα ταῦτα τρίγωνα, διέρχονται δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου.**



Σχ. 5.

Αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, τεμνόμεναι ἀνὰ δύο, δίδουν ἓξ κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Περιγράφομεν τὰς περιφερείας περὶ δύο ἐκ τῶν τεσσάρων τριγώνων, π.χ. περὶ τὰ ΑΓΖ καὶ ΑΔΕ· ἔστω Μ τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῶν περιφερειῶν τούτων καὶ ἃς ἑνώσωμεν αὐτὸ μὲ τὰς ἓξ κορυφάς· πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα ΒΔΖ, ΒΓΕ διέρχονται ὁμοίως διὰ τοῦ σημείου Μ.

Δεχόμενοι τοῦτο ὡς ἀληθές, ἀναγνωρίζομεν ὅτι πρέπει τὸ τετράπλευρον ΓΒΜΕ νὰ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ κατὰ συνέπειαν πρέπει ἡ γωνία ΒΓΜ νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ΒΕΜ, ἀλλὰ ἡ

ἰσότης τῶν δύο τούτων γωνιῶν πιστοποιεῖται ἀπ' εὐθείας. Πράγματι, γων. ΒΓΜ ἢ ΖΓΜ=ΖΑΜ, ὡς βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΖΜ· ἡ γωνία ΒΕΜ ἢ ΔΕΜ=ΔΑΜ ἢ ΖΑΜ, ὡς βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΔΜ. Ἄρα γων. ΒΓΜ=γων. ΒΕΜ.

Συνεπῶς, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΓΜ καὶ ΒΕΜ εἶναι ἴσαι, τὸ τετράπλευρον ΒΓΕΜ εἶναι ἐγγράψιμον, ἤτοι ἡ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον ΒΓΕ διέρχεται διὰ τοῦ Μ. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν περιφέρειαν τὴν περιγεγραμμένην περὶ τὸ τρίγωνον ΒΔΖ. Ἄρα...

Σημείωσις. Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν τεσσάρων, ὡς ἄνω, περιφερειῶν ἐκλήθη σημεῖον τοῦ Miquel, ὑπὸ τοῦ S. Kantor.

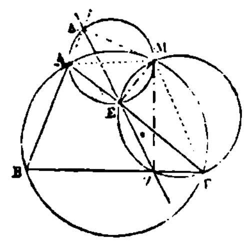
Θεώρημα τοῦ Simson

22. **Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου τῆς περιγεγραμμένης περὶ τρίγωνον περιφερείας, ἀχθοῦν αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, οἱ πόδες τῶν καθέτων τούτων κεῖνται ἐπ' εὐθείας.**

Τὸ θεώρημα τοῦτο διατυποῦται ἐνίοτε καὶ ὡς ἑξῆς:

Αἱ προβολαὶ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς περιγεγραμμένης περὶ τρίγωνον περιφερείας, ἐπὶ ἑκάστης τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τούτου, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιφερείας· φέρομεν τὰς καθέτους ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ ἐπὶ τὰς πλευράς· πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.



Σχ. 6.

Ἐὰν τὰ τμήματα ΔΕ καὶ ΕΖ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, αἱ γωνίαι ΑΕΔ καὶ ΓΕΖ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς κατὰ κορυφήν.

Τὰ τετράπλευρα ΑΔΜΕ καὶ ΓΖΕΜ εἶναι ἐγγράψιμα: τὸ πρῶτον, διότι αἱ ἀπέναντι γωνίαι Δ καὶ Ε εἶναι παραπληρωματικαί· τὸ δεύτερον, διότι τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΕΓ καὶ ΜΖΓ ἔχουν τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν ΜΓ. Ἄρα ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ΑΕΔ καὶ ΓΕΖ, προκύπτει ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν ΑΜΔ καὶ ΓΜΖ, ἀντιστοίχως ἴσων πρὸς τὰς προηγουμένας. Ἀρκεῖ λοιπὸν ν' ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ΑΜΔ καὶ ΓΜΖ, ἢ τὴν ἰσότητα τῶν συμπληρωματικῶν των, ΜΑΔ καὶ ΜΓΖ.

Ἀλλὰ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΜΑΔ, παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας ΜΑΒ, ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΜΑΒ, συνεπῶς ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν ΜΓΖ.

Ἄρα ἡ ὑπόθεσις ἡ ὁποία ἐχρησίμευσεν, εἰς τὴν ἀρχήν, ὡς ἀφετηρία τῶν συλλογισμῶν μας, εἶναι ἀληθὴς καὶ ἑπομένως τὰ τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

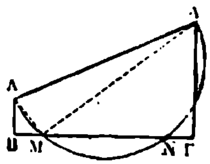
23. Παρατηρήσεις. 1) Αἱ διαδοχικαὶ προτάσεις τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποιήσαμεν εἰς τὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν, εἶναι προφανῶς ἀντίστροφοι (ἀπὸ ἀπόψεως λογικῆς), διότι πᾶσαι βασίζονται ἐπὶ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν· αἱ ἑπόμεναι ἀσκήσεις παρουσιάζουν μερικὰς νέας λεπτομερείας.

2) Ἡ εὐθεῖα ΔΕΖ, καλεῖται εὐθεῖα τοῦ Simson, διότι τὸ προηγούμενον θεώρημα ὀφείλεται εἰς τὸν R. Simson.

3) Ὁ περιγεγραμμένος κύκλος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Θεώρημα

24. Ὅταν ἡ ἡμιπεριφέρεια ἡ γραφομένη ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἑνὸς ὀρθογωνίου τραπεζίου, τέμνῃ τὴν ἀπέναντι πλευράν, πᾶν σημεῖον τομῆς διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι ταύτην πλευρὰν εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου.



Σχ. 7.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἡμιπεριφέρεια ἡ γραφομένη μὲ διάμετρον τὴν ΑΔ, τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΓ, εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν. Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι:

$$ΒΜ \,.\, ΜΓ = ΑΒ \,.\, ΓΔ \qquad (1)$$

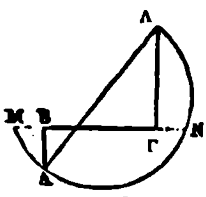
Δεχόμενοι αὐτὴν τὴν σχέσιν ἀληθῆ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\frac{ΒΜ}{ΑΒ} = \frac{ΓΔ}{ΜΓ} \qquad (2)$$

Ἀλλὰ τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜΒ καὶ ΜΓΔ θὰ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας τὴν ὁμοιότητα τῶν δύο τριγώνων.

Τοῦτο εἶναι φανερόν, καθόσον αἱ γωνίαι ΑΜΒ καὶ ΔΜΓ εἶναι συμπληρωματικαί, ἀφοῦ ἡ γωνία ΑΜΔ εἶναι ὀρθή, ἄρα ἡ γωνία ΑΜΒ=ΜΔΓ ὡς συμπληρωματικαὶ πρὸς τὴν γωνίαν ΔΜΓ.

Οὕτω τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἐξ οὗ προκύπτει ἡ ἀναλογία (2), ἐκ ταύτης δὲ ἡ σχέσις (1).



Σχ. 8.

Παρατηρήσεις. 1) Ἔχομεν ὁμοίως:

$$ΒΝ \,.\, ΝΓ = ΑΒ \,.\, ΓΔ.$$

2) Ἐὰν ἡ ἡμιπεριφέρεια ΑΔ ἐφάπτεται τῆς ΒΓ, τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς εἶναι τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς ΒΓ θὰ ἰσοῦται μὲ ΑΒ. ΓΔ.

3) Ὅταν ἡ ἡμιπεριφέρεια δὲν τέμνῃ τὴν ΒΓ, δὲν δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν τὴν ΒΓ εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον ΑΒ. ΓΔ.

4) Ὅταν αἱ κάθετοι ΑΒ καὶ ΓΔ διευθύνωνται ἀντιθέτως, ὡς εἰς τὸ σχ. 8, ἔχομεν πάντοτε τομήν, ἀλλὰ τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἔχομεν ὡς προηγουμένως:

$$ΒΜ \,.\, ΓΜ = ΑΒ \,.\, ΓΔ = ΒΝ \,.\, ΓΝ$$

Θεώρημα

25. Ἡ ἀπόστασις ΜΡ, τοῦ τυχόντος σημείου Μ μιᾶς περιφερείας ἀπὸ δοθεῖσαν χορδὴν ΑΒ, εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἀποστάσεων ΜΕ

καὶ ΜΖ τοῦ ἰδίου σημείου Μ ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας ΑΓ καὶ ΒΓ, τὰς ἀγομένας εἰς τὰ ἄκρα τῆς δοθείσης χορδῆς.

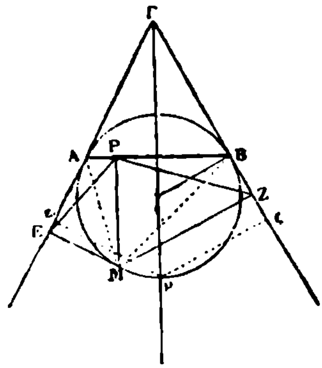
Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι:

$$MP^2 = ME \cdot MZ \qquad (1)$$

Ὑποθέσωμεν τὴν σχέσιν ταύτην ἀποδειχθεῖσαν, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\frac{ME}{MP} = \frac{MP}{MZ} \qquad (2)$$

Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ΕΜΡ καὶ ΡΜΖ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἴσας γωνίας εμΓ καὶ ζμΓ· συνεπῶς ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψει ἡ (2), εὑρίσκομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΜΡ καὶ ΡΜΖ εἶναι ὅμοια.



Σχ. 9.

Ὡς συμπέρασμα τῆς ὁμοιότητος ταύτης τῶν δύο τριγώνων, προκύπτει ὅτι ἡ γωνία ΜΡΕ=ΜΖΡ.

Ὅθεν, διὰ νὰ συναγάγωγεν ὅτι αἱ ἐνδιάμεσοι προτάσεις καὶ ἡ ἀρχικὴ εἶναι ἀληθεῖς, ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ΜΡΕ καὶ ΜΖΡ. Ἀλλὰ τὰ δύο τετράπλευρα ΑΡΜΕ καὶ ΒΖΜΡ εἶναι ἐγγράψιμα, διότι ἕκαστον τούτων ἔχει τὰς ἀπέναντι γωνίας παραπληρωματικάς, συνεπῶς αἱ γωνίαι ΜΡΕ καὶ ΜΑΕ εἶναι ἴσαι ὡς βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου τῆς περιφερείας ΑΡΜΕ.

Ὁμοίως, ἡ γωνία ΜΖΡ=ΜΒΡ. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ΜΑΕ καὶ ΜΒΡ βαίνουν ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΜ καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι, τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ μὲ τὰς γωνίας ΜΡΕ καὶ ΜΖΡ

Τὸ θεώρημα συνεπῶς ἀπεδείχθη καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$MP^2 = ME \cdot MZ.$$

26. Παρατήρησις. Εἰς τὸν ἀνωτέρω συλλογισμόν, δύο διαδοχικαὶ προτάσεις εἶναι πάντοτε ἀντίστροφοι.

Οὕτω, ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τῆς προερχομένης ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριῶν γωνιῶν των, προκύπτει:

$$\frac{ME}{MP} = \frac{MP}{MZ}$$

ὁμοίως, ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν λόγων αὐτῶν καὶ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν εἰς τὸ Μ, προκύπτει ὅτι ἡ γωνία ΜΡΕ=ΜΖΡ κλπ.

Θεώρημα

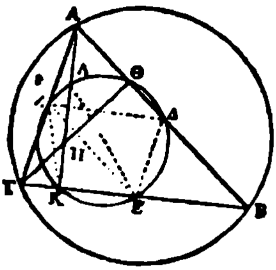
27. Κύκλος τῶν ἐννέα σημείων. **Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, οἱ πόδες τῶν ὑψῶν καὶ τὰ μέσα τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν τὰς κορυφὰς μὲ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ὑψῶν, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας κύκλου.**

Ἔστωσαν Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, ΑΚ καὶ ΓΘ δύο τῶν ὑψῶν καὶ Λ τὸ μέσον τῆς ΑΗ (*).

Περιγράφομεν μίαν περιφέρειαν περὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ περιφέρεια αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ ποδὸς Κ, ἑνὸς τῶν ὑψῶν καὶ διὰ τοῦ σημείου Λ.

1) Ἡ εὐθεῖα ΖΚ, ἡ ὁποία ἑνώνει τὴν κορυφὴν Κ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΓ μὲ τὸ μέσον Ζ τῆς ὑποτεινούσης του, ἰσοῦται, ὡς γνωστόν, μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ταύτης.



Σχ. 10.

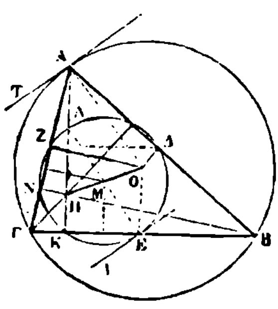
Ἄρα $ZK = Z\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} = \Delta E$.

Οὕτω τὸ τραπέζιον ΕΔΖΚ εἶναι ἰσοσκελές, συνεπῶς ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ τῶν Δ, Ε, Ζ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ Κ.

2) Ἡ εὐθεῖα ΖΛ, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΓΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΓΗ· ἐξ ἄλλου ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος ἐπίσης πρὸς τὴν ΑΒ, ἄρα ἡ γωνία $E Z \Lambda = \Delta \Theta \Gamma = \frac{\pi}{2}$.

Τὸ τετράπλευρον ΕΚΖΛ εἶναι ἐγγράψιμον, διότι αἱ γωνίαι ΕΚΛ καὶ ΕΖΛ εἶναι ὀρθαί, ἄρα ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ τῶν Ζ, Κ, Ε διέρχεται καὶ διὰ τοῦ σημείου Λ.

28. *Παρατηρήσεις.* 1) Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων, εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ἥτις συνδέει τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ὑψῶν (ὀρθόκεντρον), μὲ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου.



Σχ. 11.

Πράγματι, τὸ κέντρον τοῦτο εὑρίσκεται ἐπὶ τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων εἰς τὰ μέσα τῶν ΖΝ καὶ ΚΕ (σχ. 11), ἀλλὰ αἱ κάθεται αὗται διέρχονται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΟΗ.

Ἡ εὐθεῖα ΟΗ ἡ ὁποία περιέχει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων, καλεῖται εὐθεῖα τοῦ Euler· ὁ δὲ κύκλος τῶν ἐννέα σημείων, κύκλος τοῦ Euler.

2) Ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Διότι $EM = \frac{1}{2} E\Lambda = \frac{1}{2} AO$.

Τοῦτο προκύπτει ἐπίσης καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΕΟΜ καὶ ΑΟΗ.

3) Ἡ ἐφαπτομένη ΕΙ, τοῦ κύκλου τοῦ Euler, εἰς τὸ μέσον Ε

(*) Τὸ ἐν σχ. 10 γράμμα Π ἀνάγνωθι Η.

μιᾶς πλευρᾶς καὶ αὐτὴ αὕτη ἡ πλευρά, εἶναι ἀντιπαράλληλοι [1], ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ἀπέναντι γωνίας.

Αἱ ἐφαπτόμεναι ΕΙ καὶ ΑΤ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τῶν παραλλήλων ἀκτίνων ΜΕ καὶ ΟΑ, ἐπὶ πλέον γωνία ΓΑΤ=ΓΒΑ. Ἄρα ἡ ΑΤ καὶ ἡ ΒΓ ἢ ἡ ΕΙ καὶ ἡ ΒΓ εἶναι ἀντιπαράλληλοι, ὡς πρὸς τὴν γωνίαν Α.

29. Παρατηρήσεις. 1) Διὰ τῆς ἐμπεριστατωμένης χρήσεως τῆς ἀναλύσεως ἐπιτυγχάνεται ἀνακάλυψις τῶν ἁπλουστέρων σχέσεων, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ διάφορα μέρη μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς προτάσεως, καὶ διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν συνεπῶς τὸν καλύτερον τρόπον ἀποδείξεως.

2) Ἡ ἀνάλυσις εἶναι ἐπίσης πολὺ χρήσιμος, ὅταν πρόκειται περὶ θεωρημάτων ἀναφερομένων εἰς τὴν γεωμετρίαν τοῦ χώρου. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις αὐτὴ ἐπιτρέπει νὰ παραλείψωμεν τὸ σχῆμα ἢ τοὐλάχιστον ν' ἀντικαταστήσῃ κανεὶς ἓν πολύπλοκον σχῆμα μὲ μίαν ἁπλῆν κατασκευήν, πολὺ εὔκολον νὰ μελετηθῇ. Ἰδοὺ μερικὰ παραδείγματα:

Θεώρημα

30. **Δίδεται μία σφαῖρα καὶ ἓν σταθερὸν σημεῖον Ρ· ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἄγομεν τρία ἐπίπεδα κάθετα ἀνὰ δύο, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν σφαῖραν κατὰ τρεῖς κύκλους· δείξατε ὅτι, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν τῶν τριῶν τούτων κύκλων, εἶναι σταθερόν.**

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ ἀκτῖνες τῶν τριῶν τούτων κύκλων καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ α', β', γ', αἱ ἀποστάσεις τῶν ἐπιπέδων τῶν κύκλων ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι ἔχομεν:

$$\pi\alpha^2+\pi\beta^2+\pi\gamma^2=\text{σταθερόν}.$$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ὅτι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$σταθερόν, ἀλλὰ

$$\alpha^2=\rho^2-\alpha'^2,\quad \beta^2=\rho^2-\beta'^2,\quad \gamma^2=\rho^2-\gamma'^2$$

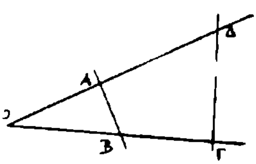
ἄρα
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3\rho^2-(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2).$$

Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀφαιρετέα ποσότης, εἶναι σταθερά.

Αἱ τρεῖς ὅμως ἀποστάσεις α', β', γ' κάθετοι πρὸς ἀλλήλας ἀνὰ δύο, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀχθῇ ἐκ τοῦ κέντρου Ο τῆς σφαίρας, ἐπὶ τὰ τρία κάθετα ἐπίπεδα, τὰ διερχόμενα διὰ τοῦ Ρ, εἶναι αἱ τρεῖς ἀκμαὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχοντος τὴν ΟΡ ὡς διαγώνιον, συνεπῶς, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκμῶν τούτων ἰσοῦται μὲ $ΟΡ^2$ καὶ τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη.

---

1. Σημ. μετ. Δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ καλοῦνται ἀντιπαράλληλοι, ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ΟΑΔ καὶ ΟΒΓ μιᾶς γωνίας ΓΟΔ, ὅταν ἡ γωνία ΑΒΟ ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν ΓΔΟ. Ἐὰν συμβαίνῃ τοῦτο, τότε καὶ γωνία ΒΑΟ=ΔΓΟ, τὸ δὲ τετράπλευρον ΑΒΓΔ θὰ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον,



31. Παρατήρησις. Ὁ προσδιορισμὸς τῆς τιμῆς τῆς σταθερᾶς, δὲν παρουσιάζει καμμίαν δυσκολίαν.

Οὕτω ἔχομεν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3\rho^2-OP^2$

ἐξ οὗ $\pi\alpha^2+\pi\beta^2+\pi\gamma^2=3\pi\rho^2-\pi OP^2$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν κύκλων, τῶν ὁριζομένων ἐπὶ τῆς σφαίρας Ο, ὑπὸ τυχόντος τρισορθογωνίου τριέδρου τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Ρ, ἰσοῦται μὲ τρεῖς μεγίστους κύκλους τῆς σφαίρας μεῖον τὸν κύκλον, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα τὴν ΟΡ.

Θεώρημα

32. Ὅταν αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ ἑνὸς ὀκταέδρου ἐγγεγραμμένου εἰς σφαῖραν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ τρεῖς διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἂν φέρωμεν ἓν ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον εἰς τὴν σφαῖραν ἀπὸ κάθε κορυφὴν τοῦ ὀκταέδρου, σχηματίζεται ἓν ἑξάεδρον περιγεγραμμένον, τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι λαμβανόμεναι ἀνὰ τέσσαρες, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1) Ἀφοῦ αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ δύο διαγώνιοι αἱ ὁποῖαι ἑνώνουν τὰ ἄκρα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τέμνονται, ὡς κείμεναι ἀνὰ δύο ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Αἱ τρεῖς διαγώνιοι τοῦ ὀκταέδρου δὲν δύνανται νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, διότι τότε αἱ ἓξ κορυφαὶ θὰ ἔκειντο εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ δὲν θὰ εἴχομεν, ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, στερεὸν σχῆμα. Ἄρα αἱ τρεῖς διαγώνιοι, ἀφοῦ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ τέμνονται ἀνὰ δύο, ὀφείλουν[2] νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

2) Αἱ τέσσαρες κορυφαί, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο τυχούσας διαγωνίους τοῦ ὀκταέδρου, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τὰ ἐπίπεδα τὰ ἐφαπτόμενα εἰς τὰ τέσσαρα ταῦτα σημεῖα, ὁρίζουν τέσσαρας διαδοχικὰς ἕδρας τοῦ περιγεγραμμένου ἑξαέδρου. Ἀλλὰ τὸ ἐπίπεδον τῶν τεσσάρων θεωρηθεισῶν κορυφῶν,

---

2. Σημ. μετ. Ὑπάρχουν εἰς τὴν γεωμετρίαν τοῦ χώρου τὰ ἑξῆς δύο ἀντίστροφα θεωρήματα:

Ἐὰν εἰς τὸν χῶρον, ν τὸ πλῆθος εὐθεῖαι τέμνωνται ἀνὰ δύο μεταξύ των, χωρὶς νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, θὰ διέρχωνται ὅλαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἐὰν εἰς τὸν χῶρον, ν τὸ πλῆθος εὐθεῖαι τέμνωνται ἀνὰ δύο μεταξύ των, χωρὶς νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, θὰ κεῖνται ὅλαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ πρότασιν. Ἔστωσαν α,β,γ,δ....ν, εὐθεῖαι τεμνόμεναι ἀνὰ δύο μεταξύ των καὶ μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Μία τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν, π.χ. ἡ γ δὲν θὰ εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου Π τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν δύο τεμνομένων εὐθειῶν α καὶ β· αὕτη θὰ ὁρίζῃ συνεπῶς μὲ ἑκάστην τῶν α καὶ β δύο ἐπίπεδα διαφορετικὰ τοῦ Π, τὰ $\Pi_1 \equiv (\alpha\gamma)$ καὶ $\Pi_2 \equiv (\beta\gamma)$. Συνεπῶς ἡ γ θὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο τομῆς τῶν α καὶ β. Ὅθεν καὶ πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα δ, συναντῶσα τὰς α, β, γ δὲν θὰ κεῖται συγχρόνως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π. Ἐὰν π.χ. ἡ δ δὲν εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν α καὶ γ θὰ πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν α καὶ γ, δηλαδὴ τοῦ Ο, ἄρα... Ἀντιστοίχως ἀποδεικνύεται τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ θεώρημα.

τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ ἕνα κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὡς ἡ καμπύλη ἐπαφῆς ἑνὸς κώνου περιγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν· ἀλλὰ τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τὰ ἀγόμενα ἐκ τῶν τεσσάρων, ὡς ἄνω, κορυφῶν, εἶναι συγχρόνως ἐφαπτόμενα πρὸς τὴν σφαῖραν καὶ πρὸς τὸν περιγεγραμμένον κῶνον. Ἄρα τὰ τέσσαρα ταῦτα ἐπίπεδα διέρχονται διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου καὶ συνεπῶς τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον.

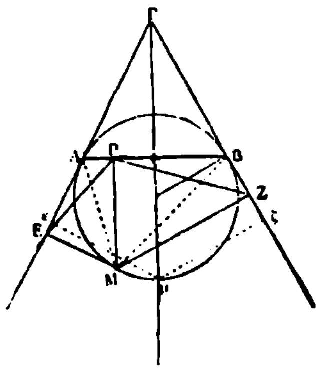
33. Σημείωσις. Αἱ ἓξ ἕδραι τοῦ ἑξαέδρου, λαμβανόμεναι ἀνὰ τέσσαρες δίδουν γένεσιν εἰς τρεῖς ὁμάδας και συνεπῶς εἰς τρία σημεῖα τομῆς. Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀκταέδρου, εἶναι ὁ πόλος τοῦ ἐπιπέδου τῶν τριῶν σημείων τομῆς τῶν ἑδρῶν τοῦ ἑξαέδρου [3].

§ III. Σύνθεσις καὶ εἰς ἄτοπον ἀπαγωγὴ

34. Χρῆσις τῆς συνθέσεως. Πρὸς ἀπόδειξιν ἑνὸς θεωρήματος διὰ τῆς συνθέσεως, ἀναχωροῦμεν ἐκ μιᾶς ἀληθείας γνωστῆς, ποριζόμεθα μίαν δευτέραν πρότασιν γνωστήν, ἐξ αὐτῆς μίαν τρίτην κ.ο.κ. ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς τὴν πρὸς ἀπόδειξιν πρότασιν.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν προτάσεων ἡ σύνθεσις ἀκολουθεῖ πορείαν ἀντίστροφον τῆς ἀναλύσεως.

Ἐφαρμόζομεν τὴν σύνθεσιν εἰς τὸ ἤδη δοθὲν (ἀριθ. 25) παράδειγμα.



Σχ. 12

Θεώρημα

35. Ἡ ἀπόστασις ΜΡ ἑνὸς τυχόντος σημείου Μ περιφερείας, ἀπὸ μιᾶς δοθείσης χορδῆς ΑΒ αὐτῆς εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἀποστάσεων ΜΕ, ΜΖ τοῦ ἰδίου σημείου Μ, ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας ΑΓ, ΒΓ, τὰς ἀγομένας εἰς τὰ πέρατα τῆς δοθείσης χορδῆς ΑΒ.

Τὸ τετράπλευρον ΑΡΜΕ εἶναι ἐγγράψιμον, διότι αἱ δύο ἀπέ-

---

3. Σημ. μετ. Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου καὶ Ο τυχοῦσα σφαῖρα, εἶναι δὲ Α καὶ Β τὰ σημεῖα τομῆς τῆς τυχούσης διὰ τοῦ Μ εὐθείας μετὰ τῆς σφαίρας, ληφθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ Μ τμῆμα ΜΜ΄ τοιοῦτον ὥστε

$$\frac{2}{(MM')} = \frac{1}{(MA)} + \frac{1}{(MB)}$$

ἔνθα (ΜΜ΄), (ΜΑ), (ΜΒ) ἀλγεβρικαὶ τιμαί, ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ΄ ὅταν ἡ ΜΜ΄ μεταβάλλεται διερχομένη πάντοτε διὰ τοῦ Μ, εἶναι ἓν ἐπίπεδον Π, ὅπερ καλεῖται πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ Μ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ Μ πόλος τοῦ ἐπιπέδου Π ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν.

Ἀντιστοίχως ὁρίζεται ὁ πόλος καὶ ἡ πολικὴ εὐθεῖα ὡς πρὸς κύκλον.

ναντι γωνίαι του εἶναι ὀρθαί, ἄρα ἡ γωνία ΜΡΕ=ΜΑΕ, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον.

Ἐπίσης ἡ γωνία ΜΖΡ=ΜΒΡ.

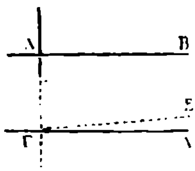
Ἐξ ἄλλου αἱ γωνίαι ΜΑΕ, ΜΒΡ εἶναι ἴσαι, ἄρα ἡ γωνία ΜΡΕ=ΜΖΡ καὶ ἐφόσον αἱ γων.ΕΜΡ, ΖΜΡ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς (εμΓ, Γμζ) προκύπτει, ὅτι τὰ τρίγωνα ΜΡΕ καὶ ΜΖΡ εἶναι ἰσογώνια καὶ ἑπομένως ὅμοια·

δηλαδὴ $$\frac{ΜΕ}{ΜΡ}=\frac{ΜΡ}{ΜΖ}$$ ἐξ οὗ $ΜΡ^2=ΜΕ.ΜΖ$.

36. Παρατήρησις. Ἀλλὰ πῶς ὁδηγεῖται κανεὶς εἰς τὸ νὰ ἐξετάσῃ τὸ τετράπλευρον ΑΡΜΕ; διατί ν' ἀσχοληθῇ μὲ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ΜΒΡ, ΜΑΕ... καὶ ἄλλας ἀναλόγους ἐρωτήσεις;

Οὐδεμία τελείως ἱκανοποιητικὴ ἀπάντησις δύναται νὰ δοθῇ, πράγματι ἡ ἔμφυτος ἱκανότης δὲν εἶναι παρὰ τὸ πόρισμα μιᾶς ταχείας ἀναλύσεως, κάποτε ἀσυνειδήτου, ἀλλὰ ἐν τούτοις πολὺ πραγματικῆς. Πρὸς ἀναζήτησιν τῆς ἀληθείας πρέπει λοιπὸν ν' ἀνατρέξῃ κανεὶς εἰς τὴν ἀνάλυσιν.

36. Ἀπαγωγὴ εἰς ἄτοπον. Ἡ ἀπόδειξις ἑνὸς θεωρήματος διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, συνίσταται εἰς τὸ νὰ δεχθῶμεν προσωρινῶς ὡς ἀληθῆ τὴν ἀντιφατικὴν πρότασιν τοῦ διατυπωθέντος θεωρήματος, καὶ κατόπιν τῇ βοηθείᾳ μιᾶς ἀκολουθίας συμπερασμάτων, νὰ φθάσωμεν εἰς ἓν συμπέρασμα, προφανῶς ἀντίθετον πρὸς τὰς γνωστὰς ἀληθείας.



Σχ. 13.

Παράδειγμα : Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ ἀκολούθου θεωρήματος.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἑκάστη εὐθεῖα κάθετος εἰς τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν ΑΒ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην εὐθεῖαν ΓΔ.

Παραδεχόμεθα ἢ μᾶλλον θεωροῦμεν ὡς ἀληθῆ τὴν ἀντιφατικὴν πρότασιν. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι, μία εὐθεῖα ΑΓ κάθετος ἐπὶ τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν ΑΒ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἄλλην ΓΔ.

Ἐπομένως, θὰ ἠδύνατο νὰ ὑψωθῇ μία κάθετος ΓΕ ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἀλλὰ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΕ θὰ ἦσαν παράλληλοι κατόπιν τοῦ γνωστοῦ θεωρήματος, θὰ προέκυπτε λοιπὸν ἐξ αὐτοῦ ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Γ θὰ ὑπῆρχαν δύο παράλληλοι, πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Ἀλλὰ τὸ πόρισμα αὐτὸ εἶναι προφανῶς ἀπαράδεκτον μετὰ τὸ 5ον αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου, πρέπει λοιπὸν ἡ ΓΔ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ.

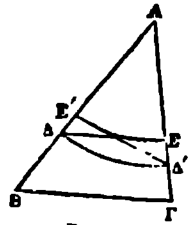
37. Παρατήρησις. Πρέπει νὰ ἔχῃ κανεὶς ὑπ' ὄψει του νὰ μελετᾷ τὰς διαφόρους περιπτώσεις, τὰς ὁποίας δύναται νὰ παρουσιάσῃ ἡ ἀντιφατικὴ πρότασις. Διότι ἄνευ αὐτοῦ ἐκ τοῦ ἀτόπου τῆς μιᾶς μόνον ἐξ αὐτῶν, δὲν θὰ ἠδύνατο νὰ συμπεράνῃ τὴν ἀλήθειαν τοῦ προτιθεμένου θεωρήματος.

Παράδειγμα : Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἑκάστη ἀγομένη παράλληλος ΔΕ, πρὸς τὴν βάσιν ἑνὸς τριγώνου, ὁρίζει ἓν δεύτερον τρίγωνον ΑΔΕ ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον, δηλαδὴ ὁρίζει ἓν τρίγωνον ἔχον τὴν αὐτὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς μετὰ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ὁποίου

αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὴν κοινὴν γωνίαν, εἶναι ἀντιστοίχως ἀνάλογοι.

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις θὰ ἦτο λανθασμένη, ἐὰν διετυπώνετο ὡς ἀκολούθως:

Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν γωνίαν κοινὴν περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν, αἱ βάσεις τῶν τριγώνων αὐτῶν εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 14.

Πράγματι, μία εὐθεῖα ὅπως ἡ Δ'Ε', ὅπου ἔχομεν λάβει ΑΔ'=ΑΔ, ΑΕ'=ΑΕ, δίδει δύο τρίγωνα ὅμοια ΑΔ'Ε', ΑΒΓ, τὰ ὁποῖα πληροῦν ὅλους τοὺς ὅρους τῆς διατυπωθείσης ἀνωτέρω προτάσεως, ἐν τούτοις ἡ Δ'Ε' δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι εἶναι ἀντιπαράλληλοι.

38. Χρῆσις τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Ἡ ἀπόδειξις διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ἐλέγχει, ἀλλὰ δὲν διαφωτίζει, ἀναγκάζει εἰς τὴν ἀναγνώρισιν τῆς ἀκριβείας τῆς διατυπωθείσης προτάσεως, ἐν τούτοις ἱκανοποιεῖ ἐλάχιστα τὸ πνεῦμα, διότι δὲν πραγματεύεται κατ' εὐθεῖαν τὸ ζητηθὲν θεώρημα· σήμερον σπανίως ἀνατρέχει κανεὶς εἰς αὐτὴν τὴν μέθοδον (Duhamel).

38 α. Σημείωσις. Ἡ μέθοδος διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὀφείλεται εἰς τὸν Εὐκλείδην, ἐχρησιμοποιήθη συχνὰ ὑπὸ τοῦ Légendre.

§ IV. Προβλήματα γραφικά

39. Ἀνάλυσις. Πρὸς λύσιν ἑνὸς γραφικοῦ προβλήματος διὰ τῆς ἀναλύσεως, τὸ ὑποθέτομεν λελυμένον, κατόπιν θεωροῦμεν τὰς σχέσεις τῶν δοθέντων καὶ τῶν ἀγνώστων, καὶ ἐξ αὐτῶν ποριζόμεθα συμπεράσματα, μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς γνωστὰ ἀποτελέσματα.

Ὀφείλομεν νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει μας, ὅτι αἱ ποριζόμεναι προτάσεις μεταξύ των πρέπει νὰ εἶναι ἀντίστροφοι ἀπὸ λογικῆς ἀπόψεως· ἄνευ τούτου εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποσιωπηθοῦν ἢ νὰ παραλειφθοῦν λύσεις ἢ νὰ εἰσαχθοῦν ξέναι εἰς τὴν προτιθεμένην ἐρώτησιν.

40. Σύνθεσις. Πρὸς λύσιν ἑνὸς γραφικοῦ προβλήματος διὰ τῆς συνθέσεως, ὑποδεικνύομεν ἀμέσως τὰς πρὸς ἐκτέλεσιν κατασκευάς, διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ζητούμενον ἀποτέλεσμα. Καὶ δικαιολογοῦμεν διαδοχικῶς τὰς οὕτω πραγματοποιουμένας κατασκευάς.

Θὰ ἐφαρμόσωμεν διαδοχικῶς τὴν ἀνάλυσιν καὶ σύνθεσιν εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πρόβλημα.

Πρόβλημα

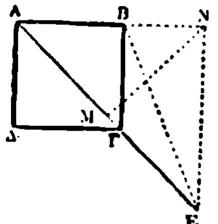
41. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον τοῦ ὁποίου δίδεται τὸ ἄθροισμα λ, τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς.

1) *Ἀνάλυσις.* Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τετράγωνον. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, τὴν προεκτείνομεν καὶ λαμβάνομεν μῆκος ΓΕ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ, θὰ ἔχωμεν ΑΕ=λ.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΒΕ, διαπιστοῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι ἰσο-

σκελές. Ἡ γωνία ΒΓΑ, ἐξωτερικὴ αὐτοῦ τοῦ τριγώνου, εἶναι ἴση πρὸς $\frac{\pi}{4}$, ἑκάστη λοιπὸν τῶν γωνιῶν Β καὶ Ε τοῦ τριγώνου ΒΓΕ ἰσοῦται μὲ $\frac{\pi}{8}$.

Οὕτω εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι γνωστὴ ἡ βάσις ΑΕ καὶ αἱ προσκείμεναι γωνίαι Α καὶ Ε.



Σχ. 15.

Δύναται λοιπὸν νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον καὶ ἡ μικρὰ πλευρὰ ΑΒ, θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Ἡ πλέον πρακτικὴ σειρὰ δι' αὐτὰς τὰς κατασκευάς, εἶναι ἐκείνη τὴν ὁποίαν θὰ ὑποδείξωμεν εἰς τὴν σύνθεσιν.

2) *Σύνθεσις*. Εἰς τὸ μέσον μιᾶς εὐθείας ΑΕ ἴσης πρὸς τὸ δοθὲν μῆκος λ, ὑψώνομεν κάθετον. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς καθέτου τμῆμα ΜΝ=ΜΑ. Φέρομεν τὰς ΝΑ καὶ ΝΕ. Ἄγομεν τὴν διχοτόμον ΕΒ τῆς γωνίας Ε κατόπιν τὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τέλος τὰς ΑΔ καὶ ΓΔ αἱ ὁποῖαι συμπληρώνουν τὸ τετράγωνον.

Πράγματι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Β εἶναι ὀρθή, ἡ γωνία Α ἴση πρὸς $\frac{\pi}{4}$ καὶ συνεπῶς ἡ $\Gamma = \frac{\pi}{4}$, ἄρα ΒΓ=ΑΒ.

Ἡ γωνία $ΑΕΝ = \frac{\pi}{4}$, ἄρα $ΑΕΒ = \frac{\pi}{8}$.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, ἡ γωνία Β ἰσοῦται μὲ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν Γ, μεῖον τὴν ἐσωτερικὴν Ε,

$$\text{ἤτοι γων.}\, B = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι ἰσοσκελές, ΓΕ=ΓΒ ἢ ΑΒ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΕ ἢ λ, ἴση πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ, πλέον τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς.

Παρατήρησις. Θὰ δώσωμεν μερικὰ ἄλλα παραδείγματα λύσεως προβλημάτων, ἀλλὰ περιοριζόμενοι εἰς τὸ νὰ τὰ ἐξετάσωμεν μόνον διὰ τῆς ἀναλύσεως.

Πρόβλημα

42. Νὰ διαιρεθῇ τόξον κύκλου εἰς δύο μέρη, εἰς τρόπον ὥστε αἱ χορδαὶ τῶν τόξων τῶν οὕτω ὁριζομένων, νὰ ἔχουν δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἔστω ΑΓΒ τὸ δοθὲν τόξον. Ὑποθέτομεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ παραδεχόμεθα ὅτι ἔχομεν

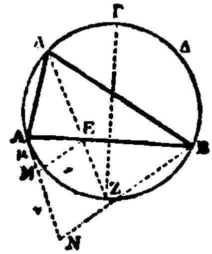
$$\frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος, ἀρκεῖ νὰ κάμωμεν χρῆσιν τοῦ θεωρήματος τῆς διχοτόμου, διότι γνωρίζομεν ὅτι ἡ βάσις χωρίζεται εἰς τμήματα ἀνάλογα τῶν πλευρῶν.

Ἔχομεν λοιπὸν $\frac{ΑΕ}{ΒΕ} = \frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{\mu}{\nu}$.

Δυνάμεθα ἐξ αὐτοῦ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον Ε, διότι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Δ ὀφείλει νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου ΑΖΒ. Ἀγόμεθα λοιπὸν εἰς τὴν κατωτέρω κατασκευήν.

Κατασκευή. Ἐπὶ μιᾶς τυχούσης εὐθείας ἀγομένης διὰ τοῦ σημείου Α, λαμβάνομεν ΑΜ=μ καὶ ΜΝ=ν. Συνδέομεν τὸ Β μὲ τὸ Ν. Διὰ τοῦ Μ φέρομεν τὴν ΜΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΜΒ καὶ ἑνοῦμεν τὸ μέσον Ζ τοῦ τόξου μετὰ τοῦ σημείου Ε. Ἡ εὐθεῖα ΖΕΔ ὁρίζει τὸ σημεῖον Δ.



Σχ. 16.

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον Δ΄ συμμετρικὸν τοῦ Δ, ὡς πρὸς τὴν διάμετρον ΓΖ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν σχέσιν

$$\frac{ΒΔ}{ΑΔ'}=\frac{μ}{ν}.$$

Πρόβλημα

43. **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευραὶ καὶ ἡ διχοτόμος τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας.**

Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, αἱ πλευραὶ ΒΓ, ΒΑ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰ δοθέντα μήκη α, γ, καὶ ἡ διχοτόμος ΒΔ ἴση πρὸς ἄλλο δοθὲν μῆκος β.

Φέροντες παράλληλον ΑΕ πρὸς τὴν διχοτόμον σχηματίζομεν ἓν τρίγωνον ἰσοσκελὲς ΑΒΕ, τοῦ ὁποίου δύναται νὰ ὁρισθῇ ἡ βάσις.

Πράγματι τὰ ὅμοια τρίγωνα ΓΑΕ, ΓΔΒ δίδουν τὴν σχέσιν

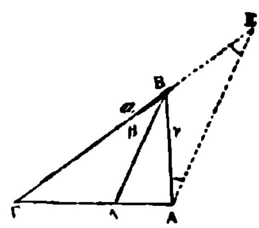
$$\frac{ΑΕ}{β}=\frac{ΓΕ}{α} \quad ἢ \quad \frac{ΑΕ}{β}=\frac{α+γ}{α}, \quad διότι\ ΒΕ=γ$$

ἐξ οὗ

$$ΑΕ=\frac{β(α+γ)}{α}.$$

Οὕτω μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μήκους ΑΕ διὰ τῆς τετάρτης ἀναλόγου, ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΕ, ἔχον ὡς βάσιν ΑΕ καὶ γ ὡς μῆκος τῶν ἴσων πλευρῶν.

Διὰ τῆς κορυφῆς Β τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἄγομεν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, λαμβάνομεν ΒΔ=β καὶ ἄγομεν τὰς εὐθείας ΕΒ καὶ ΑΔ ἕως ὅτου συναντηθοῦν.



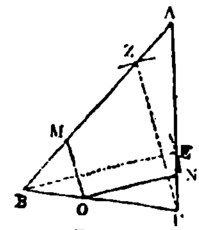
Σχ. 17.

Πρόβλημα

44. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ ἔχοντος τρεῖς ἀνίσους πλευράς, ζητοῦνται ν' ἀχθοῦν εὐθεῖαι ΟΜ, ΟΝ διὰ τυχόντος σημείου τῆς βάσεως, εἰς τρόπον ὥστε τὰ τμήματα τῶν εὐθειῶν ΟΜ, ΟΝ, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν πλευρῶν, νὰ ἔχουν ἄθροισμα ἓν μῆκος δοθὲν λ καὶ δι' ἕκαστον ἄλλο σημεῖον τῆς βάσεως, αἱ ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς ΟΜ καὶ ΟΝ, νὰ ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα λ.

Δεχόμεθα τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ὅτι ΟΜ + ΟΝ = λ.

Ἐφ' ὅσον τὸ ἄθροισμα ὀφείλει νὰ εἶναι σταθερὸν διὰ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως πρέπει ἡ ΒΕ, παράλληλος πρὸς τὴν ΟΝ, νὰ ἰσοῦται μὲ λ, διότι διὰ τοῦ σημείου Β ἡ ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΟΝ εἶναι μηδέν.



Σχ. 18.

Ἐπίσης ἡ ΓΖ ἀγομένη παραλλήλως πρὸς τὴν ΟΜ ὀφείλει νὰ ἰσοῦται μὲ λ. Ἀγόμεθα λοιπὸν εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Β καὶ ἀκτῖνα λ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε, μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα καὶ μὲ κέντρον τὸ Γ ὁρίζομεν τὸ Ζ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Κατόπιν ἐκ τυχόντος σημείου τῆς βάσεως Ο, φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ΒΕ, ΓΖ.

Ἀρκεῖ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ΟΜ+ΟΝ=λ· πράγματι τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΓΝ, ΒΓΕ δίδουν:

$$\frac{ON}{\lambda} = \frac{O\Gamma}{B\Gamma}, \quad \text{ἐξ οὗ} \quad ON = \lambda \frac{O\Gamma}{B\Gamma}.$$

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΒΜ, ΓΒΖ δίδουν ἐπίσης·

$$OM = \lambda \frac{OB}{B\Gamma}.$$

Ἐπομένως $OM+ON=\lambda \frac{OB+O\Gamma}{B\Gamma} = \lambda.$

45. *Παρατήρησις.* Εἰς τὰ προηγούμενα προβλήματα, ἡ ὑπόμνησις ἑνὸς μόνου θεωρήματος μᾶς ὡδήγησε εἰς τὴν λύσιν. Ἀλλὰ δὲν συμβαίνει οὕτω διὰ τὸ πλεῖστον τῶν προβλημάτων· εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως:

Ἀναζητοῦμεν ν' ἀναγάγωμεν τὸ προτιθέμενον πρόβλημα εἰς ἕνα πλέον ἁπλοῦν, κατόπιν αὐτὸ τὸ δεύτερον εἰς ἕνα τρίτον ἀκόμη ἁπλούστερον κ.ο.κ., μέχρις ὅτου φθάσομεν εἰς μίαν πρότασιν γνωστὴν ἢ τουλάχιστον εἰς πρόβλημα δυνάμενον νὰ λυθῇ ἀμέσως.

Ἰδοὺ μερικὰ παραδείγματα.

Πρόβλημα

46. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τριῶν δοθεισῶν περιφερειῶν Α, Β, Γ.

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ ἀντίστοιχοι ἀκτῖνες τῶν ἄνω περιφερειῶν καὶ Δ τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

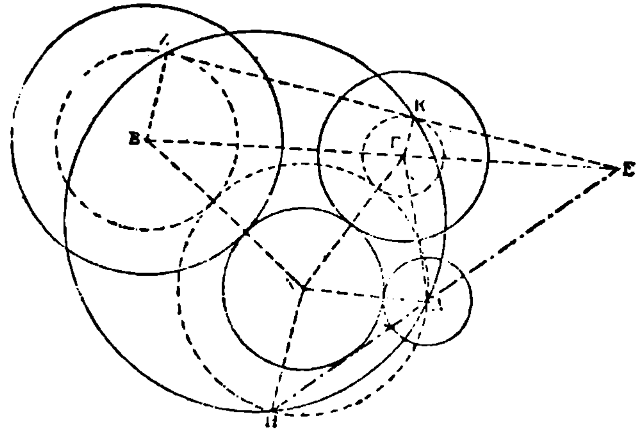
Γράφοντες μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον Δ καὶ μὲ ἀκτῖνα ΑΔ, διαπιστοῦμεν ὅτι θὰ εἶναι ἐφαπτομένη περιφερείας γραφομένης μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα β—α καὶ ἐκείνης ἥτις γράφεται μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα γ—α. Ἄρα τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἀκόλουθον.

Πρόβλημα

47. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ σημείου καὶ ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν ΒΖ, ΓΚ (Σχ. 19).

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον, φέρομεν τὴν κοινὴν ἐφα-

πτομένην ΕΚΖ καὶ ἑνοῦμεν τὸ κέντρον Ε μὲ τὸ σημεῖον Α, ἀναγνωρίζομεν ὅτι ΕΑ.ΕΗ=ΕΖ.ΕΚ. Ἄρα πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ σημείου Η ἀρκεῖ νὰ γραφῇ μία περιφέρεια διὰ τῶν σημείων ΑΖΚ.



Σχ. 19.

Ἐπειδὴ τώρα ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ὀφείλει νὰ διέρχεται διὰ δύο γνωστῶν σημείων Α, Η τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἀκόλουθον.

Πρόβλημα

48. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων Α, Η καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας.

Τὸ τρίτον τοῦτο πρόβλημα, ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς: Νὰ γραφῇ εριφέρεια διερχομένη διὰ τριῶν σημείων.

49. *Παρατήρησις*. Ἡ ὑποδειχθεῖσα πορεία εἶναι ἐντελῶς ἀναλυτική, ἀλλὰ ἐπειδὴ αἱ διαδοχικαὶ προτάσεις δὲν εἶναι ἀντίστροφοι μεταξύ των, πρέπει νὰ μελετηθῇ ἑκάστη μετὰ προσοχῆς, ἵνα μὴ παραληφθοῦν μερικαὶ λύσεις. Οὕτω τὸ τέταρτον πρόβλημα, νὰ γραφῇ περιφέρεια διὰ τριῶν σημείων, δὲν ἔχει παρὰ μίαν μόνον λύσιν. Τὸ τρίτον, νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας ἔχει δύο· τὸ δεύτερον, νὰ γραφῇ περιφέρεια διὰ σημείου καὶ ἐφαπτομένη δύο ἄλλων περιφερειῶν, ἔχει τέσσαρας, καὶ τὸ πρῶτον νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τριῶν ἄλλων περιφερειῶν, ἔχει ὀκτὼ λύσεις.
Ἡ συνθετικὴ μέθοδος ἐκθέτει πρῶτον τὸ ἁπλούστερον πρόβλημα. Εἰς τὸ ἀναφερθὲν παράδειγμα εἶναι τὸ τέταρτον πρόβλημα, κατόπιν ἐρχόμεθα διαδοχικῶς εἰς τὸ τρίτον, τὸ δεύτερον καὶ τὸ πρῶτον.

Πρόβλημα

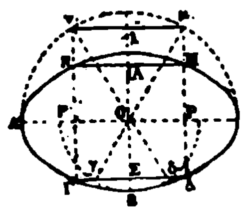
50. Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις ΟΛ τοῦ κέντρου Ο ἐλλείψεως [1] ἀπὸ χορ-

---

1. Σημ. μετ. Ἔλλειψις καλεῖται ἡ καμπύλη τῆς ὁποίας πᾶν σημεῖον Μ ἀπέχει ἀπὸ δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β ἀποστάσεις τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ΑΜ+ΒΜ εἶναι σταθερόν.

δῆς ΜΝ παραλλήλου πρὸς ΑΑ' καὶ τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ μεγάλου ἄξονος αὐτῆς;

1) Θεωροῦμεν τὸν πρωτεύοντα κύκλον τῆς ἐλλείψεως, καὶ τὴν ἀντίστοιχον χορδὴν μν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα α τοῦ κύκλου· ἑνοῦντες τὰ ἄκρα της μὲ τὸ κέντρον, σχηματίζομεν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον νΟμ. Τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι ἴσον πρὸς $\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}$. Ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ἔχει λόγον ὡς πρὸς τὸ ὕψος ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν δύο ἀξόνων $\frac{\alpha}{\beta}$. Ἄρα ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως ἀπὸ τῆς χορδῆς αὐτῆς ἰσοῦται:



Σχ. 10

$$\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{2}\sqrt{3} = \frac{\beta}{2}\sqrt{3}.$$

2) Δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν ταχύτερον εἰς τὸ ἀποτέλεσματα αὐτό. Γράφομεν κύκλον ἐπὶ τοῦ δευτερεύοντὸς ἄξονος. Ἡ ἡμιχορδὴ $\frac{\alpha}{2}$ εἶναι ἡ τετμημένη ΔΕ, ἑνὸς σημείου Δ. Διὰ τὸν δευτερεύοντα κύκλον, τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου χορδῆς δΕ $= \frac{\beta}{2}$. Ἀλλὰ δγ $= \beta$ εἶναι ἡ βάσις ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἄρα ΟΕ $= \frac{\beta}{2}\sqrt{3}$.

3) Ὁ γενικὸς τρόπος πρὸς λύσιν αὐτῶν τῶν προβλημάτων, εἶναι νὰ μεταχειριζόμεθα τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης (ἐλλείψεως) $\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = \alpha^2\beta^2$.

Ἀντικαθιστῶντες τὸ x διὰ ΜΛ ἢ $\frac{\alpha}{2}$, ἐξ οὗ $x^2 = \frac{\alpha}{4}$, λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$$\alpha^2 y^2 + \frac{\beta^2\alpha^2}{4} = \alpha^2\beta^2,$$

$$y^2 + \frac{\beta^2}{4} + \beta^2, \quad y^2 = \frac{3\beta^2}{4}, \quad \text{ἐξ οὗ } y = \frac{\beta}{2}\sqrt{3}.$$

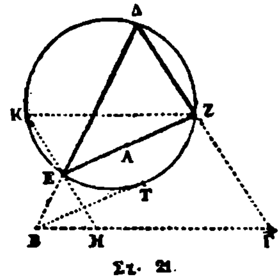
Πρόβλημα (Castillon).

51. **Δίδονται τρία σημεῖα Α,Β,Γ καὶ μιὰ περιφέρεια, νὰ ἐγγραφῇ εἰς αὐτὴν τρίγωνον Δ,Ε,Ζ, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ νὰ διέρχεται δι' ἑνὸς τῶν δοθέντων σημείων.**

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΔΕΖ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Ἀρκεῖ μία μόνον κορυφὴ νὰ προσδιορισθῇ. Διὰ νὰ προκύψουν εὐκόλως μερικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν δεδομένων καὶ τῶν ἀγνώστων, φέρομεν τὴν ΖΚ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τὴν ΚΕΗ. Αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι Δ,Κ εἶναι ἴσαι, ἄρα ἡ γωνία ΕΗΒ $=$ Δ· τὰ τρίγωνα ΒΗΕ, ΒΔΓ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν μίαν

γωνίαν Β κοινήνκαὶ μίαν γωνίαν Η ἴσην πρὸς τὴν Δ, ἔχομεν κατὰ συνέπειαν :

$$\frac{ΒΗ}{ΒΔ}=\frac{ΒΕ}{ΓΔ}, \text{ ἐξ' οὗ } ΒΗ=\frac{ΒΔ\,.\,ΒΕ}{ΒΓ}.$$



Σχ. 21.

Τὰ μήκη ΒΕ καὶ ΒΔ δὲν εἶναι γνωστά, ἀλλὰ τὸ γινόμενόν τους ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης ΒΤ, ἐξ' οὗ $ΒΗ=\frac{ΒΤ^2}{ΒΓ}$.

Οὕτω τὸ σημεῖον Η δύναται νὰ προσδιορισθῇ και νὰ λυθῇ τὸ προτιθέμενον πρόβλημα, ἐὰν δυνηθῶμεν νὰ προσδιορίσωμεν σημεῖον Ε, τοιοῦτον ὥστε συνδέοντες αὐτὸ μετὰ τῶν σημείων Α καὶ Η, ἡ χορδὴ ΚΖ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ Ἀγόμεθα λοιπὸν εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἀκολούθου προβλήματος.

Πρόβλημα

52. Δίδονται δύο σημεῖα Α. Η, μία περιφέρεια καὶ μία εὐθεῖα. Νὰ ὁρισθῇ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας ἓν σημεῖον Ε, τοιοῦτον ὥστε ἑνοῦντες αὐτὸ μετὰ τῶν δύο δοθέντων σημείων Α, Η, ἡ χορδὴ ΖΚ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ.

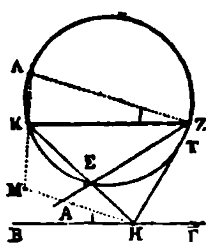
Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΖΚ παράλληλος πρὸς ΒΓ.

Ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, φέρομεν τὴν ΖΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΗ, κατόπιν τὴν εὐθεῖαν ΛΚΜ καὶ προσδιορίζωμεν τὴν θέσιν τοῦ σημείου Μ. Τὰ τρίγωνα ΜΚΗ, ΕΑΗ εἶναι ὅμοια.

Πράγματι ἡ γωνία Η εἶναι κοινὴ καὶ ἡ γωνία Μ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Ε, διότι αἱ δύο αὐταὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ τῆς αὐτῆς γωνίας Λ.

Ἔχομεν λοιπόν : $\frac{ΗΜ}{ΗΕ}=\frac{ΗΚ}{ΗΑ}$,

ἐξ οὗ $ΗΜ \quad \frac{ΗΕ\,.\,ΗΚ}{ΑΗ} \quad \frac{ΗΤ^2}{ΑΗ}$.



Σχ. 22.

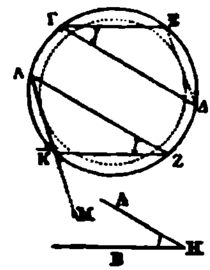
Οὕτω εἶναι γνωστὴ ἡ θέσις τοῦ σημείου Μ· ἐξ ἄλλου ἡ γωνία ΛΖΚ = ΑΗΒ, ἥτις εἶναι ἡ δοθεῖσα, ἀρκεῖ λοιπὸν ν' ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Μ ἡ τέμνουσα ΜΚΛ τοιαύτη ὥστε ἡ ἀντίστοιχος ἐγγεγγραμμένη γωνία ΛΖΚ, νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν σχηματιζομένην ἐκ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ΑΗ καὶ ΒΓ.

Ἡ πλήρης λύσις τοῦ προβληματος (ἀριθ. 51), δὲν ἀπαιτεῖ πλέον παρὰ τὴν λύσιν τῆς πολὺ ἁπλῆς κατωτέρω ἀσκήσεως.

Πρόβλημα

53. Διὰ δοθέντος σημείου Μ. ν' ἀχθῇ τέμνουσα τοιαύτη ὥστε ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΚΖΛ, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τόξον ΚΛ. ἰσοῦται πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν ΑΗΒ.

Ὅλαι αἱ ἴσαι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσα τόξα καὶ ἐπομένως εἰς ἴσας χορδάς. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἐγγραφῇ γωνία Γ ἴση πρὸς τὴν Η, ν' ἀχθῇ περιφέρεια ὁμόκεντρος τῆς πρώτης καὶ ἐφαπτομένη εἰς τὴν χορδὴν ΔΕ, κατόπιν διὰ τοῦ σημείου Μ ν' ἀχθῇ εἰς τὴν δευτέραν περιφέρειαν ἐφαπτομένην ΜΚΛ. Ἑκάστη ἐγγεγραμμένη γωνία, ὅπως ἡ Ζ, θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν Η.



Σχ. [illegible]

Συμπέρασμα

54. Ἡ *σύνθεσις* μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐκθέσωμεν τὴν ἀπόδειξιν ἑνὸς γνωστοῦ θεωρήματος· συνήθως χρησιμοποιεῖται εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας πρὸς ἀπόδειξιν τῶν θεωρημάτων· ἀλλὰ ἡ σύνθεσις δὲν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων, διότι τίποτε δὲν δεικνύει ἐκ τῶν προτέρων τὰς μελλούσας νὰ γίνουν κατασκευάς.

Ἡ *ἀνάλυσις* εἶναι ἡ κατ' ἐξοχὴν μέθοδος πρὸς ἀποκάλυψιν τῆς ἀληθείας· κατ' ἀκολουθίαν τὴν χρησιμοποιοῦμεν πάντοτε εἰς τὰς λύσεις προβλημάτων τὰς ὁποίας δὲν ἔχομεν μελετήσῃ.

Εἰδικαὶ μέθοδοι

55. Πρὸς διευκόλυνσιν τῆς ἀποδείξεως τῶν θεωρηματων καὶ τῆς λύσεως γραφικῶν προβλημάτων, εἶναι χρήσιμον νὰ διατυπωθοῦν πολλαὶ εἰδικαὶ μέθοδοι, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται πραγματικῶς εἰς τὴν ἀνάλυσιν. Ἡ κατάταξις τῶν εἰδικῶν μεθόδων, δὲν ἔχει τίποτε τὸ ἀπόλυτον, διότι ἕνας μεγάλος ἀριθμὸς ἀσκήσεων θὰ ἠδύνατο νὰ ἀναφερθῇ εἰς πολλὰς ἐξ αὐτῶν τῶν μεθόδων.

Ἐπίσης συχνά, ἡ ἀπόδειξις ἢ ἡ λύσις ἑνὸς προτιθεμένου θεωρήματος, δύναται ν' ἀπαιτεῖ τὴν σύγχρονον χρῆσιν πολλῶν ἐκ τῶν εἰδικῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας πρόκειται νὰ ὑποδείξωμεν. Πρέπει πάντοτε νὰ λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν μας, τὴν ἀκόλουθον παρατήρησιν:

Πρέπει εἰς ἑκάστην περίπτωσιν νὰ μεταχειριζόμεθα τὴν μέθοδον, ἥτις ἄγει ἀμέσως καὶ εὐκολώτερον εἰς τὸν σκοπόν, ἀλλὰ πάντοτε φυλάττοντες τὴν ἄκαμπτον λογικὴν αὐστηρότητα, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ψυχὴ τῆς ἐπιστήμης. (Terquem, Nouvelles Annales mathématiques, 1852, p. 447).

II

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

§ I. Ἔρευνα τῶν γεωμετρικῶν τόπων

56. *Ὁρισμός*. Καλοῦμεν γεωμετρικὸν τόπον, τὸ σύνολον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ὑπόκεινται εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἰδιότητα.

Τὰ Στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας ἐξετάζουν ἕνα ἀρκετὰ μεγάλον ἀριθμὸν γεωμετρικῶν τόπων οὕτω :

Ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη εἰς τὸ μέσον εὐθυγράμμου τμήματος, εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἐξ ἴσου ἐκ τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος. Ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἐξ ἴσου, ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης.

Αἱ παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθείαν καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς, εἰς ἀπόστασιν α ἀπ' αὐτήν, εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ἀπόστασιν α.

Αἱ ὁμόκεντροι περιφέρειαι ἀκτίνων ρ+α καὶ ρ—α, πρὸς δοθεῖσαν περιφέρειαν ἀκτῖνος ρ, εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἀπὸ τῆς δοθείσης περιφερείας ἀπόστασιν α.

Ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου τῶν ἀπεχόντων δοθὲν μῆκος ἀπὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἢ σφαῖραν, εἶναι δύο παράλληλα ἐπίπεδα πρὸς τὸ πρῶτον ἢ δύο σφαῖραι ὁμόκεντροι εἰς τὴν δευτέραν.

57. *Προσδιορισμὸς τοῦ τόπου*. Διὰ ν' ἀναγνωρίσωμεν τὴν φύσιν τοῦ τόπου τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ὑπόκεινται εἰς μίαν δοθεῖσαν ἰδιότητα καὶ διὰ ν' ἀναγνωρίσωμεν τὴν θέσιν αὐτοῦ τοῦ τόπου ἐν σχέσει πρὸς δοθέντα μεγέθη, θεωροῦμεν μερικὰ εἰδικὰ σημεῖα τοῦ τόπου καὶ ἀναζητοῦμεν ποία εἶναι ἡ γραμμή, ἡ ὁποία δύναται νὰ διέλθῃ διὰ τῶν εὑρεθέντων τούτων σημείων, κατόπιν τῶν ἀκολούθως ἀναγραφομμένων δύο τρόπων.

Πρῶτος τρόπος. 1) Ἀποδεικνύομεν ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς, ὑπόκεινται εἰς τὴν ζητουμένην ἰδιότητα.

2) Δεικνύομεν ὅτι πᾶν σημεῖον λαμβανόμενον ἐκτὸς τῆς θεωρηθείσης γραμμῆς, δὲν ἔχει τὴν ζητουμένην ἰδιότητα.

Δεύτερος τρόπος. 1) Ἀποδεικνύομεν ὅτι τυχὸν σημεῖον, ὑποκείμενον εἰς τὴν ζητουμένην ἰδιότητα εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς.

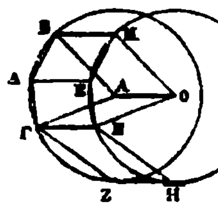
2) Δεικνύομεν ὅτι ὁλόκληρος ἡ γραμμὴ ἀνήκει εἰς τὸν τόπον ἢ ἀναγνωρίζομεν ποῖον τμῆμα αὐτῆς τῆς γραμμῆς ἀνήκει πραγματικῶς εἰς τὸν τόπον.

Παρατηρήσεις. 1) Χάριν τῆς σπουδαιότητος τὴν ὁποίαν ἔχουν οἱ γεωμετρικοὶ τόποι καὶ τῶν δυσκολιῶν τὰς ὁποίας ἐμφανίζει ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ἀνωτέρω γενικῶν θεωρήσεων, θ' ἀναπτύξωμεν μερικὰ παραδείγματα μὲ ὅλας τὰς ἀναγκαίας λεπτομερείας.

2) Ἡ ἀνακάλυψις τῶν *γεωμετρικῶν τόπων* καὶ τῆς μεθόδου τῆς *ἀναλύσεως*, ὀφείλονται εἰς τὸν *Πλάτωνα*.

Πρόβλημα

58. Δι' ἑκάστου σημείου μιᾶς περιφερείας, ἄγωμεν εὐθείας παραλλήλους, λαμβάνομεν δε ἐπ' αὐτῶν [6] τμήματα ἴσα πρὸς τὸ δοθὲν μῆκος λ. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν ἄκρων τῶν τμημάτων τούτων;



Σχ. 18.

Ἔστω ΓΝ ἴσον καὶ παράλληλον τμῆμα πρὸς τὸ ΒΜ.

Διὰ τοῦ κέντρου Α, φέρομεν ἓν παράλληλον τμῆμα ΑΟ ἴσον πρὸς λ. Τὸ σχῆμα ΑΒΜΟ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους.

Ἄρα ΟΜ = ΑΒ = ρ.

Ὁμοίως ΟΝ = ΑΓ = ρ.

Ὁ τόπος εἶναι λοιπὸν μία περιφέρεια κύκλου, ἴση μὲ τὴν ἀρχικήν.

59. *Σημειώσεις*. 1) Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὰς συνθήκας τοῦ ἀνωτέρω τόπου εἰς ἓν σχῆμα, τυχόν, θὰ ἀποκτήσωμεν ὁμοίως ἓν σχῆμα ἴσον.

Ἡ γενικὴ ἀπόδειξις εἶναι ἡ ἑπομένη.

Αἱ εὐθεῖαι ΒΔ καὶ ΜΕ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, διότι ΒΜ καὶ ΔΕ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ὁμοίως καὶ αἱ ΔΓ καὶ ΕΝ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ γωνίαι ΒΔΓ καὶ ΜΕΝ εἶναι ἴσαι ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους.

Οὕτω τὰ σχήματα ΒΔΓΖ καὶ ΜΕΝΗ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὰς γωνίας ἴσας. Τὰ καμπύλα σχήματα εἶναι ἴσα, ὡς ὅρια ἴσων πολυγώνων.

2) Εἰς τὰς ἐφαρμογάς, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ σχῆμα ΜΕΝΗ ὡς προκῦπτον ἐκ τῆς μετακινήσεως τοῦ σχήματος ΒΔΓΖ, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ κορυφαὶ ἔχουν ὀλισθήσῃ ἐπὶ τῶν παραλλήλων. Δυνάμεθα οὕτω νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ σχῆμα ΜΕΝΗ προέκυψεν ἐκ τοῦ ΒΔΓΖ, ἂν ἐφαρμόσωμεν ἐπ' αὐτοῦ μίαν μετακίνησιν ἢ μίαν μεταφοράν, ὅλων τῶν σημείων ὀλισθησάντων ἐπὶ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

Πρόβλημα

60. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο εὐθειῶν, ἰσοῦται πρὸς δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$;

Ἔστωσαν ΟΧ, ΟΥ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι.

---

6. Σημ. Μετ. Καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν (φοράν).

Τὸ σημεῖον O ἀνήκει εἰς τὸν τοπον· ἔστω A ἓν σημεῖον τοιοῦτον ὥστε :

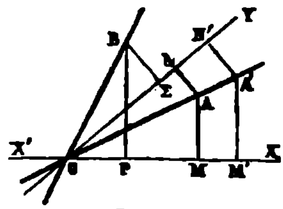
$$\frac{AM}{AN} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Ἡ *εὐθεῖα* OB *εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος*, διότι διὰ κάθε σημεῖον αὐτῆς A′, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{A'M'}{A'N'} = \frac{AM}{AN} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Ἡ *εὐθεῖα* OB *ἀνήκει ἐπίσης εἰς τον τόπον*. διότι θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{BP}{B\Sigma} = \frac{\mu}{\nu}.$$



Σχ 28.

Πρόβλημα

61. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἔχουν δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$;

Ἐπὶ τῆς εὐθείας AB καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς. προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα M καὶ N τοιαῦτα ὥστε νὰ ἔχωμεν :

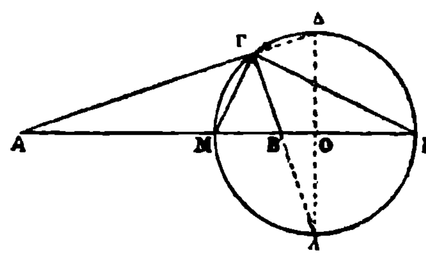
$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} \quad \frac{\mu}{\nu}.$$

Τὰ δύο ταῦτα σημεῖα M καὶ N, ἀνήκουν εἰς τὸν ζητούμενον τόπον.

Διὰ τυχὸν ἄλλο σημεῖον Γ τοῦ τόπου, θὰ ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως :

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\mu}{\nu}$$

ἄρα $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$.



Σχ. 29.

Ἀλλὰ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΓΒ καὶ ἡ διχοτόμος τῆς παραπληρωματικῆς της ΒΓΔ θὰ δόσουν, ἐπὶ τῆς βάσεως, δύο σημεῖα τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν σημείων A καὶ B θὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\mu}{\nu}$, ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΓΜ καὶ ΓΝ εἶναι αἱ ζητούμεναι διχοτόμοι.

Αἱ διχοτόμοι ὅμως δύο γωνιῶν παραπληρωματικῶν εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, συνεπῶς ἡ γωνία ΜΓΝ $\frac{\pi}{2}$ καὶ τὸ σημεῖον Γ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς γραφομένης μὲ διάμετρον τὴν ΜΝ.

Δεικνύομεν ἐν συνεχείᾳ ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης ἀνήκει εἰς τὸν τόπον.

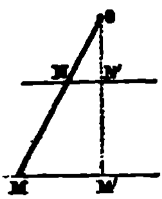
62. Σημείωσις. Ἂν προσέξωμεν τὰ σημεῖα, γράφομεν :

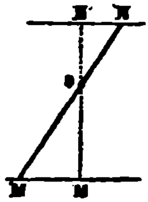
$$\frac{MA}{MB} = -\frac{\mu}{\nu} \text{ καὶ } \frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu} \text{ ἢ } \frac{MA}{MB} = -\frac{NA}{NB}.$$

Τὰ τέσσαρα σημεῖα A,B,M,N λέγομεν ὅτι σχηματίζουν μίαν ἁρμονικὴν διαίρεσιν.

Πρόβλημα

63. Ἑνοῦμεν τὰ διάφορα σημεῖα M μιᾶς εὐθείας δι' εὐθειῶν, μὲ ἓν σημεῖον O καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ ἑκάστης τοιαύτης εὐθείας ἓν τμῆμα ON, τοιοῦτον ὥστε $\frac{OM}{ON} = \frac{\mu}{\nu}$. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων N ;


Σχ. 27.


Σχ. 28.

Ἔστωσαν N καὶ N' δύο σημεῖα τοῦ τόπου.

Τὰ τρίγωνα MOM' καὶ NON' εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους, διότι

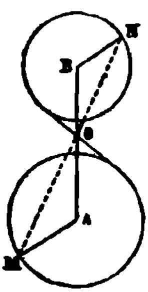
$$\frac{OM}{ON} = \frac{\mu}{\nu} = \frac{OM'}{ON'}$$

ἄρα αἱ εὐθεῖαι MM' καὶ NN' εἶναι παράλληλοι.

64. Παρατήρησις. Εἰς τὸ σχ. 27 τὸ σημεῖον O εἶναι τὸ κέντρον τῆς κατ' ἀναλογίαν ὁμοιοθεσίας. Εἰς τὸ σχ. 28 τὸ σημεῖον O εἶτὸ κέντρον τῆς κατ' ἀντιστροφὴν ὁμοιοθεσίας.

Πρόβλημα

65. Ἑνοῦμεν τὰ τὰ διάφορα σημεῖα M μιᾶς περιφερείας μὲ ἓν δοθὲν σημεῖον O καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ ἑκάστης ἀχθείσης εὐθείας τμῆμα ON, τοιοῦτον ὥστε $\frac{OM}{ON}$ νὰ ἰσοῦται μὲ σταθερὸν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων N ;


Σχ. 29

Ἔστω N τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐπὶ τῆς εὐθείας OA (σχ. 29) λαμβάνομεν τμῆμα OB, τοιοῦτον ὥστε :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\mu}{\nu} = \frac{OM}{ON}.$$

Τὰ τρίγωνα AOM, BON εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους. Ὅθεν

$$\frac{AM}{BN} = \frac{OM}{ON} = \frac{\mu}{\nu} \text{ ἢ } BN = AM \cdot \frac{\nu}{\mu} = \text{σταθερόν}.$$

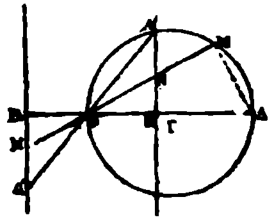
Ἑπομένως ὁ τόπος τῶν σημείων N εἶναι μία περιφέρεια, μὲ κέντρον τὸ σημεῖον B καὶ ἀκτῖνα $AM . \frac{\nu}{\mu}$.

66. Παρατήρησις. 1) Ἐὰν τὸ σημεῖον O εὑρίσκεται μεταξὺ M N ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι κατ' ἀντιστροφήν, εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν εἶναι αὕτη κατ' ἀναλογίαν.

2) Τὸ θεώρημα ἐφαρμόζεται γενικῶς διὰ τυχὸν σχῆμα ὄχι μόνον δια περιφέρειαν, ὁ τόπος τῶν σημείων N εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ εἶναι ἓν σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ προηγούμενον.

Πρόβλημα

67. Διὰ δοθέντος σημείου O ἄγομεν μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, αὕτη τέμνει δοθεῖσαν εὐθεῖαν AB εἰς ἓν σημεῖον N, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς τεμνούσης μῆκος OM τοιοῦτον ὥστε OM . ON νὰ ἔχει σταθερὰν τιμὴν K^2. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ M ;



Σχ. 60.

Ὁ τόπος εἶναι προφανῶς συμμετρικός, ὡς πρὸς τὴν κάθετον OB τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ O καὶ τὴν δοθ ῖσαν εὐθεῖαν· προσδιορίζομεν ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης ἓν σημεῖον Δ τοιοῦτον ὥστε :

$$OB . O\Delta = K^2.$$

Ἔστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου· θὰ ἔχωμεν : $OM . ON = K^2$.

Ἄρα $$\frac{OM}{OB} = \frac{O\Delta}{ON}.$$

Συνεπῶς τὰ τρίγωνα OBN, OΔM εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν, ἐπομένως ἡ γωνία M θὰ εἶναι ὀρθή, ὡς ἴση πρὸς τὴν B. Οὕτω κάθε σησεῖον M τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον τὴν OΔ.

68. Παρατηρήσεις. 1) Εἶναι εὔκολον νὰ δείξωμεν, ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀνήκουν εἰς τὸν τόπον.

2) Ἂν δοθῇ ἓν σημεῖον O ἐπι μιᾶς περιφερείας ἐχούσης τὴν OΔ ὡς διάμετρον καὶ προσδιορίσωμεν σημεῖον N′ τοιοῦτον ὥστε :

$$OM . ON' = K^2.$$

Ὁ τόπος τῶν σημείων N′, ὅταν ἡ OM στρέφεται περὶ τὸ O, εἶναι ἡ κάθετος ἡ N′B′ ἡ ἀγομένη ἐπὶ τὴν διάμετρον OΔ εἰς ἓν σημεῖον της B′, τοιοῦτον ὥστε :

$$OB' . O\Delta = K^2.$$

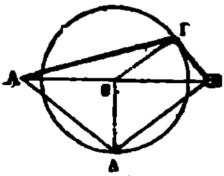
3) Ὅταν τὸ O δὲν εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῶν σημείων M, ὁ τόπος τῶν N′ τοιούτων ὥστε $OM . ON' = K^2$, εἶναι μία δευτέρα περιφέρεια, ἔχουσα τὸ σημεῖον O, ὡς κέντρον ὁμοιοθεσίας.

Πρόβλημα

69. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων. ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον K^2 ;

Ἔστωσαν Α,Β τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ Γ ἓν σημεῖον τοῦ τόπου τοιοῦτον ὥστε :

$$ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = Κ^2.$$


Σχ. 31.

Ἐπειδὴ ἔχομεν δεδομένον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῆς διαμέσου. Ἑνοῦμεν λοιπὸν τὸ σημεῖον Γ μὲ τὸ μέσον Ο τῆς βάσεως ΑΒ, θὰ ἔχωμεν :

$$ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = 2ΑΟ^2 + 2ΟΓ^2 = Κ^2$$

ἐξ οὗ

$$ΟΓ^2 = \frac{Κ^2 - 2ΑΟ^2}{2}.$$

Οὕτω τὸ τμῆμα ΟΓ εἶναι σταθερόν.

Ὁ τόπος λοιπὸν τοῦ Γ εἶναι ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη μὲ κέντρον τὸ μέσον Ο τῆς ΑΒ καὶ ἀκτῖνα ΟΓ.

70. *Παρατηρήσεις.* 1) Ὅλη ἡ περιφέρεια ἀνήκει εἰς τὸν τόπον.

2) Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΓ, πρέπει νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὸ σημεῖον Ο ἐπὶ τὴν ΑΒ μίαν κάθετον καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ $Κ^2$, τέμνομεν τὴν κάθετον ταύτην εἰς τὸ σημεῖον Δ, ἡ ΟΔ εἶναι ἡ ζητουμένη ἀκτίς.

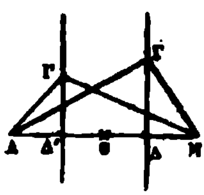
3) Πρέπει τὸ $Κ^2$ νὰ ἰσοῦται τοὐλάχιστον πρὸς $2ΑΟ^2$ ἢ $\frac{ΑΒ^2}{2}$.

Πρόβλημα

71. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα, ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον $Κ^2$;

Ἔστω : $$ΑΓ^2 - ΒΓ^2 = Κ^2.$$

Ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ θεωρήσωμεν τὰς προβολὰς αὐτῶν ἐπὶ τὴν ΑΒ.


Σχ. 32.

Φέροντες λοιπὸν τὴν κάθετον ΓΔ, ἔχομεν:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2, \quad ΒΓ^2 = ΒΔ^2 + ΓΔ^2$$

ἐξ ὧν $$ΑΓ^2 - ΒΓ^2 = ΑΔ^2 - ΒΔ^2 = Κ^2.$$

Οὕτω, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ σημείου τοῦ τόπου, ἡ διαφορὰ $ΑΔ^2 - ΒΔ^2$ εἶναι σταθερά, ἄρα τὸ σημεῖον Α εἶναι καθωρισμένον καὶ ἑπομένως ἡ κάθετος ΓΔ ἀνήκει εἰς τὸν ζητούμενον τόπον.

Ὁ τόπος περιέχει ἀκόμη καὶ τὴν κάθετον Γ΄Δ΄ τοιαύτην ὥστε :

$$ΒΓ'^2 - ΑΓ'^2 = Κ^2.$$

Παρατηρήσεις. 1) Αἱ δύο κάθετοι ἰσαπέχουν τοῦ μέσου Ο.

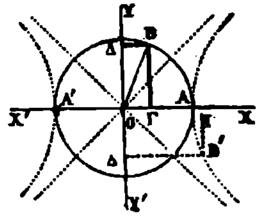
2) Ἡ διαφορὰ δύναται νὰ μεταβάλλεται, ἀπὸ μηδὲν ἕως $+\infty$. Ὅταν αὕτη εἶναι μηδέν, αἱ δύο εὐθεῖαι ΔΓ καὶ Δ΄Γ΄ συμπίπτουν εἰς μίαν μόνην κάθετον εἰς τὸ μέσον Ο τῆς ΑΒ.

Πρόβλημα

72. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο καθέτους εὐθείας, ἰσοῦται μὲ δοθὲν τετράγωνον α^2;

Ἔστω: $B\Gamma^2 + B\Delta^2 = \alpha^2$,

Ἔχομεν: $B\Gamma^2 + O\Gamma^2 = OB^2 = \alpha^2$, συνεπῶς, ὁ τόπος τοῦ σημείου Β εἶναι ἡ περιφέρεια, ἡ γραφομένη μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Π καὶ ἀκτῖνα α.



Σχ. 33.

73. *Παρατηρήσεις*. 1) Διὰ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων $B'\Delta'^2 - B'\Gamma'^2 = \alpha^2$, ὁ τόπος εἶναι μία ὑπερβολὴ ἰσοσκελής [6] ἔχουσα ὡς μεγάλον ἄξονα, τὴν $AA' = 2\alpha$.

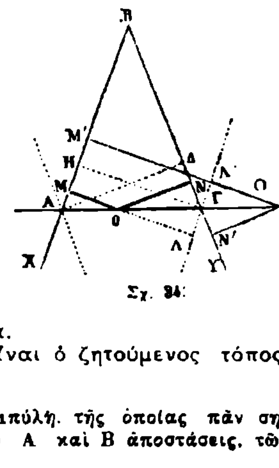
2) Ὅταν αἱ ἄξονες δὲν εἶναι κάθετοι, ὁ πρῶτος τόπος εἶναι ἔλλειψις καὶ ὁ δεύτερος ὑπερβολή.

3) Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὸ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων, ἀπὸ ἓν σημεῖον καὶ μίαν εὐθείαν εἶναι σταθερόν, εἶναι ἐπίσης μία κωνική [7].

Πρόβλημα

74. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος λ;

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ΒΧ καὶ ΒΥ. Ἐπὶ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων ὑπάρχει ἓν ἐκ τῶν σημείων τοῦ τόπου, διὰ τὴν ΒΧ θὰ εἶναι ἓν σημεῖον Γ τοιοῦτον ὥστε τὸ ὕψος $\Gamma H = \lambda$, διότι ἡ ἀπόστασις τοῦ Γ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΒΥ εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν.



Σχ. 34.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ Γ, λαμβάνωμεν ἐπὶ μιᾶς καθέτου ἐπὶ τὴν ΒΧ, τὸ τμῆμα $M'\Lambda' = \lambda$ καὶ φέρομεν μίαν παράλληλον ΛΛ' πρὸς τὴν ΒΧ, τέμνουσαν τὴν ΒΥ εἰς τὸ σημεῖον Γ.

Ὁμοίως προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον Α, τοιοῦτον ὥστε $A\Delta = \lambda$.

Ἀλλὰ τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, καθόσον ἔχει δύο ὕψη ἴσα.

1) Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

---

6. Σημ. μετ. Ὑπερβολὴ καλεῖται ἡ καμπύλη, τῆς ὁποίας πᾶν σημεῖον Μ ἀπέχει ἀπὸ δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β ἀποστάσεις, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ΑΜ — ΒΜ εἶναι σταθερά.

Ἰσοσκελὴς εἶναι ἡ ὑπερβολή, ὅταν $\alpha\sqrt{2}$ γ, ἔνθα 2α - ΑΜ — ΒΜ καὶ $2\gamma = AB$.

7. Σημ. μετ. Κωνικαὶ καλοῦνται αἱ καμπύλαι, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ὡς τομαὶ ἑνὸς κώνου μὲ βάσιν ἕναν κύκλον καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Αἱ

Πράγματι, διὰ κάθε ἄλλο σημεῖον Ο αὐτῆς ἔχομεν (ἀρ. 20):

$$OM + ON = MΛ = λ.$$

2) Ἀπομένει νὰ ἐξακριβώσωμεν, ἂν ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΓ ἀνήκουν εἰς τὸν τόπον.

Οὕτω δι' ἓν σημεῖον Ο' λαμβανόμενον ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς βάσεως ΑΓ, εἶναι:

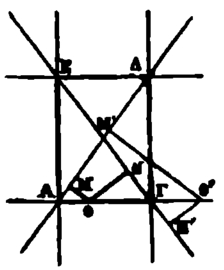
$$O'M' - O'N' = M'Λ' = λ.$$

Πρέπει λοιπὸν ἢ νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἡ μία τῶν καθέτων εἶναι ἀρνητικὴ ἢ νὰ ἀλλάξωμεν τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος, διότι τὰ σημεῖα τὰ κείμενα εἰς τὴν προέκτασιν τῆς βάσεως ΑΓ, ἀνήκουν εἰς τὸν τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς δοθείσας εὐθείας ΒΧ καὶ ΒΥ, ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος λ.

Ἐπέκτασις. Αἱ εὐθεῖαι ΒΧ; ΒΥ εἶναι ἀπέραντοι, πρέπει λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν καὶ τὰς τέσσαρας γωνίας, τὰς ὁποίας αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι σχηματίζουν τεμνόμεναι (σχ. 35). Εὑρίσκομεν οὕτω τὴν πλήρη λύσιν τοῦ τόπου ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἑξῆς:

75. *Θεώρημα.* Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων ἰσοῦται πρὸς λ, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν περίμετρον ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΓΔΕ, καὶ ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ἰσοῦται πρὸς λ, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τοῦ ὡς ἄνω ὀρθογωνίου.

Συμπληρωματικὰ σχήματα. Ὀνομάζομεν *συμπληρωματικὰ σχήματα*, τὰ σχήματα τὰ ὁποῖα ἀνταποκρίνονται εἰς τὰ αὐτὰ δεδομένα καὶ εἰς τὴν αὐτὴν πρότασιν, ἀλλὰ μὲ μίαν μεταβολὴν τοῦ σημείου εἰς τὴν σχέσιν (ἥτις ἐκφράζει τὴν πρότασιν). Ταῦτα ἀποτελοῦν τὸ πλῆρες σύνολον ἑνὸς γεωμετρικοῦ τόπου. Οὕτω τὸ ὀρθογώνιον ΑΓΔΕ, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓν ἄθροισμα (ἀρ. 75) καὶ αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς μίαν διαφοράν, εἶναι σχήματα συμπληρωματικά. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει μὲ τὸν κύκλον καὶ τὴν ὑπερβολήν.



Σχ. 35

Παρατήρησις. Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα, ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος 2α, εἶναι μία ἔλειψις ἢ μία ὑπερβολή.

τομαὶ ἑνὸς κώνου μὲ κυκλικὴν βάσιν καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι: α) Κύκλος, ὅταν τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον ἢ ἀντιπαράλληλον πρὸς τὴν βάσιν.

β) Ζεῦγος δύο εὐθειῶν, ὅταν τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου.

γ) Ἔλλειψις, ὅταν τὸ ἐπίπεδον τέμνει ὅλας τὰς γενετείρας τοῦ κώνου.

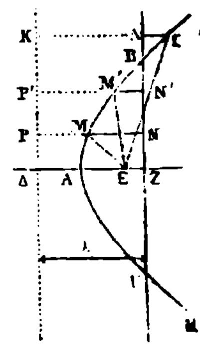
δ) Παραβολή, ὅταν τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον πρὸς μίαν τῶν γενετειρῶν τοῦ κώνου.

ε) Ὑπερβολή, ὅταν τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὸν κῶνον καὶ τὴν προέκτασίν του (δηλαδὴ τὰς δύο χοάνας).

Τὸν ὅρον συμπληρωματικὰ σχήματα μετεχ.. ρισθη πρῶτος ὁ Poncelet.

Πρόβλημα

76. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων το ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν καὶ ἀπὸ ἓν σημεῖον εἶναι σταθερά ;



Σχ. 36.

Ἔστωσαν Ε τὸ σημεῖον καὶ ΒΓ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα.

Ἔστωσαν Μ,Μ΄, τὰ σημεῖα τοῦ τόπου, θὰ ἔχωμεν :

$$ME + MN = \lambda.$$

Διὰ νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο τμήματα, ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ΜΡ ἴσον πρὸς ΜΕ, Μ΄Ρ ἴσον πρὸς Μ΄Ε, συνεπῶς

$$PN = P'N' = \lambda.$$

Ὁ τόπος τῶν σημείων Ρ εἶναι μια εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄ ὡς ἰσαπέχοντα ἀπὸ ἓν σημεῖον Ε καὶ ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν ΔΡ, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς παραβολῆς [θ], ἐχούσης τὸ Ε ὡς ἑστίαν καὶ τὴν ΔΡ ὡς διευθετοῦσαν.

Τὰ σημεῖα τῆς παραβολῆς τὰ ἐκτὸς τῶν δύο παραλλήλων ΒΓ, ΔΡ, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν διαφοράν, διότι :

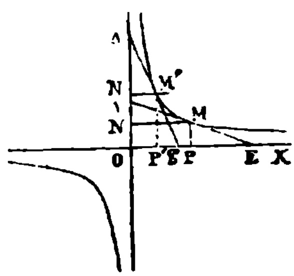
$$EI = IK \text{ καὶ } EI - I\Lambda = \Lambda K = \lambda.$$

77. Παρατηρήσεις. 1). Ὅταν $\lambda < EZ$, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς παραβολῆς ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν διαφοράν· ἡ δὲ καμπύλη δὲν τέμνει τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

2) Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν διαφορὰν $MN - ME = \lambda$, ἡ διευθετοῦσα εὑρίσκεται μεταξὺ τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τοῦ δοθέντος σημείου.

Πρόβλημα

78. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο ὀρθογωνίους ἄξονας, ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον K^2.



Σχ. 37.

Ἔστω $MP \cdot MN = K^2$.

Ὁ τόπος εἶναι μία ὑπερβολὴ ἰσοσκελής, ἀναφερομένη εἰς τὰς ἀσυμπτώτους της.

Ὅλα τὰ ὀρθογώνια, ὡς τὰ ἔχοντα κορυφὰς τὰ Μ καὶ Μ΄, εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.

Ἡ ἐφαπτομένη ΔΕ, εἰς τὴν καμπύλην, χωρίζεται εἰς δύο μέρη, ὑπὸ τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς (βλ. ἀρ. 175, κατωτέρω), συνεπῶς, τὸ τρίγωνον

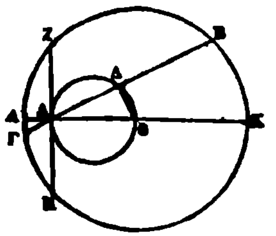
θ. Σημ. μετ. Παραβολὴ καλεῖται ἡ καμπύλη, τῆς ὁποίας ὁ πᾶν σημεῖον Μ ἰσαπέχει ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ε καὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΒΓ. Τὸ σημεῖον Ε καλεῖται ἑστία καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΓ διευθετοῦσα.

ΔΟΕ, διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΟΡΜΝ, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον Δ'ΟΕ'.

79. Σημείωσις. Ὅταν αἱ εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΥ δὲν εἶναι κάθετοι, ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι σταθερόν, εἶναι μία ὑπερβολὴ μὴ ἰσοσκελής.

Πρόβλημα

80. **Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν, τῶν ἀγομένων πρὸς μίαν περιφέρειαν, ἐξ ἑνὸς σημείου Α ;**

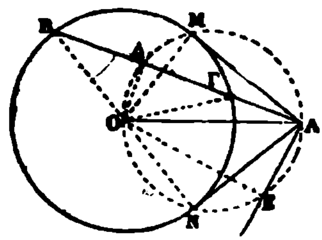


Σχ. 38.

1) Ὁ τόπος θὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο, μέσου τῆς διαμέτρου καὶ διὰ τοῦ σημείου Α, μέσου τῆς χορδῆς ΖΗ, καθέτου ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΟ. Ὁ τόπος εἶναι συμμετρικὸς πρὸς τὴν ΑΟ.

2) Διὰ τὸ σημεῖον Δ τῆς τυχούσης χορδῆς ΒΓ, γνωρίζομεν ὅτι ἡ ΟΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἄρα τὸ σημεῖον Δ, κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΔΟ, κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς γραφομένης μὲ διάμετρον τὴν ΑΟ.

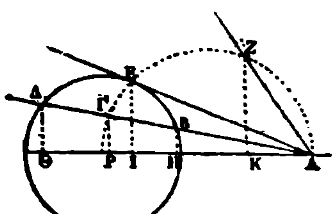
3) Ὅταν τὸ Α εἶναι ἐσωτερικὸν (σχ. 38), ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια ἀνήκει προφανῶς εἰς τὸν τόπον. Ἀλλὰ δὲν συμβαίνει τὸ αὐτό, ὅταν τὸ σημεῖον Α εἶναι ἐξωτερικὸν (σχ. 39).



Σχ. 39.

Ὅταν θεωρήσωμεν τὰς κατωτέρω κατασκευάς, ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, το τόξον ΜΔΟΝ τὸ περιοριζόμενον ὑπὸ ἐφαπτομένων ΑΜ, ΑΝ, ἀνήκει μόνον εἰς τὸν τόπον, διότι ἐκτὸς τῶν ἐφαπτομένων τούτων δὲν ὑπάρχει εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ τοῦ Α καὶ τέμνουσα τὴν περιφέρειαν Ο.

Ἐν τούτοις, πρέπει νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψει καὶ ἡ παρουσία τοῦ τόξου ΜΑΝ ὡς τόπου ἀρκεῖ νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ γωνία ΑΔΟ εἶναι ὀρθὴ καὶ νὰ τεθῃ ἡ ἐρώτησις ὡς ἑξῆς :



Σχ. 40.

Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ΑΟ εἶναι ὑποτείνουσα.

Διότι, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ σημεῖον Ε ἀνήκει προφανῶς εἰς τὸν τόπον· ἀλλὰ ὑπάρχει ἕνας γενικώτερος τρόπος, δικαιολογῶν τὴν ὕπαρξιν τοῦ τόξου ΜΑΝ.

81. Σημείωσις. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου ἀναφερομένου εἰς δύο ἄξονας ὀρθογωνιους, ἀγομένους ἐκ τοῦ κέντρου του, εἶναι :

$$x^2+y^2=\rho^2.$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς τυχούσης τεμνούσης, διά τινος σημείου Α, εἶναι τῆς μορφῆς: $y=\alpha x+\beta$,
ἔνθα β ἕν μῆκος σταθερόν καί α ὁ μεταβλητός συντελεστής διευθύνσεως τῆς τεμνούσης.

Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ y μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων λαμβάνομεν:

$$x^2+\frac{2\alpha\beta}{1+\alpha^2}x+\frac{\beta^2-\rho^2}{1+\alpha^2}=0$$

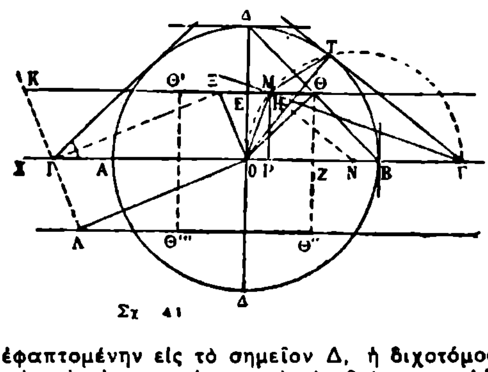
Αἱ δύο τιμαί τῆς x, ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς τετμημένας ΑΘ καί ΑΗ, τῶν δύο σημείων τομῆς. Τό ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τούτων, εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ μέσου τῆς χορδῆς. Ὁμοίως ἡ ΓΡ εἶναι τό ἡμιάθροισμα τῶν τεταγμένων ΒΗ καί ΔΘ. Ἀλλ' ὡς γνωστόν, τό ἄθροισμα τῶν ριζῶν ἰσοῦται μὲ τόν συντελεστήν τοῦ x ἐν τῇ ὡς ἄνω ἐξισώσει, λαμβανόμενον μὲ ἀντίθετον σημεῖον. Ἄρα, ἡ τετμημένη ΑΡ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς, εἶναι πάντοτε πραγματική, ἔστω καί ἄν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι φανταστικαί, δηλαδή ἔστω καί ἄν ἡ τέμνουσα δέν τέμνει τήν περιφέρειαν. Τό αὐτό συμβαίνει καί μὲ τάς τεταγμένας τοῦ μέσου τῆς χορδῆς, ὅθεν:

Μία τυχοῦσα τέμνουσα ἠγμένη ἐκ σημείου Α, τέμνει δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα πραγματικά ἤ φανταστικά, ἀλλά τό μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο σημείων τομῆς εἶναι πάντοτε πραγματικόν καί ἀνήκει εἰς τόν τόπον.

Πρόβλημα

82. Δίδεται περιφέρεια καὶ διάμετρος αὐτῆς ΑΒ. Ἐκ τυχόντος σημείου Γ, λαμβανομένου ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς δοθείσης διαμέτρου, φέρομεν ἐφαπτομένην ΓΤ, κατόπιν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΑΓΤ· ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐπὶ τὴν διχοτόμον ἐκ τοῦ κέντρου Ο;

1) Ἄς μελετήσωμεν τάς εἰδικάς θέσεις τῆς ἐφαπτομένης.



Σχ 41

Διά τήν ἐφαπτομένην εἰς τό σημεῖον Δ, ἡ διχοτόμος εἶναι παράλληλος πρός τήν ἐφαπτομένην καί τήν διάμετρον ΑΒ καί διέρχεται διά τοῦ μέσου τῆς ΟΔ.

Ἡ ἐφαπτομένη εἰς τό σημεῖον Β δίδει διχοτόμον ΒΔ, ἡ ὁποία

τέμνει τὴν διάμετρον ὑπὸ γωνίαν $\frac{\pi}{4}$. Ἡ κάθετος ΟΘ ὁρίζει τρίγωνον ΟΘΒ, ὀρθογώνιον ἰσοσκελές,

ἄρα $$ΘZ=ΘE=\frac{\rho}{2}$$

Τὰ τέσσαρα σημεῖα Θ, Θ', Θ'', Θ''', εἶναι αἱ κορυφαὶ ἑνὸς τετραγώνου ἔχοντος ὡς κέντρον τὸ σημεῖον Ο. Ἡ πλευρὰ ΘΘ' διέρχεται διὰ τοῦ ἤδη ὁρισθέντος σημείου Ε.

2) Διὰ τυχοῦσαν ἐφαπτομένην ΓΤ, τὸ σημεῖον Μ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΓΜ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΘΕΘ'.

Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΜΝ τῆς περιφερείας ΟΤΓ, ἥτις ὁρίζει τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς· ἔστω Η τὸ σημεῖον ὅπου ἡ ἀκτὶς αὕτη τέμνει τὴν χορδὴν ΟΤ·

ἔχομεν: $$OH=\frac{OT}{2}=\frac{P}{2}.$$

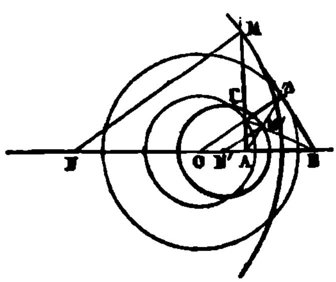
Ἀλλὰ τὰ ὀρθογώνια ΟΜΡ, ΟΜΗ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα κοινὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὴν γωνίαν ΜΟΝ=ΟΜΝ.

Ἄρα $$MP=OH=\frac{P}{2}.$$

83. Παρατήρησις. Ὁ πλήρης τόπος διὰ τὴν δοθεῖσαν σταθερὰν διάμετρον ΑΒ, ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀπεριορίστων παραλλήλων. Τὰ τμήματα ΘΘ', Θ'' ΘΘ''', ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν διχοτόμον ΙΞ τῆς ὀξείας γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη μετὰ τῆς διαμέτρου, ἐνῷ αἱ προεκτάσεις ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν διχοτόμον ΙΚ τῆς ἀμβλείας γωνίας.

Πρόβλημα

84. Δίδονται δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ ἑνὸς τετραπλεύρου, τεμνόμεναι εἰς ἓν σημεῖον Ο. Ἡ μία τῶν πλευρῶν ΑΒ εἶναι σταθερά, ἡ ἄλλη στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον Ο. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ καθ' ὃ τέμνονται αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΔ, καὶ ὁ τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων ΑΔ, ΒΓ;



Σχ. 42.

Διὰ τοῦ σημείου Μ φέρομεν τὴν ΜΝ παράλληλον πρὸς τὴν ΟΓΔ, καὶ ζητοῦμεν τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν ΑΝ, ΝΜ καὶ τῶν δοθέντων μηκῶν.

Ἔστωσαν ΟΑ=α, ΟΒ=β, ΑΒ=β−α=λ.

ΟΓ=γ ΟΔ=δ.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΝΒΜ, ΟΒΔ, κατόπιν τὰ ΝΑΜ, ΟΑΓ δίδουν:

$$\frac{MN}{NB}=\frac{O\Delta}{OB}=\frac{\delta}{\beta}, \qquad MN=NB\cdot\frac{\delta}{\beta},$$

$$\frac{MN}{NA}=\frac{O\Gamma}{OA}=\frac{\gamma}{\alpha}, \qquad MN=NA\cdot\frac{\gamma}{\alpha},$$

ἐξ οὗ $\quad NA \cdot \frac{\gamma}{\alpha} = NB \cdot \frac{\delta}{\beta}$.

ἀλλὰ $\quad NB = NA + \lambda$, ἄρα $NA \frac{\gamma}{\alpha} = NA \frac{\delta}{\beta} + \lambda \cdot \frac{\delta}{\beta}$,

ἐξ οὗ $\quad NA \cdot \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\alpha\beta} = \lambda \cdot \frac{\delta}{\beta}$

καὶ συνεπῶς $\quad NA = \lambda \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma - \alpha\delta}$ ποσότης σταθερά, κατόπιν, ἐκ τοῦ $MN = NA \cdot \frac{\gamma}{\alpha}$, ἔχομεν :

$$MN = \lambda \cdot \frac{\gamma\delta}{\beta\gamma - \alpha\delta} \text{ ποσότης σταθερά.}$$

Ἄρα *ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ, εἶναι περιφέρεια τῆς ὁποίας τὸ κέντρον Ν εἶναι ἐπὶ τῆς ΟΑΒ.*

Ὁ τόπος τοῦ Μ' εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι τὸ Ν' καὶ ἀκτὶς ἡ Ν'Μ'.

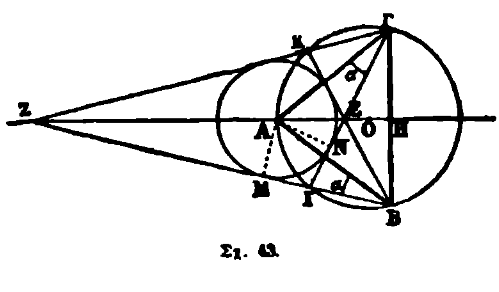
Τὸ ζεῦγος τῶν δύο περιφερειῶν μὲ ἀντίστοιχα κέντρα Ν καὶ Ν' ἀποτελεῖ τὸν πλήρη τόπον.

*85. **Σύνθετοι τόποι.*** Οἱ ζητούμενοι γεωμετρικοὶ τόποι δύνανται νὰ σχηματίζωνται ἐκ διαφόρων εἰδῶν γραμμῶν· π. χ. μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς κύκλου ἢ ἑνὸς κύκλου καὶ μιᾶς ὑπερβολῆς. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν, ἡ μελέτη των εἶναι δυσκολωτέρα, διότι εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ παραλείψωμεν μέρος τοῦ τόπου.

Ἡ ειδικὴ αὐτὴ περίπτωσις παρουσιάζεται εἰς ἓν πρόβλημα ἐξετάσεων (ἀριθ. 86)· ἀλλὰ πρὶν τὴν ἐξετάσωμεν, θὰ μελετήσωμεν μίαν περίπτωσιν πολὺ ἁπλῆν (ἀριθ. 84 β). Ἄς πραγματευθῶμεν ἐν πρώτοις περὶ ἑνὸς συνθέτου τόπου, μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς κύκλου.

Πρόβλημα

85 α. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΑΓ γράφομεν κύκλον μεταβλητῆς ἀκτῖνος, ἐκ τῶν Β καὶ Γ, ἄγομεν τὰς



Σχ. 43.

ἐφαπτομένας εἰς τὸν μεταβαλλόμενον τοῦτον κύκλον. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων τομῆς τῶν οὕτω ἀγομένων ἐφαπτομένων;

Αἱ ἐφαπτόμεναι τέμνονται εἰς τέσσαρα σημεῖα Ε, Ζ, Ι, Κ.

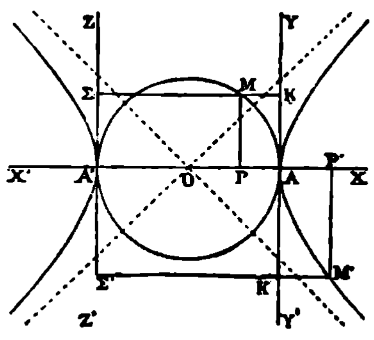
1) Ὁ τόπος τῶν σημείων Ε, Ζ εἶναι προφανῶς ἡ εὐθεῖα ΕΑΖ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ.

2) Ὁ τόπος τῶν σημείων Ι, Κ εἶναι ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ τριγώνου ΒΑΓ. Πράγματι, ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς ΑΜ, ΑΝ, βλέπομεν ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜΒ, ΑΝΓ εἶναι ἴσα· ἄρα ΑΒΜ=ΑΓΝ, καὶ συνεπῶς γωνία ΒΙΓ= ΒΑΓ, καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Ι ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον ΒΑΓ.

Παρατήρησις. Οὕτω ὁ πλήρης τόπος τῶν τεσσάρων σημείων τομῆς, ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο διακεκριμένα μέρη: μίαν εὐθεῖαν ΑΗ καὶ ἕνα κύκλον ΑΒΓ.

Πρόβλημα

85 β. Δίδεται εὐθεῖα ΧΧ' καὶ δύο κάθετοι ἐπ' αὐτὴν ΥΥ', ΖΖ'. Ἐξ ἑνὸς σημείου Μ φέρομεν καθέτους ΜΡ, ΜΚ, ΜΣ ἐπ' αὐτάς. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ ὅταν ἡ ΜΡ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΜΚ καὶ ΜΣ;



Σχ. 44.

1) Ἔστω

$$MP^2 = MK \,.\, M\Sigma$$

ἔχομεν λοιπόν:

$$MP^2 = PA \,.\, PA'$$

ἄρα ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ εἶναι ἡ περιφέρεια, ἥτις γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΑ'.

2) Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἐπίσης:

$$M'P'^2 = M'K' \,.\, M'\Sigma'$$

ἢ

$$M'P'^2 = P'A \,.\, P'A'.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ Μ'Ρ' διὰ τοῦ y, τὴν ἀπόστασιν ΟΡ' διὰ τοῦ x καὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου διὰ τοῦ α, ἔχομεν:

$$y^2 = (x-\alpha)\,(x+\alpha) = x^2 - \alpha^2,$$

ἥτις εἶναι ἡ ἐξίσωσις μιᾶς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς ἐχούσης τὴν ΑΑ' ὡς πρωτεύοντα ἄξονα: οὕτω ὁ πλήρης τόπος ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς κύκλου καὶ μιᾶς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς, δυναμένης εὐκόλως νὰ προσδιορισθῇ.

Παρατήρησις. Ἡ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπερβολὴ εἶναι συμπληρωματικαὶ καμπύλαι, μὲ τὴν ὑποδειχθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Poncelet ἔννοιαν (ἀρ. 75).

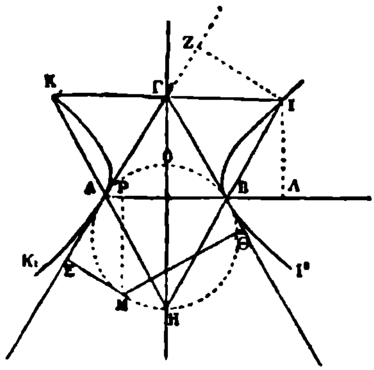
Πρόβλημα

86. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον· ζητεῖται ὁ τόπος τῶν σημείων, ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἰδίου σημείου ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας πλευράς.

Βλέπομεν ἀμέσως ὅτι τὸ κέντρον Ο τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὰ κέντρα Η, Ι, Κ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων ἀνήκουν εἰς τὸν ζητούμενον τόπον, διότι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ἀπέχει ἰσάκις τῶν τριῶν πλευρῶν.

Τὰ σημεῖα Α, Β, ἀνήκουν ἐπίσης εἰς τὸν τόπον· πράγματι, ἡ ἀπόστασις ἑκάστου ἐξ αὐτῶν τῶν σημείων ἀπὸ τὴν βάσιν καὶ ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς εἶναι μηδέν, τοῦτο λοιπὸν εἶναι ἀρκετὸν διὰ νὰ μηδενισθῇ τὸ τετράγωνον καὶ τὸ γινόμενον.

Τὰ οὕτω πως ἀμέσως εὑρεθέντα ἓξ σημεῖα δὲν δύνανται προφανῶς ν' ἀνήκουν οὔτε εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, οὔτε εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἐδόθη εἰς τὰς ἐξετάσεις τοῦ Λυκείου τῷ 1865.



Σχ. 45.

Οἱ καλλίτεροι μαθηταὶ ἐσταμάτησαν εἰς τὴν σκέψιν αὐτήν, ἐνῷ ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι δὲν εἶχον σκεφθῇ παρὰ τὰ σημεῖα Α, Ο, Β, Η, ἔδωσαν ὡς λύσιν μίαν περιφέρειαν, καὶ ἦτο αὕτη ἡ ζητουμένη λύσις.

Ἀλλὰ ὁ πλήρης τόπος περιλαμβάνει δύο μέρη δεικνυόμενα κατωτέρω:

1) Ἡ ἐφαπτομένη περιφέρεια εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β τῶν δύο πλευρῶν, αὕτη ἡ καμπύλη διέρχεται διὰ τῶν κέντρων Ο καὶ Η. Γνωρίζομεν ὅτι ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς τῆς περιφερείας ἀνήκει εἰς τὸν τόπον (ἀριθ. 25).

Ἡ ἀναλυτικὴ Γεωμετρία ἐξ ἄλλου δίδει ὡς λύσιν:

2) Μίαν ὑπερβολὴν ΚΑΚ', ΙΒΙ', ἐφαπτομένην εἰς τὰ σημεῖα Α,Β τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν καὶ ἀκολούθως ἐφαπτομένην εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ τόπου (δηλ. τὴν περιφέρειαν). Ἡ δευτέρα αὕτη καμπύλη περιέχει τὰ κέντρα Ι καὶ Κ τῶν ἐξωτερικῶς ἐφαπτομένων εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς κύκλων τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

§ II. *Χρῆσις γεωμετρικῶν τόπων*

87. Τόποι πρὸς χρῆσιν. Οἱ κυριώτεροι γεωμετρικοὶ τόποι, οἱ χρησιμοποιούμενοι εἰς τὰς λύσεις τῶν προβλημάτων εἶναι οἱ ἀκόλουθοι:

α) Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθείσας εὐθείας ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος.

β) Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθείσας εὐθείας ἔχουν δοθέντα λόγον.

γ) Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἔχουν δοθέντα λόγον.

δ) Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν διαιρούντων εἰς δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ τὰς ἀγομένας εὐθείας ἐξ ἑνὸς σημείου εἰς μίαν εὐθεῖαν ἢ εἰς μίαν περιφέρειαν.

ε) Ὁ τόπος τῶν σημείων Ν, τῶν διαιρούντων τὰς εὐθείας ΟΜ,

τὰς ἀγομένας ἐξ ἑνὸς σημείου Ο, εἰς μίαν εὐθεῖαν ἢ εἰς μίαν περιφέρειαν εἰς δύο τμήματα τοιαῦτα, ὥστε τὸ γινόμενον ΟΜ . ΟΝ νὰ εἶναι σταθερόν.

στ) Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο σημείων, ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

88. Προσδιορισμὸς σημείου. Εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων, ἡ λύσις ἑνὸς γραφικοῦ προβλήματος χρειάζεται τὸν προσδιορισμὸν τῆς θέσεως ἑνὸς σημείου.

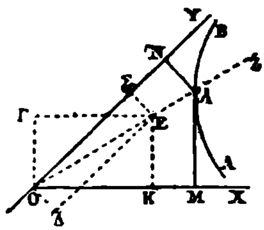
Οὕτω, μὴ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει μίαν ἐκ τῶν δεδομένων συνθηκῶν τοῦ προτεινομένου προβλήματος, εὑρίσκομεν μίαν γραμμὴν περιέχουσαν τὸ ζητούμενον σημεῖον· κατόπιν λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει τὴν παραλειφθεῖσαν συνθήκην, ἀλλὰ ἀφαιροῦντες μίαν ἄλλην *δοθεῖσαν*, ἐπιτυγχάνομεν ἀκόμη μίαν γραμμήν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ πρὸς προσδιορισμὸν σημεῖον· ἄρα ἡ τομὴ τῶν δύο γεωμετρικῶν τόπων δίδει τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Χρῆσις ἑνὸς μόνου γεωμετρικοῦ τόπου.

89. Ὁ προσδιορισμὸς ἑνὸς σημείου δὲν ἀπαιτεῖ ἐνίοτε, παρὰ τὴν *κατασκευὴν ἑνὸς μόνου τόπου*. Ἡ περίπτωσις αὕτη παρουσιάζεται, ὅταν τὸ σημεῖον ὀφείλῃ νὰ κεῖται καὶ εἰς δοθεῖσαν γραμμήν. Ἰδοὺ μερικὰ παραδείγματα:

Πρόβλημα

***90.* Ἐπὶ γραμμῆς ΑΒ, νὰ προσδιορισθῇ σημεῖον Λ τοιοῦτον ὥστε αἱ ἀποστάσεις ΛΜ, ΛΝ ἀπὸ δύο εὐθείας ΟΧ, ΟΨ, νὰ ἔχουν δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.**



Σχ. 46.

Πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὁ τόπος ΟΖ τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ΕΚ, ΕΣ ἔχουν τὸν δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ (ἀριθ. 60).

Παρατήρησις. Διὰ τὴν κατασκευὴν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ΟΓ=μ, ΟΔ=ν καὶ νὰ φέρωμεν τὰς παραλλήλους ΓΕ, ΔΕ, διότι ἔχομεν:

$$\frac{ΕΚ}{ΕΣ}=\frac{\mu}{\nu}.$$

Πρόβλημα

***91.* Ἐπὶ γραμμῆς ΑΒ νὰ ὁρισθῇ σημεῖον Λ, τοιοῦτον ὥστε ἑνοῦντες αὐτὸ μὲ τὰ ἄκρα δύο τμημάτων μ καὶ ν, νὰ σχηματίζωνται δύο τρίγωνα ἰσοδύναμα.**

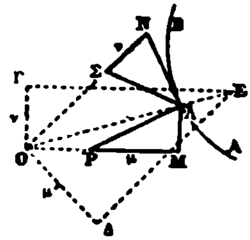
Προσδιορίζομεν τὸν τόπον ΟΛΕ, τῶν σημείων τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς ΡΜ, ΣΝ, ἑνοῦνται μὲ τὸν λόγον τῶν μηκῶν ν, μ.

Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῆς ΟΓ καθέτου εἰς τὴν ΡΜ λαμβάνομεν ν'=ν,

ἐπὶ τῆς ΟΔ, καθέτου ἐπὶ τὴν ΣΝ λαμβάνομεν μ΄=μ καὶ ἄγομεν τὰς παραλλήλους ΓΕ, ΔΕ, τὰ τρίγωνα ΛΜΡ, ΛΝΣ εἶναι ἰσοδύναμα.

Πρόβλημα

92. Δίδεται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας ἓν σημεῖον καὶ μία χορδή· διὰ τοῦ σημείου νὰ ἀχθῇ δευτέρα χορδή, ἡ ὁποία νὰ διαιρῆται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τῆς πρώτης.



Σχ. 47.

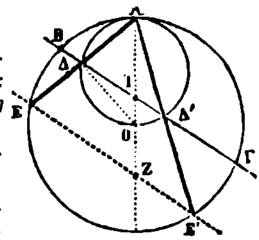
1) *Λύσις.* Ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ ΒΓ ἡ δοθεῖσα χορδή.

Ἐὰν ΑΔΕ εἶναι ἡ ζητουμένη χορδή, τὸ σημεῖον Δ ὀφείλει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ ἐπὶ τοῦ τόπου τῶν μέσων τῶν χορδῶν τῶν ἀγομένων διὰ τοῦ Α (ἀριθ. 80). Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΑΟ.

Τὰ σημεῖα Δ, Δ΄ ὁρίζουν τὰς ζητουμένας χορδάς.

2) *Λύσις.* Τὸ σημεῖον Ε ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ ἐπὶ τοῦ τόπου τῶν σημείων τοιούτων ὥστε, ἑκάστη γραμμὴ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α νὰ διαιρῆται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τῆς ΒΓ.

Ἄρα ἐπὶ μιᾶς τυχούσης εὐθείας γραμμῆς ΑΙΖ, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ΙΖ= ΑΙ καὶ νὰ φέρωμεν παράλληλον ΕΕ΄ πρὸς τὴν ΒΓ.



Σχ. 48.

93. Παρατήρησις. 1) Ὅταν ἡ λύσις ἑνὸς προβλήματος ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τομῆς μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς κύκλου, τὸ πρόβλημα δύναται νὰ ἔχῃ δύο, μίαν ἢ καμμίαν λύσιν.

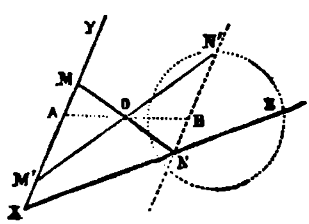
Θὰ ἀποφύγωμεν ἐνίοτε νὰ ἐπαναλάβωμεν αὐτὴν τὴν παρατήρησιν.

2) Ἡ δευτέρα λύσις δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ ὅταν ἀκόμη ἡ περιφέρεια ἀντικαθίσταται ὑπὸ μιᾶς τυχούσης καμπύλης.

Τὸ προτιθέμενον πρόβλημα δὲν εἶναι παρὰ μία ειδικὴ περίπτωσις τοῦ κατωτέρω προβλήματος :

Πρόβλημα

94. Δίδονται σημεῖον Ο καὶ δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι· διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἄγομεν τέμνουσαν ΜΟΝ περατουμένην ἐπὶ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, καὶ τοιαύτην ὥστε τὰ τμήματα ΟΜ, ΟΝ νὰ ἔχουν δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.



Σχ. 49.

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΧΨ, ΧΖ καὶ ἡ ζητουμένη ΜΟΝ διῃρημένη εἰς τὸν δοθέντα λόγον.

Τὸ σημεῖον Ν ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΧΖ καὶ ἐπὶ τοῦ τόπου τῶν σημείων τῶν διαιρούντων ἑκάστην εὐθεῖαν, ἀγομένην ἐκ τοῦ Ο ἐπὶ

τὴν XY εἰς τὸν δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$. Πρέπει λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν αὐτὸν τὸν τόπον. Πρὸς τοῦτο, φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΟΒ, λαμβάνομεν $\frac{AO}{OB} = \frac{\mu}{\nu}$, καὶ διὰ τοῦ σημείου Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΧΨ.

Θὰ ἔχωμεν: $\frac{OM}{ON} = \frac{\mu}{\nu}$.

95. Παρατήρησις. Διὰ μίαν εὐθεῖαν ΧΨ καὶ μίαν περιφέρειαν, ὁ ἴδιος τόπος δίδει:

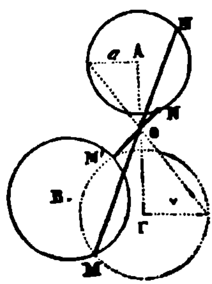
$$\frac{OM'}{ON'} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Διὰ μίαν εὐθεῖαν καὶ μίαν τυχοῦσαν καμπύλην ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω, διὰ μίαν περιφέρειαν καὶ μίαν τυχοῦσαν καμπύλην, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς (ἀρ. 96).

Πρόβλημα

96. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα μὲ τὸ ἀρ. 94, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι δίδονται δύο περιφέρειαι.

Ἔστωσαν δύο περιφέρειαι ἔχουσαι ἀντιστοίχως κέντρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β.



Σχ. 60.

Πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν τόπον τῶν σημείων, τῶν τοιούτων ὥστε: $\frac{OM}{ON} = \frac{\mu}{\nu}$.

Εἴδομεν (ἀρ. 65) ὅτι ὁ τόπος οὗτος εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον Γ, τοιαύτη ὥστε τὸ δοθὲν σημεῖον Ο νὰ εἶναι τὸ κέντρον ὁμοιότητος τῶν περιφερειῶν Α καὶ Γ. Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς περιφερείας Γ, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κέντρον τῆς Γ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΟΑ καὶ θὰ χωρίζῃ ταύτην εἰς λόγον $\frac{O\Gamma}{OA} = \frac{\mu}{\nu}$, ἡ δὲ ἀκτὶς γ, θὰ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\mu}{\nu}$.

Αἱ εὐθεῖαι ΜΝ καὶ Μ′ Ν′ εἶναι αἱ ζητούμεναι, διότι ἔχομεν:

$$\frac{OM}{ON} = \frac{O\Gamma}{OA} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Πρόβλημα

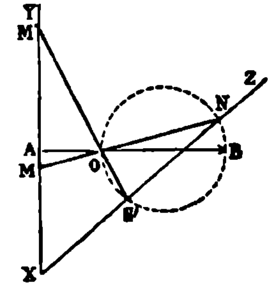
97. Διὰ δοθέντος σημείου Ο κειμένου ἐντὸς γωνίας ΨΧΖ, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΜΟΝ, τοιαύτη ὥστε τὸ γινόμενον ΟΜ.ΟΝ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2.

Ἀρκεῖ, ὡς ἀνωτέρω, νὰ προσδιορίσωμεν ἓν τῶν ἄκρων τῆς τεμνούσης, π. χ. τὸ Ν. Τὸ σημεῖον Ν, ὀφείλει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ

τῶν ΧΖ καὶ ἐπὶ τοῦ τόπου τῶν σημείων τῶν τοιούτων, ὥστε:

$$ΟΜ \,.\, ΟΝ = k^2$$

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν τελευταῖον τοῦτον τόπον (ἄρ. 67), πρέπει νὰ φέρωμεν τὴν κάθετον ΟΑ, νὰ λάβωμεν ΟΒ, τοιοῦτον ὥστε $ΟΒ \,.\, ΒΑ = k^2$, καὶ μὲ διάμετρον ΟΒ νὰ γράψωμεν περιφέρειαν. Τὰ σημεῖα τομῆς Ν καὶ Ν' αὐτῆς καὶ τῆς ΧΖ εἶναι τὰ ζητούμενα.



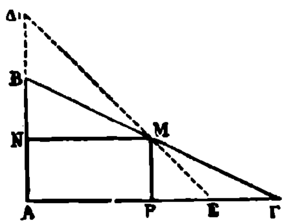
Σχ. 51

98. Παρατήρησις. Μία ἐκ τῶν εὐθειῶν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ μιᾶς περιφερείας ἢ ὑπὸ μιᾶς τυχούσης καμπύλης.

Δυνατὸν νὰ δοθοῦν δύο περιφέρειαι ἢ μία περιφέρεια καὶ μία τυχοῦσα καμπύλη.

Πρόβλημα

99. Δι' ἑνὸς σημείου τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου, νὰ ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας, εἰς τρόπον ὥστε τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον νὰ πληροῖ μερικοὺς τιθεμένους ὅρους.



Σχ. 52

α) Ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος 2ρ.

Ἄστωσαν ΑΒΓ τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον, τοιοῦτον ὥστε ἡ ἡμιπερίμετρος

$$ΜΝ + ΜΡ = ρ \,. \quad (σχ.\ 52).$$

Τὸ σημεῖον Μ ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ ἐπὶ τοῦ τόπου τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο ὀρθογωνίως τεμνομένων εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ἰσοῦται πρὸς ρ (ἄρ. 75). Ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ΑΔ=ΑΕ=ρ καὶ νὰ φέρωμεν τὴν ΔΜΕ.

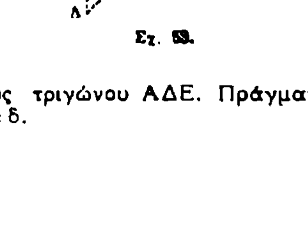
Πρέπει νὰ εἶναι:

$$ΑΒ < ρ < ΑΓ.$$

β) Ἡ διαφορὰ τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος δ.

Πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἰσοῦται πρὸς δοθεῖσαν γραμμὴν (ἄρ. 75), καὶ νὰ λάβωμεν:

$$ΑΔ = ΑΕ = δ \quad (σχ.\ 53).$$



Σχ. 53

Τὸ σημεῖον Μ θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ΔΕ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΔΕ. Πράγματι θὰ ἔχωμεν: $ΜΝ - ΜΡ = δ.$

Παρατήρησις. 1) Ἡ Ε'Μ' δίδει μίαν δευτέραν λύσιν:

$$M'P' - M'N' = \delta.$$

2) Ἡ διαφορὰ δύναται νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Ἔχομεν τότε τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον· ἡ γραμμὴ ΑΟ σχηματίζουσα γωνίαν $\frac{\pi}{4}$, ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν.

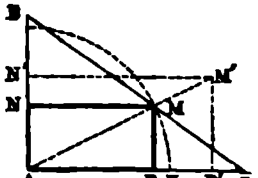
Ὑπάρχουν δύο λύσεις, ὅταν τὸ δ εἶναι μικρότερον τῆς μικροτέρας πλευρᾶς.

Μία μόνη, διὰ $AB < \delta < A\Gamma$.

Καμμία διὰ $\delta > A\Gamma$.

γ) Ὁ λόγος τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου νὰ ἰσοῦται πρὸς $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἤ: τὸ ὀρθογώνιον νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.



Σχ. 54.

Τὸ σημεῖον Μ ὀφείλει νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ νὰ ἰσοῦται πρὸς $\frac{\mu}{\nu}$.

Πρὸς κατασκευὴν τοῦ τόπου (σχ. 54) πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν ἓν σημεῖον Μ', τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις νὰ ἔχουν τὸν δοθέντα λόγον.

Πρὸς τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν $\frac{AP'}{AN'} = \frac{\mu}{\nu}$ καὶ νὰ φέρωμεν τὰς παραλλήλους Ρ'Μ' καὶ Ν'Μ' ἢ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ΑΡ'Μ'Ν' ἴσον πρὸς τὸ δοθέν.

Ὑπάρχουν δύο λύσεις, διότι δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΡ'Μ'Ν', εἰς τρόπον ὥστε ἡ μικρὴ βάσις νὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΑΓ.

δ) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῶν προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2.

Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α καὶ ἀκτῖνα ΑΚ=k, γράφομεν τόξον κύκλου (σχ. 54).

Ὑπάρχουν δύο λύσεις, μία ἢ καμμία.

ε) Εἰς ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2.

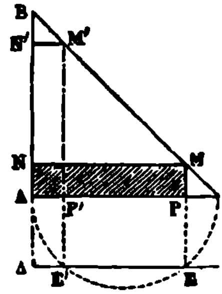
Θὰ πρέπει ν' ἀναζητήσωμεν τὴν τομὴν τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ (σχ. 55) καὶ τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς τόπου τῶν σημείων Μ, μὲ γινόμενον ἀποστάσεων σταθερὸν (ἀρ. 78)· ἀλλὰ μὴ δυνάμενοι νὰ κατασκευάσωμεν γεωμετρικῶς τὴν ὑπερβολήν, πρέπει νὰ ἀνατρέξωμεν ἀλλοῦ.

Τὸ ὀρθογώνιον θὰ προσδιορισθῇ, ὅταν ὁρισθῇ τὸ σημεῖον Ρ.

Τοῦ τριγώνου ὄντος ἰσοσκελοῦς, τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ΜΡ, ΜΝ εἶναι σταθερὸν καὶ ἰσοῦται πρὸς ΑΓ (ἀρ. 74). Ἀλλὰ ὅλα τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ΑΓ ὡς ἄθροισμα τῶν

πλευρῶν, ἔχουν ὡς ἐπιφάνειαν τὸ τετράγωνον τῶν διαφόρων τεταγμένων, ὡς ἡ ΡΕ, τοῦ ἡμικυκλίου ΑΕΓ, τοῦ γραφομένου μὲ διάμετρον τὴν ΑΓ. Ἄρα πρέπει νὰ λάβωμεν ΑΔ = k καὶ νὰ φέρωμεν τὴν παράλληλον ΔΕ πρὸς τὴν ΑΓ.

Θὰ ἔχωμεν: $ΑΡ . ΡΓ = ΕΡ^2$ ἢ $ΑΡ . ΡΜ = k^2$.



Σχ. 55.

Πρόβλημα

100. **Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος λ.**

α) Ἀρκεῖ προφανῶς νὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸ τέταρτον τῆς περιμέτρου καὶ νὰ θέσωμεν: $ΜΡ + ΜΝ = \frac{λ}{4}$.

Τὸ σημεῖον Μ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΜΓ (σχ. 56) καὶ ἐπὶ τοῦ τόπου τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο καθέτους εὐθείας ΑΒ, ΑΓ ἰσοῦται πρὸς $\frac{λ}{4}$· ἄρα πρέπει νὰ λάβωμεν $ΑΔ = ΑΕ = \frac{λ}{4}$, καὶ νὰ φέρωμεν τὴν ΔΕ (ἀρ. 99, α).

Παρατήρησις. Δύναται νὰ ἔχῃ δύο λύσεις, μίαν ἢ καμμίαν (ἀρ. 93).

(β) Ἡ διαφορὰ τῶν προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου νὰ ἰσοῦται πρὸς δ (σχ. 56).

Λαμβάνομεν: $ΑΖ = ΑΚ = \frac{δ}{4}$,

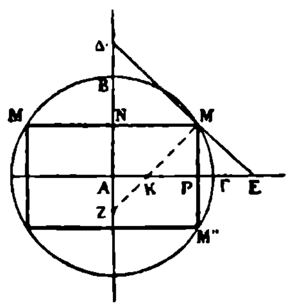
καὶ φέρομεν τὴν ΖΚΜ.

Εὑρίσκομεν: $ΜΝ - ΜΡ = \frac{δ}{2}$,

ἐξ οὗ $ΜΜ' - ΜΜ'' = δ$.

(γ) Ὁ λόγος τῶν προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου νὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{μ}{ν}$.

Ἐργαζόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὅπως προκειμένου περὶ τοῦ ἀντιστοίχου προβλήματος, τοῦ ἀφορῶντος τὸ τρίγωνον (ἀρ. 99 γ).



Σχ. 56.

(δ) Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον (σχ. 57).

Παριστῶμεν ὁλόκληρον τὴν ἐπιφάνειαν διὰ $4k^2$.

Θὰ ἔχωμεν: $ΑΡ . ΜΡ = k^2$·

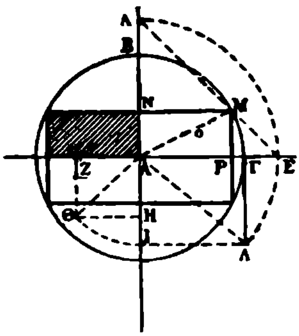
ἐξ ἄλλου $ΑΡ^2 + ΜΡ^2 = ΑΜ^2 = ρ^2$.

Ἄρα $ΑΡ^2 + 2ΑΡ . ΜΡ + ΜΡ^2 = (ΑΡ + ΜΡ)^2 = ρ^2 + 2k^2$.

Γνωρίζομεν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν καὶ ἀναγόμεθα εἰς γνωστὸν πρόβλημα (α).

Ἔστω ΑΖΘΗ τὸ δοθὲν τετράγωνον· $ΑΘ^2=2k^2$.

Λαμβάνομεν μῆκος ΑΙ ἴσον πρὸς ΑΘ καὶ φέρομεν τὰς καθέτους ΙΛ, ΓΛ.



Σχ. 57.

Ἔχομεν: $ΑΛ^2=ρ^2+2k^2$·

ἄρα $ΑΛ=ΑΡ+ΜΡ$.

Κατόπιν λαμβάνομεν ΑΕ καὶ ΑΔ ἴσα πρὸς ΑΛ, καὶ φέρομεν τὸν τόπον ΔΕ.

(ε) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον (σχ. 58).

Θὰ ἔπρεπε, ὡς εἰς τὸν ἀρ. 99 (ε), νὰ κατασκευάσωμεν ὑπερβολὴν καὶ νὰ λάβωμεν τὴν τομήν της μετὰ τοῦ δοθέντος κύκλου, ἀλλὰ προτιμῶμεν ν' ἀντικαταστήσωμεν τὴν καμπύλην αὐτὴν διὰ μιᾶς εὐθείας.

Παριστῶντες τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων διὰ $4k^2$, θὰ ἔχωμεν:

$$ΜΝ^2-ΜΡ^2=k^2,$$

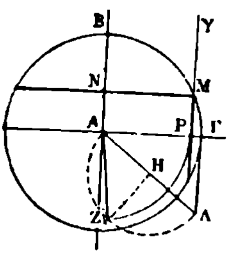
ἐξ ἄλλου

$$ΜΝ^2+ΜΡ^2=ρ^2.$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη ἔχομεν, $2ΜΝ^2=ρ^2+k^2$

$$ΜΝ^2=\frac{ρ^2+k^2}{2} \text{ ἢ } ΜΝ=\sqrt{\frac{ρ^2+k^2}{2}}.$$

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν αὐτὸ τὸ μῆκος. Πρέπει νὰ λάβωμεν $ΓΛ=k$, ὁπότε $ΑΛ^2=ρ^2+k^2$, κατόπιν νὰ ὑψώσωμεν κάθετον ΗΖ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΛ, μέχρι τῆς τομῆς της μετὰ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΖΛ.



Σχ. 58

Θὰ ἔχωμεν $ΑΖ^2=\frac{ρ^2+k^2}{2}$.

Τέλος λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς ΑΓ τμῆμα ΑΡ ἴσον πρὸς ΑΖ, φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΡΥ, παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἥτις εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἀπὸ τὴν ΑΒ, ἀπόστασιν ΜΝ. Ἄρα τὸ Μ εἶναι ἡ κορυφὴ τοῦ ὀρθογωνίου.

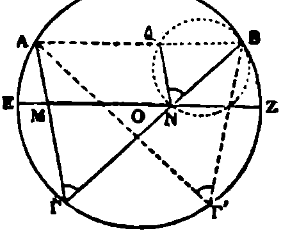
Παρατήρησις. Τὰ ἤδη λυθέντα προβλήματα ὁδηγοῦν εἰς τὰς ἀκολούθους παρατηρήσεις:

Εἰς μερικὰ προβλήματα χρησιμοποιοῦμεν ἀμέσως τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους (ἀρ. 90, 91, 92, 94), ἐνῶ δι' ἄλλα προβλήματα πρέπει νὰ ἑτοιμάσωμεν τὴν λύσιν.

Τὰ δοθέντα παραδείγματα (99 ε, 100 δ, ε) δύνανται ν' ἀναφερθοῦν εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν μέθοδον (ἀρ. 301), ἐνῶ τὰ δύο ἑπόμενα ἀναζητοῦν βοηθητικὰς κατασκευὰς (ἀρ. 135). Τὸ πρόβλημα 101 δύναται ν' ἀναφερθῇ εἰς τὴν μέθοδον τῆς μεταφορᾶς.

Πρόβλημα

101. Δίδονται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας δύο σημεῖα Α καὶ Β, καθὼς καὶ μία διάμετρος αὐτῆς ΕΖ σταθερά· νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖον Γ, τοιοῦτον ὥστε αἱ χορδαὶ ΓΑ καὶ ΓΒ, νὰ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς σταθερᾶς διαμέτρου τμῆμα ΜΝ δοθέντος μήκους λ.



Σχ. 59.

Ὑποθέτομεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΜΝ=λ.

Γνωρίζομεν τὴν θέσιν τῶν σημείων Α, Β, καὶ συνεπῶς τὸ μέγεθος τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας Γ. Γνωρίζομεν ἐπίσης τὸ δοθὲν μῆκος.

Φέροντες τὰς παραλλήλους ΝΔ, ΑΔ πρὸς τὰς εὐθείας ΑΜ, ΜΝ, σχηματίζομεν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ΑΔ=ΜΝ=λ· ἐπὶ πλέον αἱ γωνίαι ΔΝΒ καὶ Γ εἶναι ἴσαι.

Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Δ δύναται νὰ προσδιορισθῇ ἀπ' εὐθείας, ἄρα ἀγόμεθα εἰς τὴν κατωτέρω κατασκευήν:

Διὰ τοῦ σημείου Α, πρέπει νὰ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν σταθερὰν διάμετρον καὶ νὰ λάβωμεν ΑΔ=λ. Ἐπὶ τῆς ΒΔ νὰ γράψωμεν τόξον κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γνωστὴν Γ καὶ κατόπιν νὰ φέρωμεν τὰς ΒΝΓ καὶ ΓΑ.

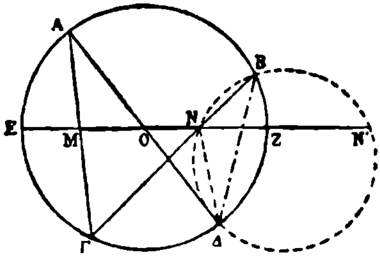
Θὰ ἔχωμεν: ΜΝ=λ· τὸ σημεῖον Γ' δίδει μίαν δευτέραν λύσιν.

Πρόβλημα

102. Δίδονται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας δύο σημεῖα Α καὶ Β καθὼς καὶ μία σταθερὰ διάμετος ΕΖ· νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖον Γ, τοιοῦτον ὥστε αἱ χορδαὶ ΓΑ, ΓΒ νὰ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς σταθερᾶς διαμέτρου, ἴσα τμήματα ΟΜ καὶ ΟΝ, ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου Ο.

Ὑποθέτομεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΟΜ=ΟΝ.

Φέροντες τὴν διάμετρον ΑΟΔ καὶ ἑνοῦντες τὸ σημεῖον Ν μὲ τὸ σημεῖον Δ, κατασκευάζομεν δύο τρίγωνα ΑΟΜ, ΔΟΝ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην Ο περιεχομένην μεταξὺ ἀντιστοίχως ἴσων πλευρῶν· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΝΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς γωνίας ΒΝΔ.



Σχ 60

Πράγματι ἡ γωνία ΔΝΓ=Γ.

Ἄρα ἡ γωνία ΔΝΓ εἶναι γνωστή, διότι ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΒ. Κατόπιν ἡ γωνία ΒΝΔ, παραπληρωματικὴ τῆς ΔΝΓ, εἶναι ἐπίσης παραπληρωματικὴ τῆς Γ· ἀγόμεθα λοιπὸν εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν:

Πρέπει νὰ φέρωμεν τὴν διάμετρον ΑΟΔ· ἐπὶ τῆς ΒΔ νὰ γρά-

ψωμεν τόξον δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν παραπληρωματικὴν τῆς γνωστῆς γωνίας Γ.

Οὕτω προσδιορίζεται τὸ σημεῖον Ν· φέρομεν τὴν ΒΝΓ καὶ ἑνοῦμεν τὸ Γ μετὰ τοῦ Α.

Παρατήρησις. Διὰ τὸ σημεῖον Ν' ἀντιστοιχεῖ μία δευτέρα λύσις. Ἡ γωνία ΒΝ'Δ, παραπληρωματικὴ τῆς ΒΝΔ, ἰσοῦται μὲ τὴν Γ.

Χρῆσις δύο γεωμετρικῶν τόπων

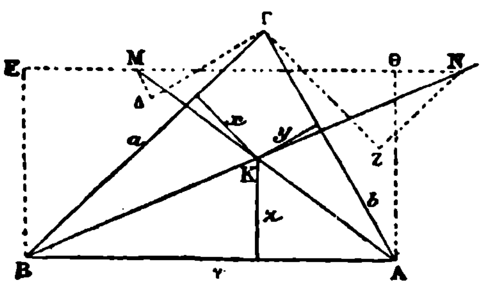
Ὅταν τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν, δὲν κεῖται ἐπὶ μιᾶς δοθείσης γραμμῆς, πρέπει νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὴν σύγχρονον χρῆσιν δύο γεωμετρικῶν τόπων (ἀριθ. 88)· ἀλλὰ πρέπει νὰ ἀναζητήσωμεν τοὺς τόπους τοὺς δυναμένους εὐκολώτερον νὰ κατασκευασθῶσι ἔχοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ σχεδιάσωμεν παρὰ μόνον εὐθείας καὶ περιφερείας[9].

Ἰδοὺ μερικὰ παραδείγματα:

Πρόβλημα

103. Εἰς δοθὲν τρίγωνον, νὰ προσδιορισθῇ σημεῖον τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις x, y, z ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς α, β, γ τοῦ τριγώνου, νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον μεταξύ των, τὸν ὁποῖον καὶ αἱ ἀντίστοιχοι πλευραί.

Διὰ τὰς δύο κορυφὰς Α καὶ Β, ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ ἡ εὐ-



Σχ. 61.

θεῖα ἡ ὁποία εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον καὶ αἱ πλευραί (ἀριθ. 60).

---

9. Σημ. μετ. Θεμελιώδεις κατασκευαί, αἵτινες εἶναι καὶ ἡ προϋπόθεσις τῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν, εἶναι ἡ κατασκευὴ εὐθείας γραμμῆς (ἀπεριορίστου) διερχομένης διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἡ κατασκευὴ περιφερείας κύκλου, ἐχούσης δοθὲν κέντρον καὶ δοθεῖσαν ἀκτῖνα. Τὰ ὄργανα τὰ ὁποῖα χρειάζονται πρὸς κατασκευὴν τῶν γραμμῶν τούτων εἶναι ὁ κανὼν καὶ ὁ διαβήτης· τῇ βοηθείᾳ τῶν ὀργάνων τούτων δυνάμεθα ἐπὶ ἑνὸς φύλλου χάρτου, θεωρητικῶς ἐπιπέδου, νὰ χαράξωμεν διὰ συνεχοῦς κινήσεως μολυβδίδος, μίαν εὐθεῖαν ἢ μίαν περιφέρειαν. Μὲ αὐτὰ νὰ ὄργανα (δηλαδὴ μὲ κανόνα καὶ διαβήτην) καλούμεθα νὰ λύσωμεν τὰ προτιθέμενα προβλήματα. Αὐτὴν τὴν ὑπόμνησιν κάμει ἐνταῦθα ὁ συγγραφεύς.

Διὰ τὴν κορυφὴν Α, ὑψοῦμεν εἰς τὰ πέρατα τῶν πλευρῶν β καὶ γ καθέτους ΓΔ, ΒΕ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον τὸν ὁποῖον ἔχουν καὶ αἱ πλευραὶ π. χ. $\frac{1}{2}$· κατόπιν διὰ τῶν Δ, Ε παραλλήλους ΔΜ, ΕΜ πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς β καὶ γ· τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὸν τόπον ΑΜ.

Ἐργαζόμεθα ὁμοίως διὰ τὴν κορυφὴν Β, καὶ εὑρίσκομεν ὡς τόπον τὴν ΒΝ· ἄρα τὸ σημεῖον Κ ἐκπληροῖ τοὺς ζητουμένους ὅρους, διότι ἔχομεν:

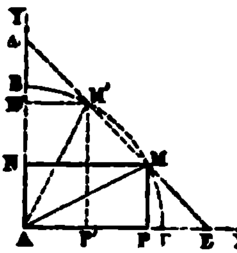
$$\frac{x}{z}=\frac{\alpha}{\gamma} \text{ καὶ } \frac{y}{z}=\frac{\beta}{\gamma}$$

ἤ $$x:y:z=\alpha:\beta:\gamma.$$

Τὸ σημεῖον Κ ὀνομάζεται σημεῖον τοῦ Lemoine.

Πρόβλημα

104. **Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ περίμετρος 2λ καὶ τὸ ἄθροισμα k^2 τῶν τετραγώνων τῶν προσκειμένων πλευρῶν.**



Σχ. 62.

Ἔστω ΧΑΥ μία ὀρθὴ γωνία.

Ἐὰν ἀποβλέψωμεν εἰς τὴν πρώτην τῶν συνθηκῶν, ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ λάβωμεν

$$ΑΕ = ΑΔ = \lambda.$$

Ἡ κορυφὴ Μ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΔΕ.

Ἐὰν ἀποβλέψωμεν εἰς τὴν δευτέραν τῶν συνθηκῶν γράφομεν ἓν τόξον κύκλου κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος k.

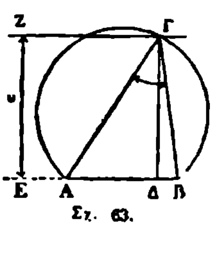
Ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων τόπων δίδει τὴν κορυφὴν Μ.

Πράγματι ἔχομεν $ΜΝ + ΜΡ = ΑΕ = \lambda.$

$$ΜΝ^2 + ΜΡ^2 = ΑΜ^2 = k^2.$$

Πρόβλημα

105. **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου διδονται ἡ βάσις ΑΒ, ἡ ἀπέναντι γωνία καὶ τὸ ὕψος τὸ ἀγόμενον ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ταύτης.**



Σχ. 63.

Ἐὰν δὲν ἀποβλέψωμεν εἰς τὸ ὕψος, ἡ κορυφὴ Γ θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓΒ, τοῦ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν.

Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα βάσιν τὴν ΑΒ καὶ ὕψος υ, ἔχουν τὰς κορυφὰς των ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΖΓ, παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ εἰς ἀπόστασιν υ ἀπ' αὐτῆς.

Ὅθεν ἡ κορυφὴ Γ θὰ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τοῦ τόξου τοῦ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ τῆς παραλλήλου ΖΓ.

Πρόβλημα

106. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ βάσις, ἡ ἀπέναντι γωνία καὶ τὸ γινόμενον k^2, τῶν περιεχουσῶν τὴν γωνίαν πλευρῶν.

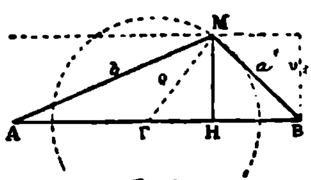
1) Ἡ κορυφὴ ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τόξου κύκλου, δεχομένου τὴν δοθεῖσαν γωνίαν. Ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι γνωρίζομεν τὴν διάμετρον δ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου.
Ἀλλὰ ὡς γνωστὸν τὸ γινόμενον k^2 δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ἐπὶ τὸ ὕψος υ (τὸ ἀγόμενον ἐπὶ τὴν τρίτην πλευράν), ἄρα

$$υ = \frac{k^2}{δ}.$$

2) Ἡ κορυφὴ λοιπὸν θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ μιᾶς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν καὶ εἰς ἀπόστασιν $υ = \frac{k^2}{δ}$.

Πρόβλημα

107. Κατασκευάσατε ἓν τρίγωνον, γνωρίζοντες τὴν βάσιν ΑΒ, τὸ ὕψος υ (ἐπὶ τὴν ΑΒ) καὶ τὴν τιμὴν k^2 τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.



Σχ. 64.

Ἐκ τῆς σχέσεως $α^2+β^2=k^2$, προκύπτει ὅτι ἡ κορυφὴ Μ θὰ κεῖται, ἐπὶ τοῦ τόπου τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι k^2.
Ὁ τόπος οὗτος εἶναι μία περιφέρεια γραφομένη μὲ κέντρον τὸ μέσον Γ τῆς ΑΒ καὶ μὲ ἀκτῖνα

$$ρ = \sqrt{\frac{1}{2}k^2 - ΑΓ^2}.$$

Κατόπιν ἂν παραλείψωμεν τὴν συνθήκην $α+β^2=k^2$ καὶ θεωρήσωμεν τὴν συνθήκην τοῦ νὰ ἔχῃ τὸ τρίγωνον ὕψος υ δοθέν, ἀναγνωρίζομεν ὅτι ἡ κορυφὴ Μ ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ μιᾶς παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ καὶ εἰς ἀπόστασιν υ ἀπ' αὐτῆς. Ἄρα ἡ κορυφὴ Μ προσδιορίζεται διὰ τῆς τομῆς τῆς ὡς ἄνω περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν.

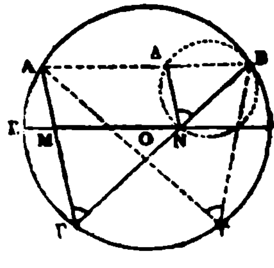
Πρόβλημα

108. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται τὸ μῆκος τῆς βάσεως, μία εὐθεῖα ἐφ' ἧς ἡ βάσις αὕτη ὀφείλει νὰ εὑρίσκεται, ἡ ἀπέναντι γωνία καὶ γνωρίζοντες ὅτι αἱ πλευραὶ αἵτινες περιέχουν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ὀφείλουν νὰ διέρχωνται διὰ δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β.

Ἡ κορυφὴ Γ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου κύκλου, δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Γ καὶ γραφομένου ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ.

Ἡ θεώρησις τοῦ τόξου τούτου ΑΓΒ, ἀρκεῖ διὰ νὰ ἀναγάγωμεν τὸ παρὸν πρόβλημα εἰς ἓν πρόβλημα ἤδη γνωστὸν (ἀριθ. 101), ἀλλὰ ὅπου ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἀντικαθίσταται διὰ μιᾶς σταθερᾶς διαμέτρου. Πράγματι, δυνάμεθα νὰ περιορισθῶμεν εἰς τὰς ἑπομένας κατασκευάς:

Διὰ τοῦ σημείου Α, ἄγομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν ΕΖ, λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τὸ τμῆμα ΑΔ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν μῆκος τῆς βάσεως[9], ἐπὶ τῆς ΒΔ γράφομεν ἓν τόξον κύκλου δεχόμενον τὴν δοθεῖσαν γωνίαν, ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον Β μὲ τὸ σημεῖον Ν, ὅπου τὸ τόξον τοῦ κύκλου τέμνει τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΕΖ, φέρομεν τὴν ΒΝΓ καὶ ἐκ τοῦ Α τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΝ. Τὸ τρίγωνον ΜΓΝ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 68.

109. Παρατηρήσεις. 1) Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: *Δίδονται μία εὐθεῖα ΕΖ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτῆς, ἐπίσης ἓν μῆκος ΜΝ=λ, θέσατε τὸ δοθὲν μῆκος ἐπὶ τῆς ΕΖ, οὕτως ὥστε ἡ γωνία Γ ἡ σχηματιζομένη ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΜ καὶ ΒΝ νὰ ἰσοῦται μὲ δοθεῖσαν γωνίαν.*

2) Ἡ νέα διατύπωσις μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ νὰ θέσωμεν ἓν ἐνδιαφέρον πρόβλημα, τὸ ὁποῖον θὰ μᾶς ἀπασχολήσῃ εἰς τὴν παράγραφον τὴν σχετικὴν πρὸς τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα. Ἰδοὺ τὸ πρόβλημα: *Πῶς μεταβάλλεται ἡ γωνία Γ, ὅταν τὸ τμῆμα ΜΝ μετακινεῖται ἐπὶ τῆς ΕΖ;* (βλέπε ἀριθ. 253).

Πρόβλημα

110. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ γωνίαι καὶ αἱ διαγώνιοι.

Εἰς πᾶν τραπέζιον, ὁ λόγος τῶν τμημάτων ΑΟ καὶ ΟΒ τῶν διαγωνίων (Ο ≡ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων), ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον αὐτῶν τούτων τῶν διαγωνίων. Ἔστωσαν δ καὶ δ' τὰ μήκη τῶν διαγωνίων. Ἐπὶ τυχούσης εὐθείας ΑΒ σχηματίζομεν τὰς δοθείσας γωνίας Α καὶ Β, γράφομεν τὸν τόπον ΔΔ' τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β ἰσοῦται πρὸς $\frac{\delta}{\delta'}$ καὶ φέρομεν τὴν διάμεσον[10] ΜΖ, ἥτις ἐν γένει τέμνει τὸν τόπον εἰς δύο σημεῖα[11]. Φέρομεν τὰς ΑΟΓ καὶ ΒΟΕ

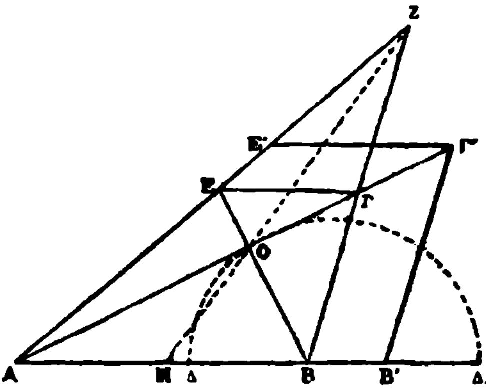
---

9. Σημ. μετ. Ἡ ΑΔ δὲν εἶναι ἐπ' εὐθείας μὲ τὴν ΔΒ. δηλαδὴ ἡ ΑΒ δὲν εἶναι παράλληλος ἐν γένει πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐπίσης ἡ ΕΖ δὲν εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου. εἰς τὸ σχῆμα φαίνεται ὡς διάμετρος. διότι εἰς τὸ βιβλίον τῶν F.G.M. ἔχει ἐπαναληφθῇ τὸ σχ. 69.

10. Σημ. μετ. Διάμεσος τραπεζίου καλεῖται ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ.

11. Σημ. μετ. Ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου διέρχεται διὰ τῆς τομῆς Ζ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ, τὸ τρίγωνον ὅμως ΑΒΖ δυνάμεθα νὰ τὸ κατασκευάσωμεν. καθόσον γνωρίζομεν τὰς γωνίας τοῦ τραπεζίου καὶ ἑπομένως γνωρίζομεν νὰ κατασκευάσωμεν καὶ τὴν διάμεσον.

τὸ σχηματιζόμενον σχῆμα εἶναι ἓν τραπέζιον, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται· ἐπὶ πλέον, τοῦτο εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ζητούμενον τραπέζιον. Ἐπὶ τῆς ΑΓ λαμβάνομεν ΑΓ′=δ καὶ φέρομεν τὰς παραλλήλους Γ′Ε′, Γ′Β′· τὸ τραπέζιον ΑΒ′Γ′Ε′ εἶναι τὸ ζητούμενον.

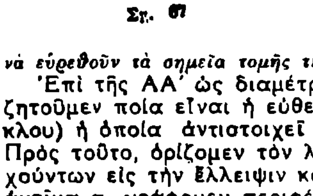


Σχ. 66.

111. Παρατήρησις. Δὲν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων, παρὰ γεωμετρικοὺς τόπους ἀποτελουμένους ἀπὸ εὐθείας ἢ περιφερείας. Ἐὰν τὸ πρὸς προσδιορισμὸν σημεῖοο ἀναφέρεται εἰς ἕνα τόπον, τὸν ὁποῖον δὲν δυνάμεθα νὰ σχεδιάσωμεν γεωμετρικῶς, πρέπει νὰ ἀναζητήσωμεν μίαν εἰδικὴν λύσιν, ἡ ὁποία δὲν ἀπαιτεῖ τὴν κατασκευὴν τοῦ τόπου. Οὕτω ἠργάσθημεν προηγουμένως εἰς τοὺς ἀριθμ. 99ε καὶ 100δ. Ἰδοὺ μερικὰ ἄλλα παραδείγματα:

Πρόβλημα

112. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ βάσις ΕΕ′, τὸ ἀντίστοιχον ὕψος υ καὶ τὸ ἄθροισμα 2α τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.



Σχ. 67

Ἔστω ΜΡ=υ, ΜΕ+ΜΕ′=2α.

Ἡ κορυφὴ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, εἰς ἀπόστασιν υ καὶ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως τῆς ἐχούσης ἑστίας Ε καὶ Ε′ καὶ μεγάλον ἄξονα 2α. Τὸ προτιθέμενον πρόβλημα, ἀνάγεται λοιπὸν εἰς τὸ γνωστόν:

Χωρὶς νὰ κατασκευασθῇ ἡ καμπύλη, νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ἐλλείψεως καὶ μιᾶς εὐθείας ΜΜ′.

Ἐπὶ τῆς ΑΑ′ ὡς διαμέτρου, γράφομεν τὸν πρωτεύοντα κύκλον, ζητοῦμεν ποία εἶναι ἡ εὐθεία ΝΝ′ (χορδὴ τοῦ πρωτεύοντος κύκλου) ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ΜΜ′ (χορδὴν τῆς ἐλλείψεως). Πρὸς τοῦτο, ὁρίζομεν τὸν λόγον τῶν τεταγμένων τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὴν ἔλλειψιν καὶ εἰς τὸν κύκλον. Μὲ κέντρον Ε καὶ ἀκτῖνα α, γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν κάθετον ΟΔ εἰς

τὸ σημεῖον Β· ἡ ΟΒ εἶναι ὁ μικρὸς ἄξων τῆς ἐλλείψεως. Φέροντες κατόπιν τὰς ΑΘ, ΔΘ, ΒΖ καὶ τὰς εὐθείας ΟΘ καὶ ΟΖ, προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον Ι καὶ τὴν τεταγμένην του· ἡ τομὴ Ξ τῆς τεταγμένης ταύτης καὶ τῆς ΟΘ, ὁρίζει τὴν ΞΛ ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ΗΙ. Ἡ τομὴ τῆς περιφερείας καὶ τῆς ΞΛ δίδει τὰ σημεῖα Ν καὶ Ν′ καὶ συνεπῶς τὰ Μ καὶ Μ′.

Τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὴν ἔλλειψιν, διότι ἔχομεν:

$$\frac{MP}{NP}=\frac{IK}{\Xi K}=\frac{ZA}{\Theta A}=\frac{\beta}{\alpha}$$

ἄρα ΜΕ + ΜΕ′ = 2α καὶ ΕΜΕ′ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

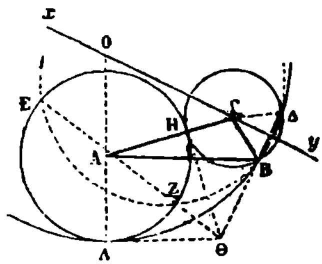
Πρόβλημα

113. (α) **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ βάσις, ἡ διαφορὰ δ τῶν ἄλλων πλευρῶν καὶ μία εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ὀφείλει νὰ κεῖται ἡ ἄγνωστος κορυφή.**

Ἔστωσαν ΑΒ ἡ δοθεῖσα βάσις καὶ *xy* ἡ εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ὀφείλει νὰ κεῖται ἡ κορυφὴ Γ.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ

ΑΓ − ΒΓ = δ.



Σχ. 68.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σημεῖον Γ θὰ κεῖται ἐπὶ μιᾶς ὑπερβολῆς, ἐχούσης τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὡς ἑστίας καὶ μῆκος πρωτεύοντος ἄξονος δ.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται λοιπὸν εἰς τὸ ἑξῆς:

(β) **Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ σημεῖα τομῆς μιᾶς εὐθείας *xy* καὶ μιᾶς ὑπερβολῆς τῆς ὁποίας γνωρίζομεν τὰς ἑστίας Α, Β καὶ τὸ μῆκος τοῦ πρωτεύοντος ἄξονος.**

Γράφοντες μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα δ, εὑρίσκομεν: ΓΒ = ΓΗ.

Ἀναγόμεθα λοιπὸν εἰς τὸ πρόβλημα:

(γ) **Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ δοθείσης εὐθείας *xy*, διερχομένη διὰ σημείου Β καὶ ἐφαπτομένη περιφερείας ΑΗ.**

Ἀλλὰ ὁ κύκλος ὁ ἔχων τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς *xy* καὶ διερχόμενος διὰ τοῦ Β θὰ διέρχεται ἀναγκαίως καὶ διὰ τοῦ Δ συμμετρικοῦ πρὸς τὸ Β ὡς πρὸς τὸν ἄξονα *xy*.

Τὸ πρόβλημα λοιπόν, δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

(δ) **Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων Β καὶ Δ καὶ ἐφαπτομένη ἑνὸς κύκλου ΑΗ.**

Ἀλλὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι γνωστόν.

Οὕτω, διὰ τῶν Β καὶ Δ φέρομεν τυχόντα κύκλον, τέμνοντα τὸν δοθέντα ΑΗ εἰς Ε καὶ Ζ καὶ φέρομεν τὰς ΕΖΘ καὶ ΒΔΘ. Φέρομεν κατόπιν ἐκ τοῦ Θ τὰς ἐφαπτομένας ΘΗ, ΘΛ καὶ κατασκευάζομεν μίαν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Β, Δ, Η

ἥτις δίδει μίαν πρώτην λύσιν Γ. Μία ἄλλη περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν Β,Δ,Λ δίδει τὴν δευτέραν λύσιν Ο.

Διότι ΟΒ—ΟΑ=δ.

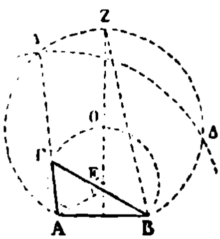
114. Σημείωσις. Εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα, ἡ ἐξέτασις τοῦ τόπου, τὸν ὁποῖον δὲν δυνάμεθα νὰ σχεδιάσωμεν, μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν λύσιν.

Εἰς τὰ κατωτέρω προβλήματα (ἀριθ. 115, 117), ἡ λύσις δίδει ἀπ' εὐθείας ἀπάντησιν εἰς ἓν πρόβλημα σχετικὸν πρὸς τὰς κωνικάς.

Προβλήματα

115. **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν βάσιν ΑΒ, τὴν ἀπέναντι γωνίαν καὶ τὸ ἄθροισμα 2α τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν πλευρῶν.**

1) Ἡ κορυφὴ Γ θὰ κεῖται ἐπὶ τόξου κύκλου δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν.



Σχ. 69.

2) Ἡ αὐτὴ κορυφὴ θὰ κεῖται ἐπὶ ἐλλείψεως ἐχούσης τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὡς ἑστίας καὶ μεγάλον ἄξονα 2α, ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἀπ' εὐθείας αὐτὴν τὴν ἔλλειψιν, πρέπει νὰ ζητήσωμεν μίαν ἄλλην λύσιν.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω :

$$ΑΓ+ΓΒ=2α.$$

Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΑΓ τμῆμα ΓΔ=ΓΒ, σχηματίζομεν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΑΓΒ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἴσων γωνιῶν ΓΒΔ καὶ ΓΔΒ, ἄρα ἡ γωνία Δ ειναι σταθερὰ ὡς ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης γωνίας Γ. Γράφο ν ἑπομένως ἐπὶ τῆς ΑΒ τόξον κύκλου δεχόμενον τὴν γωνίαν $\frac{}{2}$ καὶ μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα 2α τέμνομεν αὐτὸ εἰς Δ καὶ Δ' καὶ φέρομεν τὰς ΔΑ καὶ ΒΓ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι μία τῶν λύσεων.

Τὸ λυθὲν προβλημα. δίδει τὴν λύσιν καὶ τοῦ ἑπομένου.

116. Χωρὶς νὰ σχεδιασθῇ μία ἔλλειψις, τῆς ὁποίας γνωρίζομεν τὰς ἑστίας Α καὶ Β καὶ τὸ μῆκος 2α τοῦ μεγάλου ἄξονος, νὰ προσδιορισθοῦν τὰ σημεῖα ὅπου ἡ καμπύλη αὐτη τέμνεται ὑπὸ μιᾶς περιφερείας ΑΓΒ. τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος.

Παρατηρήσεις. 1) Διὰ νὰ γράψωμεν τὸ τόξον τὸ δεχόμενον τὴν γωνίαν $\frac{Γ}{2}$, λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Ο ὡς κέντρον καὶ τὴν ΟΒ ὡς ἀκτῖνα. Ἢ περιοριζόμεθα εἰς τὸ νὰ γράψωμεν ἀπ' εὐθείας τόξον δεχόμενον τὴν γωνίαν $\frac{Γ}{2}$ καὶ φέρωμεν μίαν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΔ. μέχρις ὅτου τμήση τὴν ΑΔ.

2) Ἐὰν δίδεται ἡ διαφορὰ τῶν πλευρῶν, λαμβάνομεν ἐκ τῆς ΓΒ τμῆμα ΓΕ=ΓΑ, ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

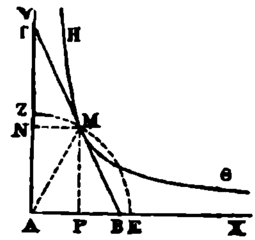
$$Α \quad Ε \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{Γ}{2}, \text{ ἄρα } ΑΕΒ = \frac{\pi}{2} + \frac{Γ}{2}.$$

Ἐπὶ τῆς ΑΒ γράφομεν τοξον κύκλου δεχόμενον την γωνίαν $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\Gamma}{2}\right)$ καὶ μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν διαφοράν, γράφομεν περιφέρειαν κύκλου τέμνουσαν τὸ γραφὲν τόξον εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Πρόβλημα

117. Νὰ τμηθοῦν αἱ πλευραὶ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας δι' εὐθείας γραμμῆς, οὕτως ὥστε ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας τμῆμα, νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος καὶ ἀφ' ἑτέρου τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου, νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον

Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, μὲ ἐμβαδὸν $2k^2$ καὶ πλευρὰν ΒΓ=2λ.



Σχ. 70.

Διὰ τοῦ μέσου Μ τῆς ὑποτεινούσης, φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΡΜΝ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδὴ μὲ k^2, ἐξ ἄλλου δὲ

$$\text{ΑΜ}=\frac{1}{2}\,\text{ΒΓ} \quad \lambda.$$

Συνεπῶς τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ κύκλου κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος λ. Πρέπει κατόπιν νὰ ἐγγράψωμεν ἓν ὀρθογώνιον ΑΡΜΝ, ἐμβαδοῦ k^2. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἤδη λελυμένον (ἀριθ. 100, δ). Τέλος πρέπει νὰ λάβωμεν ΡΒ=ΑΡ καὶ νὰ φέρωμεν τὴν ΒΜΓ.

118. Ὁ τόπος τῶν σημείων Μ, τῶν τοιούτων ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο ὀρθογωνίως τεμνομένων εὐθειῶν νὰ ἰσοῦται μὲ σταθερὰν ποσότητα k^2, εἶναι μία ὑπερβολὴ ἰσοσκελής, μὲ ἀσυμπτώτους [12] τὰς ΑΧ καὶ ΑΥ καὶ δύναμιν k^2. Συνεπῶς ἐλύσαμεν ἤδη, ὡς ἀνωτέρω, τὸ ἑπόμενον πρόβλημα:

Δίδεται ἰσοσκελὴς ὑπερβολή, διὰ τῶν ἀσυμπτώτων της καὶ τῆς δυνάμεώς της k^2 νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς ὑπερβολῆς χωρὶς νὰ κατασκευασθῇ ἡ καμπύλη, οὕτως ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος 2λ.

§ III. *Περιβάλλουσαι*

119. Ὁρισμός. Καλοῦμεν *περιβάλλουσαν καμπύλην* ἢ ἁπλῶς *περιβάλλουσαν* μιᾶς κινητῆς εὐθείας, τὴν καμπύλην ἥτις ἐφάπτεται τῆς κινητῆς εὐθείας, εἰς κάθε θέσιν ποὺ εἶναι δυνατὸν νὰ καταλάβῃ ἡ κινητὴ εὐθεῖα.

---

12. Σημ. μετ. Ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς καλοῦνται αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ δύο ἐπ' ἄπειρον σημεῖα της. Αὗται διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, εἶναι δὲ κάθετοι, ὅταν ἡ ὑπερβολὴ εἶναι ἰσοσκελής.

Δύναμις τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς καλεῖται τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τῆς κορυφῆς της ἀπὸ τινος τῶν ἀσυμπτώτων.

Παράδειγμα. Ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν τῶν ἀπεχουσῶν δοθεῖσαν ἀπόστασιν ἀπὸ δοθέντος σημείου, εἶναι περιφέρεια κύκλου ἔχουσα τὸ δοθὲν σημεῖον ὡς κέντρον καὶ τὴν δοθεῖσαν ἀπόστασιν ὡς ἀκτῖνα.

Ἡ περιβάλλουσα καταλήγει εἰς σημεῖον, ὅταν ἡ δοθεῖσα ἀπόστασις καταστῇ μηδενική.

Ἡ περιβάλλουσα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σχηματιζομένη, ὑπὸ τῆς σειρᾶς τῶν σημείων τομῆς τῶν ἐφαπτομένων της, λαμβανομένων ἀνὰ δύο, ὅταν αἱ θέσεις τῶν ἐφαπτομένων ἀπέχουν ἀπειροστῶς ἡ μία τῆς ἄλλης.

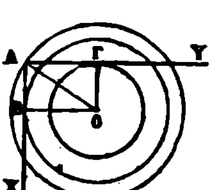
120. *Κινητὴ εὐθεῖα.* Ἡ εὐθεῖα ἡ γεννῶσα τὴν περιβάλλουσαν, ὑπόκειται κατὰ τὴν κινησίν της εἰς ἕνα ὡρισμένον νόμον, τουτέστην ἑκάστη ἐφαπτομένη ὑπόκειται εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἰδιότητα καὶ τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τούτων ἀποτελεῖ μίαν οἰκογένειαν εὐθειῶν, ὅπως οἱ γεωμετρικοὶ τόποι ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἓν σύνολον σημείων τὰ ὁποῖα ὑπόκεινται εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἰδιότητα.

121. *Χρῆσις τῶν περιβαλλουσῶν.* Ὅπως ἓν σημεῖον ὁρίζεται διὰ τῆς τομῆς δύο τόπων, οὕτω μία εὐθεῖα δύναται νὰ ὁρισθῇ διὰ δύο περιβαλλουσῶν, διότι αὐτὴ ὀφείλει νὰ ἐφάπτεται ἑκάστης τῶν περιβαλλουσῶν καμπύλων. Ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν μίαν περιβάλλουσαν τῆς εὐθείας αὐτῆς καὶ μίαν ἄλλην συνθήκην, τὴν ὁποίαν ὀφείλει νὰ πληροῖ, διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν εὐθεῖαν.

Παρατήρησις. Ἡ γνῶσις τῶν ἰδιοτήτων τῶν περιβαλλουσῶν, εὐκολύνει ὄχι μόνον τὴν λύσιν μερικῶν προβλημάτων, ἀλλὰ εἶναι καὶ ἀπαραίτητος διὰ νὰ κατανοήσωμεν καὶ χρησιμοποιήσωμεν τὴν θεωρίαν τῶν ἀντιστρόφων πολικῶν. Πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ἐν τούτοις, ὅτι ἡ Στοιχειώδης Γεωμετρία δὲν διαθέτει, παρὰ ἀσθενῆ μέσα διὰ νὰ μελετήσῃ τὰς περιβαλλούσας. Ὀφείλομεν λοιπὸν νὰ περιορισθῶμεν εἰς τὸ νὰ ἐκθέσωμεν μερικὰ παραδείγματα πολὺ ἁπλᾶ τὰ ὁποῖα, ἐξ ἄλλου, εἶναι ἐπαρκῆ διὰ τὰς προτάσεις τὰς ὁποίας θὰ πραγματευθῶμεν περαιτέρω.

Πρόβλημα

122. Μία τῶν πλευρῶν ΑΧ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ΧΑΥ ὀλισθαίνει ἐπὶ μιᾶς περιφερείας, καθ' ὃν χρόνον ἡ κορυφὴ Α κινεῖται ἐπὶ μιᾶς ὁμοκέντρου περιφερείας πρὸς τὴν πρώτην· ποία εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς δευτέρας πλευρᾶς ΑΥ τῆς ὀρθῆς γωνίας;



Σχ. 71.

Ἔστω Ο τὸ κοινὸν κέντρον τῶν δοθειςῶν περιφερειῶν ΟΑ καὶ ΟΒ.

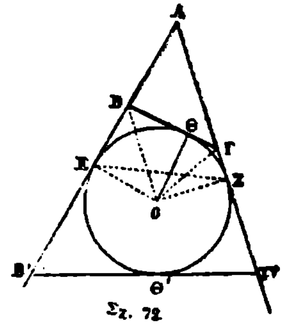
Οἱασδήποτε οὔσης τῆς θέσεως ΑΒΧ, ἡ κάθετος ΟΓ σχηματίζει ἓν ὀρθογώνιον ΑΒΟΓ τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις δὲν μεταβάλλονται κατὰ τὴν κίνησιν, διότι ΟΑ καὶ ΟΒ ἔχουν δοθέντα μήκη ἐνῷ ἡ γωνία ΑΒΟ εἶναι ὀρθή, ἄρα ἡ κάθετος ΟΓ εἶναι σταθερά· συνεπῶς ἡ πλευρὰ ΑΓΥ ἐφάπτεται σταθερῶς τῆς περιφέρειας ΟΓ, ἄρα ἡ περιβάλλουσα τῆς ΑΥ εἶναι ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΓ.

Παρατήρησις. Οἱασδήποτε οὔσης τῆς γωνίας Α, ἡ πλευρὰ ΑΥ

παραμένει εἰς μίαν σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο καὶ ἡ ζητουμένη περιβάλλουσα εἶναι μία περιφέρεια ὁμόκεντρος πρὸς τὰς πρώτας.

Πρόβλημα

123. **Ποία εἶναι ἡ περιβάλουσα τῆς βάσεως ΒΓ ἑνὸς τριγωνου ΒΑΓ· τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι σταθερὰ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Α δίδεται κατὰ μέγεθος καὶ θέσιν;**



Σχ. 72

Προτιθέμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΑΖ τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ΑΕ, ΑΖ ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρον τοῦ ΑΒΓ· φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

Ἔχομεν ΑΕ+ΑΖ=ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ,

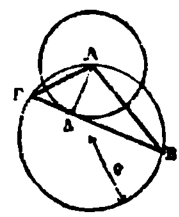
καὶ ΟΕ=ΟΖ=ΟΘ.

Ὅθεν ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν παρεγγεγραμμένην περιφέρειαν, δηλαδὴ ἡ περιβάλλουσα τῆς ΒΓ εἶναι τὸ τόξον ΕΘΖ.

Παρατήρησις. Τὸ τόξον ΕΘ'Ζ εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς εὐθείας Β'Γ' τοιαύτης ὥστε τὸ μῆκος ΑΒ'+ΑΓ'−Β'Γ' νὰ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ ΑΒΓ.

Πρόβλημα

124. **Διὰ σταθεροῦ σημείου Α λαμβανομένου ἐπὶ περιφερείας κύκλου, φέρομεν δύο χορδὰς ΑΒ, ΑΓ τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον k^2 νὰ εἶναι σταθερόν, ποία ἡ περιβάλλουσα τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ τριγώνου ΒΑΓ;**



Σχ. 73.

Φέροντες τὴν κάθετον ΑΔ, ἀναγνωρίζομεν ὅτι τὸ μῆκος της εἶναι σταθερόν, διότι τὸ γινόμενον τῶν δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὴν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου

Ὅθεν $\quad ΑΔ = \frac{k^2}{2ρ}$.

Οὕτω ἡ περιβάλλουσα τῆς ΒΓ εἶναι μία περιφέρεια γραφομένη μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα $\frac{k^2}{2ρ}$.

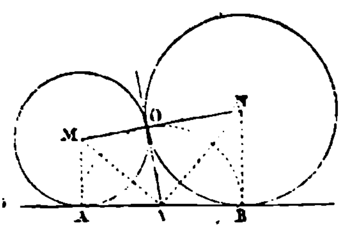
Παρατήρησις. Ἡ περιβάλλουσα εἶναι ἡ αὐτή, δι' ὅλας τὰς περιφερείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ Α καὶ ἐχούσας ἀκτῖνα ρ.

Πρόβλημα

125. **Γράφομεν δύο περιφερείας ἐφαπτομένας μεταξύ των καὶ ἐφαπτομένας μιᾶς εὐθείας εἰς δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ**

σημειου ἀφῆς Ο τῶν περιφερειῶν μεταξύ των καὶ ποία ἡ περιβάλλουσα τῆς εὐθείας τῶν κέντρων ΜΝ;

Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην ΟΔ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΑΜ, ΔΟΜ εἶναι ἴσα μεταξύ των· τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ τρίγωνα ΔΒΝ, ΔΟΝ ἄρα



Σχ. 74

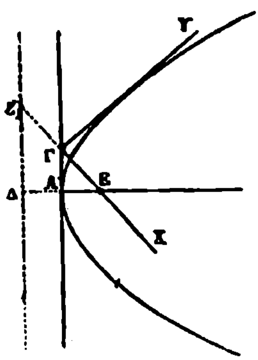
ΔΑ=ΔΟ=ΔΒ.

Οὕτω ὁ τόπος τῶν σημείων ἀφῆς Ο εἶναι ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ. Ἡ αὐτὴ περιφέρεια εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς εὐθείας ΜΟΝ, διότι ἡ ἀκτὶς ΔΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ΜΝ.

Πρόβλημα

126. Ἡ πλευρὰ ΓΧ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ΧΓΥ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Ε, καθ' ὃν χρόνον ἡ κορυφὴ Γ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀλισθαίνει ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΑΓ, ποία εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς πλευρᾶς ΓΥ;

Προεκτείνοντες τὴν ΕΓ κατὰ μῆκος ΓΖ = ΕΓ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων Ζ θὰ εἶναι μία εὐθεῖα ΔΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ τοιαύτη ὥστε ΑΔ=ΑΕ.



Σχ. 75.

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι πᾶσα κάθετος ΓΥ, ἠγμένη εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΖ εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν παραβολήν, ἡ ὁποία ἔχει τὸ Ε δι' ἑστίαν καὶ τὴν ΔΖ ὡς διευθετοῦσαν, ἄρα *ἡ περιβάλλουσα τῆς ΓΥ εἶναι παραβολὴ ἔχουσα τὸ Ε ὡς ἑστίαν καὶ τὴν ΑΓ ὡς ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφήν.*

Παρατήρησις. Δυνάμεθα ταχύτερον νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ συμπέρασμα, διότι ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι ὁ τόπος τῶν προβολῶν τῆς ἑστίας μιᾶς παραβολῆς, ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης ταύτης, εἶναι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὴν κορυφήν. Ἀλλὰ ἐὰν τὰ θεωρήματα τὰ σχετικὰ μὲ τὴν διευθετοῦσαν καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφήν, δὲν εἶναι γνωστά, ἡ Στοιχειώδης Γεωμετρία δὲν μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν γνῶσιν τῆς περιβαλλούσης καμπύλης.

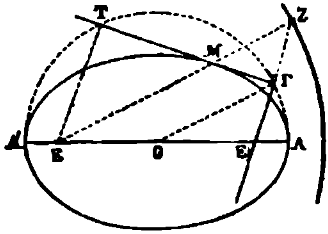
Πρόβλημα

127. Ἡ πλευρὰ ΓΕ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ΕΓΤ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Ε· ποία εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς ἄλλης πλευρᾶς ΓΤ, ὅταν ἡ κορυφὴ Γ ὀλισθαίνει ἐπὶ μιᾶς δοθείσης περιφερείας ΑΓΑ';

Ὅταν ἡ Ε εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἡ περιβάλλουσα τῆς ΓΤ εἶναι μία ἔλλειψις ἔχουσα τὴν ΑΑ ὡς μέγαν ἄξονα καὶ τὸ

Ε ὡς ἑστίαν· διότι ὁ τόπος τῆς προβολῆς Γ τῆς ἑστίας Ε ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων τῆς ἐλλείψεως εἶναι ὁ πρωτεύων κύκλος, δηλαδὴ ὁ γραφόμενος μὲ διάμετρον τὴν ΑΑ'.

Ὅταν τὸ σημεῖον Ε εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἡ περιβάλλουσα τῆς ΓΤ εἶναι μία ὑπερβολὴ ἔχουσα τὴν ΑΑ', ὡς διατέμνοντα ἄξονα καὶ τὸ σημεῖον Ε εἰς μίαν τῶν ἑστιῶν



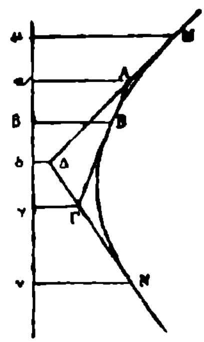
Σχ. 76

Πρόβλημα

128. Ποία εἶναι ἡ περιβάλλουσα μιᾶς εὐθείας ΑΓ, ἥτις διαιρεῖ δύο δοθείσας, θέσει καὶ μεγέθει, εὐθείας ΔΜ, ΔΝ, εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα;

Ἔχομεν $\frac{ΑΜ}{ΑΔ} = \frac{ΓΔ}{ΓΝ}$

Ἡ περιβάλλουσα εἶναι μία παραβολή, διότι κατὰ γνωστὸν θεώρημα ἡ παραβολὴ ἡ ἐφαπτομένη εἰς δύο δοθείσας εὐθείας εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν, ἐφάπτεται πάσης εὐθείας ΑΓ ἥτις διαιρεῖ τὰς πλευρὰς ΔΜ, ΔΝ εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα.


Σχ. 77

Πρόβλημα

129. Τέμνομεν τὰς πλευρὰς μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ΧΟΥ ὑπὸ μιᾶς εὐθείας ΔΕ, οὕτως ὥστε τὸ τρίγωνον ΔΟΕ νὰ ἔχῃ σταθερὸν ἐμβαδόν. Ποία εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς πλευρᾶς ΔΕ;

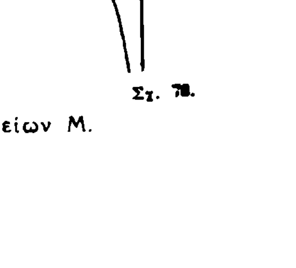
Ἔστω $\frac{ΟΔ.ΟΕ}{2} = α^2$

Ἐκ τοῦ σημείου Μ μέσου τῆς ΔΕ, φέρομεν τὰς καθέτους ΜΝ, ΜΡ, ἔχομεν:

$$ΜΝ.ΜΡ = \frac{1}{2} \cdot \frac{ΟΔ.ΟΕ}{2} = \frac{α^2}{2}$$

Τὸ γινόμενον ἄρα ΜΝ.ΜΡ τῶν συντεταγμένων τοῦ μέσου Μ εἶναι σταθερόν, ὁ τόπος συνεπῶς τοῦ Μ εἶναι μία ἰσοσκελὴς ὑπερβολὴ ἔχουσα τὰς ΟΧ, ΟΥ ὡς ἀσυμπτώτους καὶ τὸ $\frac{α^2}{2}$ ὡς δύναμιν.

Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου, ὅτι τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν ὑπερβολήν, τὸ περιοριζόμενον μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς, διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ σημείου ἀφῆς, συνεπῶς ἡ ΔΕ εἶναι ἐφαπτομένη εἰς Μ τῆς ὑπερβολῆς καὶ ἑπομένως ἡ περιβάλλουσα τῆς ΔΕ εἶναι ἡ ὑπερβολή, τόπος τῶν σημείων Μ.



Σχ. 78

Παρατήρησις. Οιασδήποτε ούσης τῆς γωνίας ΧΟΥ, ἡ περιβάλλουσα τῆς βάσεως ΔΕ ἑνὸς τριγώνου μὲ σταθερὸν ἐμβαδὸν εἶναι μία ὑπερβολή, ἔχουσα τὰς ΟΧ, ΟΥ ὡς ἀσυμπτώτους.

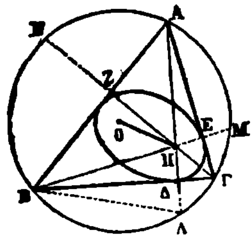
Πρόβλημα

130. Τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κέντρου Ο, τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Η. Τὸ σημεῖον τοῦτο, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σημεῖον τομῆς ὑψῶν, μιᾶς ἀπειρίας ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον τριγώνων· ποία εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων τούτων;

1) Προεκτείνοντες ἕκαστον ὕψος μέχρι τῆς περιφερείας, ἀναγνωρίζομεν ὅτι ἑκάστη πλευρά, π. χ. ἡ ΒΓ, εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΗΛ, διότι ἡ γων. ΓΒΛ=ΓΑΛ, ἀλλὰ ἡ γων. ΓΑΔ= ΓΒΕ, ἄρα ΔΗ=ΔΛ κλπ.

Ὁμοίως, ΗΕ=ΕΜ καὶ ΗΖ=ΖΝ.

2) Ὑπάρχει μία ἀπειρία τριγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον καὶ ἐχόντων τὸ Η ὡς ὀρθόκεντρον. Πράγματι, ἂς δεχθῶμεν ὅτι μᾶς δίδονται μόνον ὁ κύκλος καὶ τὸ σημεῖον Η, θὰ δείξωμεν ὅτι εἰς πᾶσαν χορδὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ Η, ἀντιστοιχεῖ ἓν τρίγωνον ἔχον τὸ Η ὡς ὀρθόκεντρον. Πρὸς τοῦτο φέρομεν μίαν τυχοῦσαν χορδὴν ΒΗΜ καὶ ὑψοῦμεν μίαν κάθετον ΑΓ εἰς τὸ μέσον τῆς ΗΜ, τὰ τρία ὕψη τοῦ ΑΒΓ θὰ τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Η, διότι ΕΗ=ΕΜ, ἄρα...



Σχ. 79.

3) Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τοῦ διευθύνοντος [18] κύκλου, αἱ πλευραὶ ΑΓ (κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΗΜ), ΑΒ (κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΗΛ), κλπ., ἐφάπτονται μιᾶς ἐλλείψεως ἐχούσης ὡς ἑστίας τὰ σημεῖα Ο καὶ Η καὶ ὡς διευθύνοντα κύκλον τὸν Ο, ἄρα ἡ περιβάλλουσα τῶν πλευρῶν εἶναι μία ἔλλειψις.

Παρατήρησις. Ὅταν τὸ ὀρθόκεντρον εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἡ περιβάλλουσα εἶναι μία ὑπερβολή.

131. Περιβάλλουσα μιᾶς μεταβλητῆς καμπύλης. Ἡ περιβάλλουσα μιᾶς καμπύλης ἥτις μεταβάλλεται κατὰ δεδομένον νόμον, εἶναι μία δευτέρα καμπύλη, ἐφαπτομένη τῆς πρώτης εἰς ὅλας τὰς θέσεις τὰς ὁποίας αὕτη καταλαμβάνει.

Παράδειγμα. Ἡ περιβάλλουσα ἑνὸς κύκλου σταθερᾶς ἀκτῖνος, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον γράφει δοθεῖσαν περιφέρειαν, εἶναι τὸ ζεῦγος δύο περιφερειῶν συγκεντρικῶν πρὸς τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον τοῦ κινητοῦ κύκλου.

Ἐὰν ρ ἡ ἀκτὶς τῆς σταθερᾶς περιφερείας καὶ σ ἡ ἀκτὴς τῆς κινητῆς, ἡ ἀκτὶς τῆς μιᾶς περιβαλλούσης εἶναι ρ+σ τῆς δὲ ἄλλης ρ—σ.

---

18. Σημ. μετ. Διευθύνων κύκλος μιᾶς ἐλλείψεως καλεῖται ὁ κύκλος μὲ κέντρον μίαν τῶν ἑστιῶν της καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὸν μεγάλον ἄξονα.

Πρόβλημα

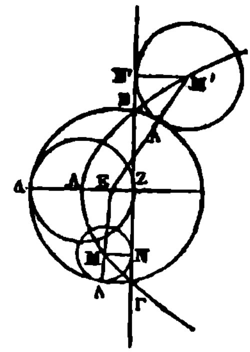
132. Ποία είναι ἡ περιβάλλουσα τῶν κύκλων, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς παραβολῆς καὶ οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται μιᾶς χορδῆς καθέτου ἐπὶ τὸν μεγάλον ἄξονα τῆς παραβολῆς;

Ἡ παραβολὴ εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῆς ἑστίας Ε καὶ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΒΓ εἶναι σταθερὸν (ἀριθ. 7ο).

Ὅθεν ΕΜ+ΜΝ=ΕΛ=ΕΑ+ΑΖ=ΕΔ.

Ὁμοίως ΕΜ′−Μ′Ν′=ΕΛ′=ΕΔ.

Οὕτω ἡ περιβάλλουσα εἶναι ἡ περιφέρεια ΔΛΛ′, ἡ γραφομένη μὲ κέντρον τὴν ἑστίαν Ε καὶ ἀκτῖνα τὴν ΕΔ=ΕΑ+ΑΖ.



Σχ. 60.

Παρατήρησις. Ἡ καμπύλη (περιβάλλουσα) διέρχεται διὰ τῶν Β καὶ Γ.

Πρόβλημα

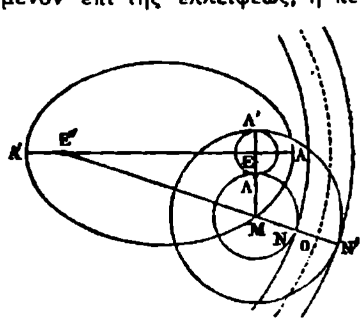
133. Ποία εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῶν κύκλων, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς ἐλλείψεως καὶ οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται μιᾶς περιφερείας γραφομένης μὲ κέντρον μίαν τῶν ἑστιῶν.

Ἔστω ΜΝ τυχὸν κύκλος, γράφομεν τὸν διευθύνοντα κύκλον κέντρου Ε′.

Διὰ κάθε κέντρον Μ, λαμβανόμενον ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, ἡ περιφέρεια ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας, ἐφάπτεται τοῦ διευθύνοντος κύκλου εἰς τὸ Ο.

Ἡ περιβάλλουσα ἄρα τῶν κύκλων τῶν γραφομένων μὲ κέντρον Μ καὶ ἐφαπτομένων εἰς τὸν κύκλον ΕΛ, εἶναι μία περιφέρεια ὁμόκεντρος τοῦ διευθύνοντος κύκλου, ἡ ἀκτὶς τῆς περιβαλλούσης ταύτης εἶναι ἡ Ε′Ν.

Αἱ περιφέρειαι εἰς τὰς ὁποίας ὁ κύκλος Ε ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς, ἔχουν ὡς περιβάλλουσαν τὸν κύκλον μὲ ἀκτῖνα Ε′Ν′.



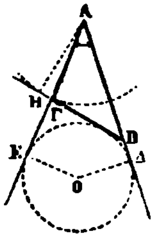
Σχ. 61.

Προβλήματα

134. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ περίμετρος, μία γωνία καὶ τὸ ὕψος τὸ ἀγόμενον ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ταύτης.

Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν Α ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν, προσδιορίζομεν τὴν περιβάλλουσαν τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου σταθερᾶς περιμέτρου 2p (ἀριθ. 124). Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ΑΔ=ΑΕ=p, ὑψοῦμεν τὰς καθέτους ΔΟ, ΕΟ καὶ γράφομεν τὸν πα-

ρεγγεγραμμένον κύκλον εἰς τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα τὸ ὕψος υ γράφομεν περιφέρειαν, κατόπιν ἄγομεν μίαν κοινὴν ἐφαπτομένην εἰς τὰς δύο περιφερείας Α καὶ Ο τέμνουσαν τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς Β καὶ Γ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 82.

134 α. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ περίμετρος, μία γωνία καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ὡς καὶ προηγουμένως (ἀριθ. 134) κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν Α ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν, προσδιορίζομεν τὸν παρεγγεγραμμένον κύκλον κέντρου Ο, ὅστις εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς βάσεως, κατόπιν τὸν ἐγγεγραμμένον κύκλον καὶ φέρομεν κοινὴν ἐφαπταμένην εἰς τοὺς δύο κύκλους.

III

ΧΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

§ I. *Βοηθητικαὶ κατασκευαὶ*

135. Ἡ προσφυγὴ εἰς βοηθητικὰς κατασκευάς, εἴτε διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ἓν θεώρημα, εἴτε διὰ νὰ λύσωμεν ἓν πρόβλημα, εἶναι μᾶλλον ἕνας τρόπος παρὰ μία μέθοδος, ἡ χρῆσις τῶν βοηθητικῶν τούτων κατασκευῶν ἀπαιτεῖται ὑπὸ τῶν πλείστων πρὸς ἐξέτασιν θεμάτων. Τὰ ἤδη ἐκτεθέντα θέματα, παρέσχον πλεῖστα παραδείγματα (ἀριθ. 46, 47, 51).

Εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑποδείξωμεν κατὰ ἕνα γενικὸν τρόπον, τὰς προσηκούσας κατασκευάς· ἀλλὰ ἐνίοτε μία μόνη γραμμὴ δίδει ἀπροσδοκήτους σχέσεις, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει ἀπ' εὐθείας ἡ λύσις.

Εἰς τὰ παραδείγματα τὰ ὁποῖα θὰ δόσωμεν, βοηθητικαὶ γραμμαὶ θὰ εἶναι ἄλλοτε μὲν μία ἢ περισσότεραι εὐθεῖαι, ἄλλοτε δὲ μία περιφέρεια.

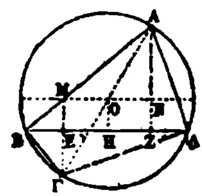
Θεώρημα

136. **Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἑνὸς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου μία τῶν διαγωνίων εἶναι μία διάμετρος, προβάλλονται ἐπὶ τῆς ἄλλης διαγωνίου κατὰ ἴσα τμήματα.**

Ἔστω ΑΒΓΔ ἓν ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον, ΑΟΓ ἡ διάμετρος ΓΕ καὶ ΑΖ αἱ κάθετοι αἱ ἀγόμεναι ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ.

Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι ΒΕ=ΔΖ.

Πράγματι, ἂν φέρωμεν ὡς βοηθητικὴν γραμμὴν τὴν διάμετρον τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΔ, προεκτείνωμεν τὴν ΓΕ καὶ φέρωμεν τὴν κάθετον ΟΗ, προκύπτουν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσα: τὰ ΟΑΝ καὶ ΟΓΜ.



Σχ. 60.

συνεπῶς ΟΜ=ΟΝ

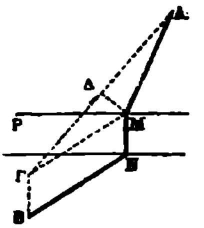
ἐξ οὗ ΒΕ=ΖΔ καὶ ΒΖ=ΕΔ.

Πρόβλημα

137. **Εἷς ποταμός, τοῦ ὁποίου αἱ ὄχθαι εἶναι εὐθύγραμμοι εἰς τὸ θεωρούμενον τμῆμα, διέρχεται μεταξὺ δύο χωρίων ἀνίσως ἀπεχόντων τῶν ὀχθῶν του. Εἰς ποίαν θέσιν πρέπει νὰ κατασκευασθῇ μία γέφυρα**

κάθετος πρὸς τὸν ποταμόν, ἵνα τὰ δύο χωρία εὑρίσκονται εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους εἰσόδους τῆς γεφύρας.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω ΜΝ ἡ θέσις τῆς γεφύρας καὶ ΑΜ=ΒΝ.



Σχ. 64.

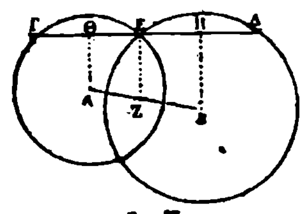
Ἐὰν φέρωμεν μίαν βοηθητικὴν εὐθεῖαν ΒΓ, παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς τὴν ΜΝ, ἀναγνωρίζομεν ἀμέσως ὅτι τὸ σημεῖον Μ προσδιορίζεται ὑπὸ τῆς καθέτου ΔΜ τῆς ἀγομένης εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ· διότι τὸ σχῆμα ΒΓΜΝ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως ΒΝ=ΓΜ=ΑΜ.

Παρατήρησις. Τὸ παράδειγμα τοῦτο καθὼς καὶ πολλὰ ἄλλα, δύναται νὰ ἀναφερθῇ εἰς τὴν *μέθοδον τῆς παραλλήλου μεταφορᾶς* (ἀριθ. 194).

Πρόβλημα

138. Δίδονται δύο περιφέρειαι τεμνόμεναι αἱ Α καὶ Β, νὰ ἀχθῇ δι' ἑνὸς ἐκ τῶν σημείων τομῆς Ε μία τέμνουσα, ἥτις νὰ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ σημείου τούτου εἰς λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα ταῦτο δυνάμεθα νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς ἤδη γνωστὸν τόπον (ἀριθ. 65)· ἀλλὰ τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται μίαν ειδικὴν λύσιν πολὺ ἁπλῆν, τὴν ὁποίαν εἶναι χρήσιμον νὰ ἐξετάσωμεν.



Σχ. 65.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ

$$\frac{\Gamma E}{\Delta E} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Theta E}{H E} = \frac{\mu}{\nu},$$

ἔνθα Θ καὶ Η τὰ μέσα τῶν χορδῶν. Ἐὰν φέρωμεν διὰ τοῦ σημείου Ε μίαν κάθετον ΕΖ πρὸς τὴν ΘΗ, τὸ τμῆμα ΑΒ διαιρεῖται εἰς δύο τμήματα ἔχοντα λόγον ἴσον πρὸς τὸν δοθέντα λόγον. Πρέπει λοιπὸν νὰ διαιρέσωμεν τὸ τμῆμα ΑΒ διὰ σημείου Ζ εἰς λόγον $\frac{\mu}{\nu}$, νὰ ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Ζ μὲ τὸ Ε, κατόπιν εἰς τὸ σημεῖον Ε νὰ φέρωμεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΖ.

Πρόβλημα

139. Δι' ἑνὸς ἐκ τῶν σημείων τομῆς δύο τεμνομένων περιφερειῶν, νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα ἔχουσα δοθὲν μῆκος 2λ.

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον, ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ θεωρήσωμεν, ὅπως καὶ προηγουμένως, τὸ ἥμισυ ΘΗ τῆς τεμνούσης ΓΕΔ.

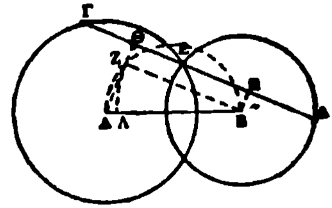
Ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν μίαν βοηθητικὴν εὐθεῖαν ΒΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ, διὰ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΖΒ, τοῦ

ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΒ καὶ τὸ μῆκος λ, μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Ἀγόμεθα λοιπὸν εἰς τὴν ἑξῆς κατασκευήν:

Ἐπὶ τῆς ΑΒ ὡς διαμέτρου, γράφομεν μίαν ἡμιπεριφέρειαν, μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Β καὶ ἀκτῖνα ΒΛ=λ γράφομεν τόξον ΛΖ, τέλος φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΕΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΖ.

Παρατήρησις. Τὸ δοθὲν μῆκος 2λ πρέπει νὰ εἶναι τὸ πολὺ ἴσον πρὸς 2ΑΒ· οὕτω ἡ μεγίστη τέμνουσα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάκεντρον.



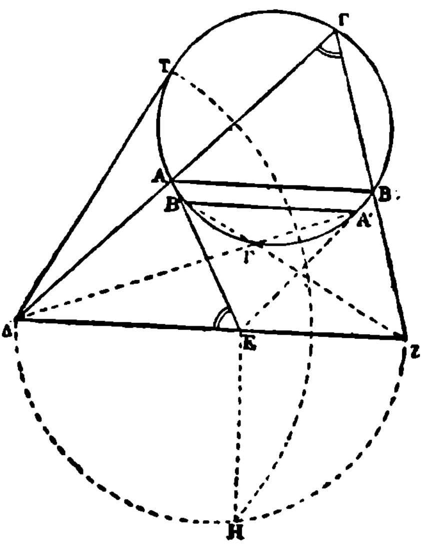
Σχ. 86

Πρόβλημα

140. Δίδεται εὐθεῖα ΔΖ σταθερὰ θέσει καὶ μεγέθει, καθὼς ἐπίσης καὶ κύκλος σταθερός, ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τοῦ κύκλου σημεῖον Γ τοιοῦτον ὥστε ἡ χορδὴ ΑΒ, ἡ ὁριζομένη ἐπὶ τοῦ κύκλου ὑπὸ τῶν ΓΔ καὶ ΓΖ, νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΖ.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω ἡ ΑΒ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΔ. Ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθοῦν τὰ σημεῖα Α ἢ Β.

Διὰ νὰ ἐξαρτήσωμεν τὸ ἄγνωστον σημεῖον Α ἀπὸ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΕ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΖΔΓ εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν Δ κοινὴν καὶ τὴν γωνίαν Α ἴσην μὲ τὴν Ζ, διότι ἡ γωνία Α, ἢ ἡ κατὰ κορυφήν της, ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΤΓ, τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει διὰ τὴν γωνίαν Β, πρὸς τὴν ὁποίαν εἶναι ἴση ἡ γωνία Ζ.



Σχ. 87

Τὰ ὅμοια τρίγωνα δίδουν:

$$\frac{ΔΕ}{ΔΓ} = \frac{ΔΑ}{ΔΖ}$$

ἐξ οὗ $ΔΕ = \frac{ΔΑ \, . \, ΔΓ}{ΔΖ}$

Δὲν γνωρίζομεν οὔτε τὸ τμῆμα ΔΑ οὔτε τὸ ΔΓ, ἀλλὰ τὸ γινόμενόν τους εἶναι γνωστόν, διότι ἂν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΔΤ, ἔχομεν: $ΔΑ \, . \, ΔΓ = ΔΤ^2$.

ἄρα $$ΔΕ = \frac{ΔΤ^2}{ΔΖ}.$$

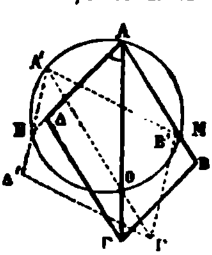
Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ΔΕ ὡς εἰς τὸ σχῆμα φαίνεται.

Κατασκευή. Ἐπὶ τῆς ΔΖ γράφομεν μίαν ἡμιπεριφέρειαν, μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα ΔΤ γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Η, ἐκ τοῦ Η φέρομεν τὴν ΗΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΖ καὶ ἐκ τοῦ Ε τὴν ἐφαπτομένην ΕΑ, κατόπιν δὲ τὰς εὐθείας ΔΑΓ καὶ ΓΖ. Ὑπάρχουν προφανῶς δύο λύσεις.

Θεώρημα

141. **Ὅταν ἓν παραλληλόγραμμον ἀμεταβλήτων διαστάσεων κινεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδόν του, οὕτως ὥστε δύο ἐφεξῆς πλευραὶ ΑΒ, ΑΔ νὰ διέρχωνται ἀντιστοίχως διὰ δύο σταθερῶν σημείωνΜ καὶ Ν, ἡ διαγώνιος ΑΓ θὰ διέρχεται ὡσαύτως διὰ σταθεροῦ σημείου.**

Ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι σταθερά, συνεπῶς ἡ κορυφὴ Α τοῦ παραλληλογράμμου, θὰ κινεῖται ἐπὶ τόξου κύκλου δεχομένου γωνίαν Α καὶ διερχομένου διὰ τῶν Μ καὶ Ν.



Σχ. [illegible]

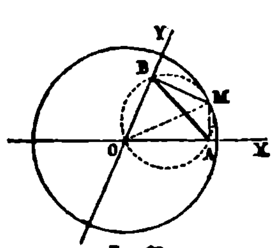
Ἡ θεώρησις τῆς περιφερείας ΜΑΝΟ μᾶς ὁδηγεῖ εὐκολώτατα εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος.

Πράγματι, ἡ γωνία ΝΑΟ ἢ Δ'Α'Γ' εἶναι σταθερὰ ἡ πρώτη πλευρὰ Δ'Α' τῆς γωνίας διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ν, ἡ δευτέρα ἄρα πλευρὰ Α'Γ' θὰ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Ο.

Τόπος

142. **Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων Μ τῶν τοιούτων ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἥτις ἑνώνει τοὺς πόδας τῶν καθέτων ΜΑ, ΜΒ τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ Μ ἐπὶ δύο σταθερὰς εὐθείας ΟΧ, ΟΥ, ἔχει ἓν μῆκος σταθερὸν λ;**

Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, ΜΑ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΧ, ΜΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΥ καὶ ΑΒ=λ.



Σχ. [illegible]

Ἡ θεώρησις τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΜΒΟ, τοῦ ὁποίου δύο ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ὀρθαί, μᾶς ὁδηγεῖ ἀπ' εὐθείας εἰς τὴν ἀπάντησιν.

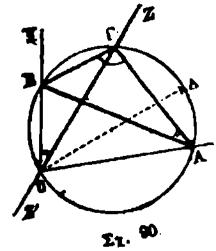
Πράγματι, ἀφοῦ αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι ὀρθαί, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος ἔχει ὡς διάμετρον τὴν ΟΜ. Ἀλλὰ ἡ ΑΒ ἔχει σταθερὸν μῆκος, δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ τόξον ΑΟΒ εἶναι τὸ τόξον κύκλου τὸ γραφόμενον ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν ΧΟΥ. Συνεπῶς ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια ἀλλάσσει θέσιν, ἀλλὰ δὲν ἀλλάσσει μέγεθος, ἄρα ἡ διάμετρος ΟΜ ἔχει σταθερὸν μῆκος καὶ ὁ τόπος τοῦ Μ εἶναι περιφέρεια κύκλου κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΜ.

Τόπος

143. Αἱ κορυφαὶ Α καὶ Β ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ὀλισθαίνουν ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο σταθερῶν εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ, τῶν ὁποίων ἡ γωνία ΧΟΥ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας Γ· ποῖος εἶναι ὁ τόπος ὁ γραφόμενος ὑπὸ τῆς τρίτης ταύτης κορυφῆς Γ;

Ἔστω ἡ γωνία Γ παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας Ο.

Ὅπως καὶ προηγουμένως, ἡ θεώρησις τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου μᾶς φέρει εὐκόλως εἰς τὴν ἀναγνώρισιν τοῦ τόπου.



Σχ. 90

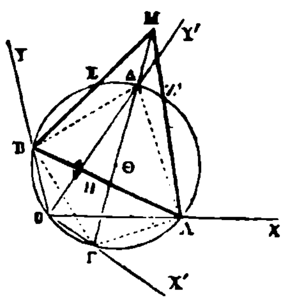
Πράγματι οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος διέρχεται διὰ τοῦ Ο, διότι τὸ τετράπλευρον ΑΟΒΓ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ ἐπομένως ἡ γωνία ΒΟΓ ἰσοῦται μὲ τὴν Α, ἄρα ἡ γωνία ΒΟΓ εἶναι σταθερά, τὸ σημεῖον Γ οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΟΖ', σχηματιζούσης μετὰ τῆς ΟΥ γωνίαν, ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Α.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ ἔχωμεν τὰς ἀκραίας θέσεις τῆς κορυφῆς Γ, πρέπει νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῶν ΟΖ καὶ ΟΖ' μήκη ἴσα πρὸς τὴν διάμετρον ΟΔ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Τόπος

144. Αἱ κορυφαὶ Α καὶ Β ἑνὸς τριγώνου ΑΒΜ ὀλισθαίνουν ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο σταθερῶν εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος ὁ γραφόμενος ὑπὸ τῆς τρίτης κορυφῆς;

Τὸ προηγούμενον πρόβλημα μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν σημεῖα, ἀνήκοντα εἰς τὸ κινούμενον τρίγωνον, τῶν ὁποίων ὁ τόπος νὰ εἶναι μία εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ο.



Σχ. 91

Οὕτω ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τριγώνου τὰ κείμενα ἐπὶ τοῦ τόξου ΕΔΖ κινοῦνται ἐπὶ εὐθειῶν διὰ τοῦ Ο, ὅταν τὸ τρίγωνον μετακινεῖται. Διότι πᾶν σημεῖον π. χ. τὸ Δ σχηματίζει γωνίαν ΑΔΒ παραπληρωματικὴν τῆς γων. ΑΟΒ.

Τὰ σημεῖα τοῦ τόξου ΑΟΒ κινοῦνται ὁμοίως ἐπὶ εὐθειῶν, διότι

$$\text{γων. } ΑΓΒ = \text{γων. } ΑΟΒ.$$

Φέρομεν τὴν διάμετρον ΓΜ τὴν διερχομένην διὰ τῆς κορυφῆς Μ καὶ ἔστω Δ τὸ σημεῖον τομῆς μετὰ τοῦ τόξου ΕΖ. Ἡ εὐθεῖα ΓΔΜ παραμένει ἀναλλοιώτως προσδεδεμένη εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΜ.

Πράγματι, τὸ τόξον ΑΔΒ, δεχόμενον γωνίαν παραπληρωματικὴν τῆς γωνίας ΧΟΥ, ἔχει μίαν ἀκτῖνα σταθερὰν καὶ μίαν θέσιν ἀμετάβλητον ἐν σχέσει πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον. Τέμνει τοῦτο τη ΜΒ εἰς ὡρισμένον σημεῖον Ε τοιοῦτον ὥστε τὸ τμῆμα ΒΕ νὰ ἔχει μῆκος ἀμετάβλητον. Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΟΒΔ παραμένει εἰς

μίαν ἀπόστασιν ἀμετάβλητον ἀπὸ τῆς βάσεως ΑΒ, ἡ διάμετρος ὅθεν ΜΔΘΓ θὰ ἔχῃ μίαν θέσιν ὡρισμένην καὶ θὰ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Η τῆς βάσεως ΑΒ, συνεπῶς ἡ εὐθεῖα ΜΔΘΓ συμμετέχει εἰς τὴν κίνησιν τοῦ τριγώνου ΑΒΜ καὶ τὸ ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΓΒΔ κινεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, χωρὶς νὰ ἀλλάσῃ σχῆμα καὶ μέγεθος.

Ἀλλὰ ἡ γωνία ΔΟΓ εἶναι ὀρθή, ἄρα τὰ ἄκρα Γ καὶ Δ τῆς εὐθείας ΓΔ ὀλισθαίνουν ἐπὶ δύο σταθερῶν ὀρθογωνίως τεμνομένων εὐθειῶν ΟΧ', ΟΥ', κατὰ συνέπειαν πᾶν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ταύτης γράφει μίαν ἔλλειψιν.

Παρατήρησις. Τὸ Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς καμπύλης, οἱ δὲ ἄξονες ἔχουν τὰς διευθύνσεις τῶν ΟΧ' καὶ ΟΥ'. Τὰ μήκη ΜΓ, ΜΔ εἶναι τὰ μήκη τῶν ἡμιαξόνων.

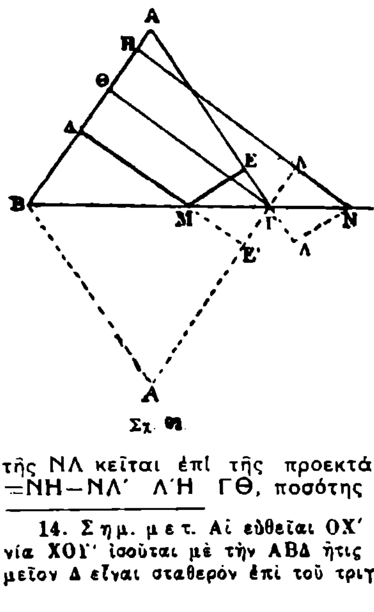
§ ΙΙ. *Σχήματα συμμετρικὰ*

145. Ἡ χρῆσις τῶν συμμετρικῶν σχημάτων συνιστᾶ τὴν μέθοδον διὰ διπλασιασμοῦ ἢ δι' ἀναστροφῆς.

Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις, προσδιορίζομεν, ἐν σχέσει πρὸς δεδομένον ἄξονα, τὸ συμμετρικὸν σημεῖον ἑνὸς δοθέντος σημείου, εἰς ἄλλας περιστάσεις, ἀντικαθιστῶμεν μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν ἢ μίαν καμπύλην διὰ τῆς συμμετρικῆς των γραμμῆς.

Εὑρίσκομεν μίαν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου ταύτης εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ ἐλαχίστου τεθλασμένου δρόμου, ὡς καὶ εἰς τὸ ἑξῆς:

Νὰ δειχθῇ ὅτι δύναται νὰ περιγραφῇ, εἰς κάθε κανονικὸν πολύγωνον, μία περιφέρεια.



Σχ. [illegible]

Θεώρημα

146. Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς εἶναι σταθερόν, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τοῦ τυχόντος σημείου τῆς προεκτάσεως τῆς βάσεως εἶναι ἐπίσης σταθερά.

Θεωροῦντες τὸ συμμετρικὸν σχῆμα, λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν εἰς τὸ Μ, ἡ ΜΕ' συμμετρικὴ τῆς ΜΕ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΔΜ, ἄρα ΜΕ + ΜΔ = ΜΕ' + ΜΔ ΔΕ' = ΓΘ, ποσότης σταθερά.

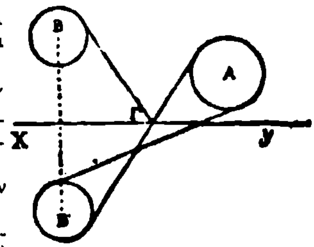
Ὁμοίως ΝΛ', συμμετρικὴ τῆς ΝΛ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΝΗ, ἄρα ΝΗ – ΝΛ = ΝΗ – ΝΛ' Λ'Η ΓΘ, ποσότης σταθερά.

---

14. Σημ. μετ. Αἱ εὐθεῖαι ΟΧ' καὶ ΟΥ' εἶναι σταθεραί, διότι ἡ γωνία ΧΟΥ' ἰσοῦται μὲ τὴν ΑΒΔ ἥτις γωνία εἶναι σταθερά, καθόσον τὸ σημεῖον Δ εἶναι σταθερὸν ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΜ.

Πρόβλημα

147. Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας xy, να προσδιορισθῇ σημεῖον Γ, τοιοῦτον ὥστε αἱ ἀγόμεναι ἐξ αὐτοῦ ἐφαπτόμεναι εἰς δύο δοθείσας περιφερείας Α καὶ Β, νὰ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετὰ τῆς xν.



Σχ. 93.

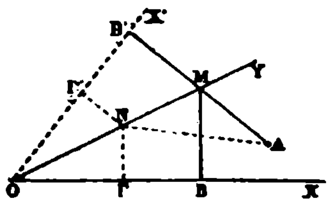
Κατασκευάζομεν περιφέρειαν Β′ συμμετρικὴν τῆς Β ὡς πρὸς τὴν xy· φέρομεν κοινὴν ἐφαπτομένην εἰς τὰς περιφερείας Α καὶ Β′.

Τὸ σημεῖον Γ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ὑπάρχουν γενικῶς τέσσαρες λύσεις. Διότι ὑπάρχουν τέσσαρες κοιναὶ ἐφαπτόμεναι.

Πρόβλημα

147 α. Ἐπὶ εὐθείας ΟΥ νὰ προσδιορισθῇ σημεῖον Μ, τοιοῦτον ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ΜΑ+ΜΒ τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ σημεῖον δοθὲν Α καὶ ἀπὸ δοθείσης εὐθείας ΟΧ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον.



Σχ. 94.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΧ′ συμμετρικὴν τῆς ΟΧ ὡς πρὸς τὴν ΟΥ, καὶ ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΑΜΒ′, κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΧ′.

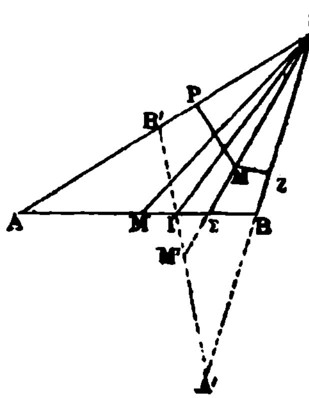
Θὰ ἔχωμεν:

$$MA+MB<NA+N\Gamma$$

ἄρα....

Πρόβλημα

148. Εἰς δοθὲν τρίγωνον, νὰ προσδιορισθῇ ἡ συμμετρικὴ εὐθεῖα μιᾶς διαμέσου ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον, ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἀποστάσεις ἑκάστου τῶν σημείων της ἀπὸ τὰς δύο πλευρὰς εἶναι ἀνάλογοι τῶν πλευρῶν τούτων.



Σχ. 95.

1) Ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ΓΑ′=ΓΑ, ΓΒ′=ΓΒ καὶ νὰ φέρωμεν τὴν διάμεσον ΓΜ′ τοῦ τριγώνου Α′ΓΒ′.

2) Αἱ ἀποστάσεις τυχόντος σημείου μιᾶς διαμέσου ἀπὸ τὰς πλευρὰς αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς (βλ. κατωτέρω ἀριθ. 163).

Ἄρα ἔχομεν:

$$\frac{MP}{MZ} = \frac{\Gamma A'}{\Gamma B'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{MP}{MZ} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$$

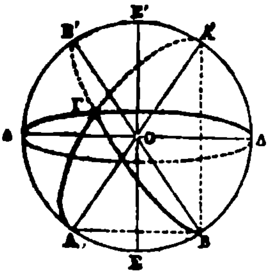
Παρατήρησις. Ἡ εὐθεῖα ΓΣ συμμετρικὴ τῆς ΓΜ, ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον ΓΙ, καλεῖται συνδιάμμεσος (symédiane).

Θεώρημα τοῦ Euss

149. Οἱασδήποτε οὔσης τῆς βάσεως ΑΒ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΓΒ, ὁ τόπος τῆς τρίτης κορυφῆς Γ εἶναι μέγιστος κύκλος, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν παραπλεύρων τόξων εἶναι μία ἡμιπεριφέρεια.

Ἔστω τοξ. ΑΓ+τοξ. ΒΓ=πρ.

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων εἶναι μία ἡμιπεριφέρεια, ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ θεωρήσωμεν ἓν σχῆμα διπλάσιον τοῦ δοθέντος. Πρὸς τούτοις, προσδιορίζομεν τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τῶν Α καὶ Β, ὡς πρὸς τὴν παράλληλον διάμετρον πρὸς τὴν χορδὴν ΑΒ, ἢ καλύτερον φέρομεν τὰς διαμέτρους ΑΟΑ΄, ΒΟΒ΄.



Σχ. 96.

Ἔχομεν τοξ. ΑΓ+τοξ. ΒΓ=πρ=

τοξ. ΑΓ+τοξ. ΓΑ΄

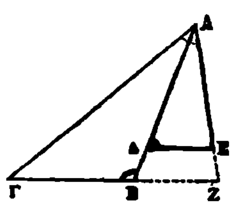
ἄρα τοξ. ΒΓ=τοξ. ΓΑ΄

Οὕτω οἱωνδήποτε ὄντων, τοῦ μήκους τῆς βάσεως ΑΒ καὶ τῆς θέσεως τῶν ἡμικυκλίων ΑΓΑ΄, ΒΓΒ΄, τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΒΓΑ΄ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ χορδὴ ΒΑ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ· ἄρα ἡ κορυφὴ Γ ἔχει γεωμετρικὸν τόπον τὸν μέγιστον κύκλον ΔΓΔ΄, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὴν διάμετρον ΕΕ΄ ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς βάσεως ΑΒ.

149 α. *Παρατήρησις*. Εἰς τὴν μέθοδον τοῦ διπλασιασμοῦ, δυνάμεθα νὰ ὑπαγάγωμεν καὶ τὴν μέθοδον ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὴν κατάλληλον τοποθέτησιν τῶν μερῶν ἑνὸς σχήματος, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἀναγάγωμεν τὸ προτιθέμενον πρόβλημα εἰς ἕνα ἤδη γνωστόν. Ἰδοὺ δύο παραδείγματα.

Θεώρημα

150. Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας καὶ δύο γωνίας παραπληρωματικάς, αἱ πλευραὶ αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς τὰς κειμένας ἀπέναντι τῶν παραπληρωματικῶν.



Σχ. 97.

Τοποθετοῦμεν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ, εἰς τρόπον ὥστε αἱ ἴσαι γωνίαι νὰ εἶναι προσκείμεναι καὶ ἡ κοινὴ πλευρὰ νὰ πρόσκειται εἰς τὰς παραπληρωματικὰς γωνίας Β καὶ Δ. Ἡ τοιαύτη τοποθέτησις τοῦ σχήματος μᾶς ὑπενθυμίζει τὸ θεώρημα τῆς διχοτόμου.

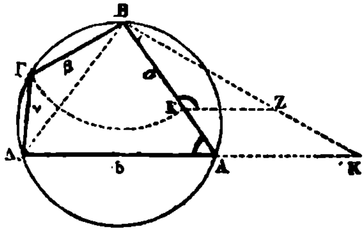
Ἔχομεν : $\frac{ΑΓ}{ΓΒ}=\frac{ΑΖ}{ΒΖ}$.

ἄρα $\frac{ΑΓ}{ΓΒ}=\frac{ΑΕ}{ΔΕ}$, ἢ $\frac{ΑΓ}{ΑΕ}=\frac{ΒΓ}{ΔΕ}$

Πρόβλημα τοῦ Sturm

151. Νὰ κατασκευασθῇ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς τέσσαρας πλευράς.

Ὑποθέτομεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστωσαν α, β, γ, δ, αἱ τέσσαρες δοθεῖσαι πλευραί.



Σχ. 88.

Ἡ χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου νὰ ἔχῃ τὰς ἀπέναντι γωνίας παραπληρωματικὰς καὶ ἡ μελέτη τῆς προηγηθείσης ἀσκήσεως (ἀριθ. 150), μᾶς ὁδηγοῦν εἰς τὸ νὰ φέρωμεν τὸ τρίγωνον ΒΓΔ εἰς τὴν θέσιν ΒΕΖ καὶ νὰ ἀνακαλύψωμεν μερικὰς ἁπλὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν δοθεισῶν γραμμῶν. Ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΑ καὶ τὸ πρόβλημα θὰ ἦτο λελυμένον, ἐὰν ἠδυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον ΔΒΚ.

Ἀλλὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΚ καὶ ΕΒΖ ἢ ΓΒΔ δίδουν:

$$\frac{ΑΚ}{ΓΔ}=\frac{ΑΒ}{ΓΒ}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{ΑΚ}{γ}=\frac{α}{β}$$

ἐξ οὗ

$$ΑΚ=\frac{αγ}{β}.$$

Οὕτω ἡ ΔΚ εἶναι γνωστή.

Δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἐπίσης τὸν λόγον τῶν πλευρῶν ΒΔ καὶ ΒΚ.

Πράγματι,
$$\frac{ΒΔ}{ΒΚ}=\frac{ΒΕ}{ΒΑ}=\frac{β}{α}.$$

Ἄρα, ἐν σχέσει πρὸς τὰ σημεῖα Δ καὶ Κ, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ΔΚ εἶναι γνωστή, πρέπει νὰ γράψωμεν τὸν τόπον τῶν σημείων Β τοιούτων ὥστε ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ Δ καὶ Κ νὰ ἰσοῦται πρὸς $\frac{β}{α}$· κατόπιν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α καὶ ἀκτῖνα μήκους α, τέμνομεν τὸν τόπον καὶ εὑρίσκομεν οὕτω, τὸ σημεῖον Β.

Τέλος περιγράφομεν μίαν περιφέρειαν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, καὶ λαμβάνομεν χορδὴν ΒΓ ἴσην πρὸς β. Ἡ χορδὴ ΓΔ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ δοθὲν μῆκος γ.

§ III. Σύνθεσις καὶ ἀποσύνθεσις σχημάτων

152. ***Σύνθεσις σχημάτων.*** Ἡ μέθοδος τῆς συνθέσεως συνίσταται εἰς τὴν συμπλήρωσιν ἑνὸς δοθέντος σχήματος, δι᾽ ἄλλων σχημάτων, οὕτως ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ ἓν ἤδη γνωστὸν σχῆμα.

Παραδείγματα. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου, θεωροῦμεν τὸ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου τὸ πρῶτον σχῆμα εἶναι τὸ ἥμισυ.

Πρὸς ὕρεσιν τοῦ ὄγκου ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος, θεωροῦμεν τὸ παραλληλεπίπεδον διπλασίου ὄγκου.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὄγκου τριγωνικῆς πυραμίδος, ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ πυραμὶς αὕτη εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος μὲ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

153. *Ἀποσύνθεσις σχημάτων.* Ἡ μέθοδος τῆς ἀποσυνθέσεως, συνίσταται εἰς τὸν διαχωρισμὸν τοῦ πρὸς μελέτην σχήματος, εἰς πολλὰ γνωστὰ σχήματα.

Παραδείγματα. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίγματος τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου, χωρίζομεν αὐτὸ εἰς τρίγωνα.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου.

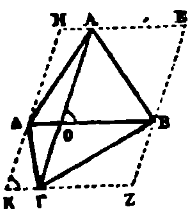
Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ὄγκου μιᾶς κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος ἢ ἑνὸς κολούρου πρίσματος, χωρίζομεν τὸ κόλουρον σχῆμα, εἰς τρία τετράεδρα.

Εἰς τὴν *μέθοδον τῆς προσθέσεως*, ἡ πρὸς μελέτην ἐπιφάνεια χωρίζεται εἰς ὀρθογώνια καὶ τὸ πρὸς μέτρησιν στερεὸν χωρίζεται εἰς πρίσματα.

154. *Συμπεράσματα.* Διὰ τῆς συνθέσεως ἢ τῆς ἀποσυνθέσεως, τὸ δοθὲν σχῆμα θεωρεῖται ὡς ἐὰν ἦτο ἡ διαφορὰ ἢ τὸ ἄθροισμα πολλῶν γνωστῶν σχημάτων.

Θεώρημα

155. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ δοθέντων μηκῶν, τέμνονται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῶν εὐθειῶν αἵτινες ἑνώνουν ἀνὰ δύο τὰ πέρατα αὐτῶν, ἔχει ἐπιφάνειαν σταθεράν.*



Σχ. 99.

Δυνάμεθα νὰ δώσωμεν πολλὰς στοιχειώδεις ἀποδείξεις αὐτοῦ τοῦ θεωρήματος, ἀλλὰ ἡ ἁπλουστέρα ἀναφέρεται εἰς τὴν μέθοδον τῆς *συνθέσεως*.

Διὰ τῶν κορυφῶν Α καὶ Γ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν διαγώνιον ΒΔ καὶ διὰ τῶν κορυφῶν Β καὶ Δ παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ.

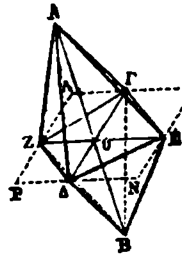
Τὸ οὕτω σχηματισθὲν παραλληλόγραμμον εἶναι σταθερόν, διότι ἡ γωνία Κ ἢ Ο δίδεται, ἐπίσης αἱ πλευραὶ ΚΖ, ΚΗ. Ἀλλὰ τὸ τετράπλευρον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου, διότι τὸ τρίγωνον ΑΟΒ ἰσοῦται πρὸς ΑΒΕ, κ.τ.λ. Ἀλλὰ τὸ τετράπλευρον ἔχει σταθερὰν ἐπιφάνειαν.

Θεώρημα

156. *Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι δοθέντων μηκῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ὑπὸ σταθερὰς γωνίας, τὸ ὀκτάεδρον τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ ὡς κορυφὰς τὰ πέρατα τῶν τριῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἔχει σταθερὸν ὄγκον.*

Πράγματι, τὸ τετράπλευρον ΓΕΔΖ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ ὀκτάεδρον εἰς δύο τετραγωνικὰς πυραμίδας, εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ σταθεροῦ παραλληλογράμμου ΛΜΝΡ, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Ἀλλὰ φέροντες διὰ τῶν κορυφῶν Α καὶ Β ἐπίπεδα παράλληλα εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΛΜΝΡ, καὶ

φέροντες διὰ ΜΝ, ΝΡ κλπ. ἐπίπεδα πλευρικὰ παράλληλα πρὸς τὴν ΑΒ, σχηματίζομεν παραλληλεπίπεδον σταθερόν, διότι αἱ ἀκμαὶ αὐτοῦ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὰς τρεῖς δοθείσας εὐθείας ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, αἵτινες ἔχουν δοθέντα μήκη καὶ σχηματίζουν δοθείσας γωνίας.



Σχ. 100.

Ἀλλὰ ἡ πυραμὶς Α,ΓΔΕΖ εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ διπλασίας βάσεως ΛΜΝΡ, διότι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εὑρίσκεται πολλαπλασιάζοντες τὴν βάσιν ΓΕΔΖ ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τοῦ σημείου Α. Ὁμοίως ἡ πυραμὶς Β,ΓΔΕΖ εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ ἀντιστοίχου παραλληλεπιπέδου· ἄρα τὸ *ὀκτάεδρον ἔχει σταθερὸν ὄγκον* διότι ὁ ὄγκος αὐτοῦ, εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ ὁλοκλήρου παραλληλεπιπέδου.

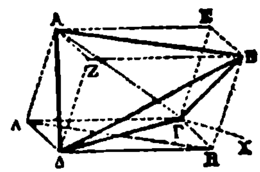
Παρατήρησις. Εἰς τὴν ειδικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι εἶναι ἀνὰ δύο κάθετοι, ἔχομεν :

$$V = \frac{1}{6} AB \cdot \Gamma\Delta \cdot EZ$$

Πρόβλημα

157. **Διὰ τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ἑνὸς τετραέδρου, φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα· σχηματίζομεν οὕτω ἕνα περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον· ποῖος ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο στερεῶν;**

Διὰ τῶν δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΒ καὶ ΔΓ, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο παράλληλα ἐπίπεδα. Πράγματι, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΓΧ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, τὸ ἐπίπεδον ΔΓΧ θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ διὰ τῆς τελευταίας ταύτης γραμμῆς θὰ δυνηθῶμεν νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ΔΓΧ. Ἐπίσης διὰ τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΔ, ΒΓ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐπίπεδα παράλληλα μεταξύ των. Τέλος διὰ τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ δυνάμεθα ἐπίσης νὰ φέρωμεν δύο ἐπίπεδα παράλληλα, καὶ νὰ σχηματίσωμεν οὕτω ἕνα παραλληλεπίπεδον περιγεγραμμένον εἰς τὸ δοθὲν τετράεδρον.



Σχ. 101.

Ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸν τοῦ παραλληλεπιπέδου ἠλαττωμένου κατὰ τὸν ὄγκον τεσσάρων ἰσοδυνάμων πυραμίδων, τῶν ὁποίων ἑκάστη εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Πράγματι, ἡ πυραμὶς Β,ΔΓΗ ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος μετὰ τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ ἡ βάσις τῆς ΔΓΗ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΛΔΗΓ.

Παριστῶντες διὰ τοῦ V τὸν ὄγκον τοῦ παραλληλεπιπέδου

ἔχομεν: πυραμὶς $B,\Delta\Gamma H = \frac{1}{6} V$.

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει δι' ἑκάστην τῶν πυραμίδων Α,ΓΔΛ, Γ,ΑΕΒ, Δ,ΑΒΖ· ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ἰσοῦται πρός:

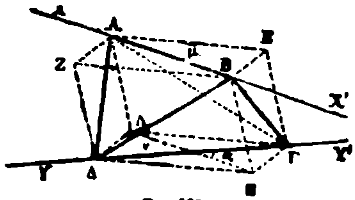
$$V - \frac{4}{6}V = \frac{1}{3}V.$$

Οὕτω τὸ τετράεδρον εἶναι τὸ τρίτον τοῦ περιγεγραμμένου παραλληλεπιπέδου.

Θεώρημα τοῦ Steiner

158. Ἐπὶ δύο εὐθειῶν ΧΧ καὶ ΥΥ' μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου λαμβάνομεν ἀντιστοίχως δύο δοθέντα μήκη ΑΒ, ΓΔ· νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράεδρον τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ κορυφὰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ ἔχει σταθερὸν ὄγκον, οἱωνδήποτε ὄντων τῶν θέσεων τοῦ ΑΒ ἐπὶ τῆς ΧΧ' καὶ τοῦ ΓΔ ἐπὶ τῆς ΥΥ'.

Κατασκευάζομεν τὸ περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον καὶ ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος αὐτοῦ τοῦ στερεοῦ εἶναι σταθερός, διότι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου εἶναι τὸ τρίτον αὐτοῦ (ἀριθ. 157).



Σχ. 102.

Ἡ διαγώνιος ΗΛ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ· ἄρα οἱασδήποτε οὔσης τῆς θέσεως τῶν δοθέντων τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ τὸ παραλληλόγραμμον τῆς βάσεως ΓΗΔΛ ἔχει ἐμβαδὸν σταθερόν, διότι αἱ δύο του διαγώνιοι ἔχουν δοθέντα μήκη καὶ τέμνονται ὑπὸ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν τῶν εὐθειῶν ΧΧ' καὶ ΥΥ'.

Τὸ ὕψος ἢ ἡ κάθετος ἐκ τοῦ σημείου Β π.χ. ἐπὶ τὴν βάσιν ΓΗΔΛ. εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν εὐθειῶν ΧΧ', ΥΥ' ἥτις δὲν μεταβάλλεται. Συνεπῶς ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι σταθερός, τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὸ τετράεδρον.

158 α. *Παρατήρησις.* Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΛΗ εἶναι κάθετοι μεταξύ των, παραστήσωμεν δὲ τὰ μήκη αὐτῶν διὰ μ καὶ ν, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως θὰ εἶναι $\frac{\mu\nu}{2}$. Ἐὰν δ παριστᾷ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν ΧΧ' καὶ ΥΥ' θὰ ἔχωμεν διὰ τὸ παραλληλεπίπεδον:

$$\text{ὄγκος} = \frac{\mu\nu\delta}{2}.$$

ἄρα, ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου θὰ εἶναι: $\frac{\mu\nu\delta}{6}$.

Ἐὰν αἱ διαγώνιοι σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν α, ἔχομεν:

$$\text{Τετράεδρον} = \frac{\mu\nu \,.\, \eta\mu\,\alpha}{2} \cdot \frac{\delta}{3}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\mu\nu\delta \,.\, \eta\mu\,\alpha}{6}.$$

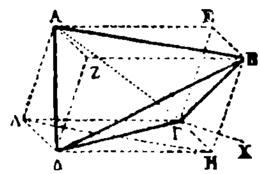
Ὁ τύπος οὗτος τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου, ἂν θεωρηθῇ γνωστός, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τοῦ Steiner.

159. Λαμβάνοντες ἀνὰ δύο τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ἑνὸς τετραέδρου, σχηματίζομεν τρία ζεύγη ἀκμῶν.

1) Ἓν τετράεδρον δύναται νὰ ἔχῃ ἕν, δύο ἢ τρία ζεύγη ἴσων ἀκμῶν.

2) Ἓν τετράεδρον δύναται νὰ ἔχῃ ἓν μόνον ζεῦγος καθέτων ἀκμῶν μεταξύ των, ἢ τρία ζεύγη καθέτων ἀκμῶν.

1) Διὰ νὰ εἶναι αἱ δύο ἀπέναντι ἀκμαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ ἢ ΛΗ καὶ ΔΓ ἴσαι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ βάσις ΓΗΔΛ νὰ εἶναι ἓν ὀρθογώνιον. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ παραλληλεπίπεδον θὰ ἔχῃ ὀρθογώνιον βάσιν, ἀλλὰ αἱ δύο ἄλλαι ἕδραι ΒΗΓΕ, ΒΗΔΖ θὰ εἶναι τυχόντα παραλληλόγραμμα. Τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον ἔχει δύο ζεύγη ὀρθογωνίων ἑδρῶν· ἄρα τὸ ἀντίστοιχον τετράεδρον θὰ ἔχῃ δύο ζεύγη ἴσων ἀκμῶν. Τέλος τὸ τετράεδρον θὰ ἔχῃ τρία ζεύγη ἴσων ἀκμῶν, ἐὰν τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον.



Σχ. 103.

2) Ἵνα δύο ἀπέναντι ἀκμαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ ἢ ΛΗ καὶ ΔΓ εἶναι κάθετοι, πρέπει ἡ ἕδρα ΓΗΔΛ νὰ εἶναι ῥόμβος.

Ἐὰν δύο ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι ὀρθογώνιοι, τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὸ τρίτον ζεῦγος.

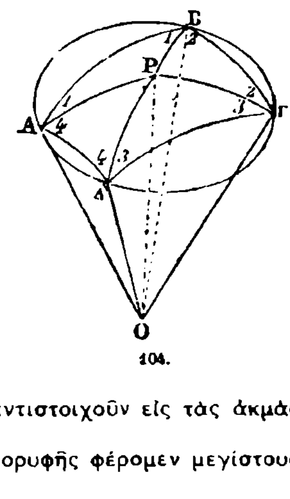
Πράγματι, ἐὰν ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, τὸ σχῆμα ΒΗΓΕ εἶναι ῥόμβος· ἄρα ΗΒ=ΗΓ=ΗΔ.

Οὕτω ἡ ἕδρα ΗΒΖΔ εἶναι ἐπίσης ῥόμβος καὶ ἡ ἀκμὴ ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ.

Παρατήρησις. Καλεῖται *ὀρθογώνιον* τετράεδρον, τὸ τετράεδρον τοῦ ὁποίου τὰ τρία ζεύγη τῶν ἀκμῶν, σχηματίζονται ὑπὸ εὐθειῶν καθέτων μεταξύ των.

Θεώρημα Guéneau d'Aumont

160. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν ἑνὸς σφαιρικοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν.



104.

Ἔστωσαν Ο τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ ΑΒΓΔ τὸ τετράπλευρον τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τεσσάρων τόξων μεγίστων κύκλων, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ Α,Β,Γ,Δ εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας ἐχούσης τὸ Ρ ὡς πόλον. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ δίεδροι γωνίαι αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἀκμὰς ΑΟ, ΓΟ, ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἀκμὰς ΒΟ, ΔΟ.

Διὰ τοῦ πόλου Ρ καὶ δι' ἑκάστης κορυφῆς φέρομεν μεγίστους

κύκλους· ἑκάστη πλευρὰ ΑΒ, π.χ. εἶναι ἡ βάσις ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΡΒ, διότι τὸ τόξον

$$ΡΑ = ΡΒ\cdot$$

ἄρα ἡ γωνία $$ΒΑΡ = ΑΒΡ$$

ἢ $$1 = 1, \quad 2 = 2, \text{ κλπ.}$$

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι διέδρων γωνιῶν εἶναι

$$1 + 2 + 3 + 4$$

ἄρα $$Α + Γ = Β + Δ$$

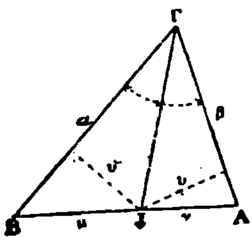
§ IV. *Βοηθητικὰ ἐμβαδὰ*

161. *Βοηθητικὰ ἐμβαδά.* Ἡ μέθοδος τῶν *βοηθητικῶν ἐμβαδῶν* συνίσταται εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἐμβαδῶν τῶν σχημάτων, ὅταν πρόκειται νὰ ἀποδειχθοῦν μερικαὶ σχέσεις, μεταξὺ τῶν ἀποτελούντων τὰ σχήματα γραμμῶν.

Ἰδοὺ μερικὰ παραδείγματα:

Θεώρημα

162. **Ἡ διχοτόμος γωνίας ἑνὸς τριγώνου τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευράν, εἰς τμήματα ἀνάλογα τῶν προσκειμένων πλευρῶν.**



Σχ. 105.

Πράγματι, τὰ τρίγωνα ΒΓΙ, ΑΓΙ ἔχοντα τὴν αὐτὴν κορυφὴν Γ καὶ τὰς βάσεις των ἀντιστοίχως ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν βάσεών των μ πρὸς ν.

Τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν ὕψη ἴσα πρὸς υ, εἶναι συνεπῶς μεταξύ των ὡς α. καὶ β· ἄρα·

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ἀνάλογος, σχέσις ἰσχύει διὰ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον.

Θεώρημα

163. **Εἰς ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον. τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς εἶναι σταθερὸν καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σημείου ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς βάσεως εἶναι ἐπίσης σταθερόν.**

Φέρομεν τὰς ΑΜ, ΑΝ καὶ τὴν ΓΖ κάθετον ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἰσοῦται μὲ

$$ΑΒ \,.\, ΓΖ,$$

ἢ μὲ $$ΑΒ \,.\, ΜΔ + ΑΓ \,.\, ΜΕ$$

ὅταν τὸ χωρίσωμεν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΜ, ΑΜΓ· ἀλλὰ ΑΓ ΑΒ.

Ἄρα $$ΑΒ \,.\, ΓΖ \quad ΑΒ(ΜΔ + ΜΕ),$$

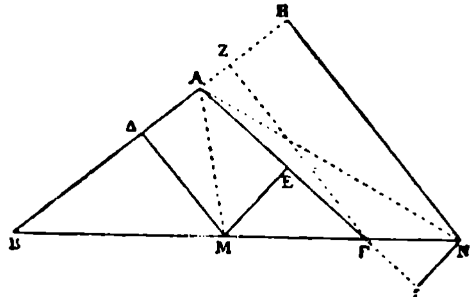
ἐξ οὗ ἡ ΜΔ σὺν τῇ ΜΕ ἰσοῦται πρὸς τὴν κάθετον ΓΖ τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ σημείου Γ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ.

Διὰ τὸ σημεῖον Ν ἔχομεν:

$$AB.\Gamma Z = AB.NH - A\Gamma.N\Lambda,$$

ἐξ οὗ

$$\Gamma Z = NH - N\Lambda.$$



Σχ. 106.

Παρατήρησις. Τὸ ὡς ἄνω θεώρημα ἐδείχθη ἤδη διὰ μιᾶς ἄλλης μεθόδου (ἀριθ. 146).

Θεώρημα

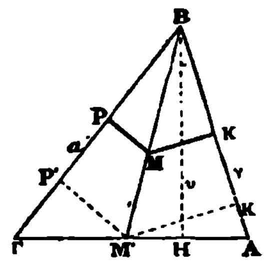
164. Αἱ ἀποστάσεις τυχόντος σημείου μιᾶς διαμέσου ἀπὸ τὰς πλευρὰς τὰς διερχομένας διὰ τῆς αὐτῆς κορυφῆς, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν πλευρῶν τούτων.

Πράγματι $\frac{MP}{MK} = \frac{M'P'}{M'K'}$.

Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΓΒΜ', ΑΒΜ' εἶναι ἴσα, ἄρα

$$\alpha . M'P' = \gamma . M'K',$$

ἐξ' οὗ $\frac{M'P'}{M'K'} = \frac{MP}{MK} = \frac{\gamma}{\alpha}$.



Σχ. 107.

Θεώρημα

165. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τῶν κορυφῶν ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, ἔχομεν τὴν σχέσιν:

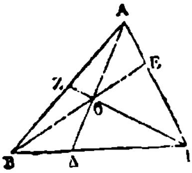
$$\frac{O\Delta}{A\Delta} + \frac{OE}{BE} + \frac{OZ}{\Gamma Z} = 1.$$

Πράγματι τὰ τρίγωνα ΒΟΓ καὶ ΒΑΓ ἔχουν λόγον πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον τὰ ὕψη των ἢ ὃν λόγον ἔχουν αἱ γραμμαὶ ΟΔ καὶ ΑΔ, αἵτινες εἶναι ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν:

$$\frac{BO\Gamma}{BA\Gamma} = \frac{O\Delta}{A\Delta}, \quad \text{ὁμοίως} \quad \frac{AO\Gamma}{AB\Gamma} = \frac{OE}{BE},$$

καὶ
$$\frac{ΑΟΒ}{ΑΒΓ}=\frac{ΟΖ}{ΓΖ}.$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας, κατὰ μέλη εὑρίσκομεν:
$$\frac{ΒΟΓ+ΑΟΓ+ΑΟΒ}{ΑΒΓ}=1=\frac{ΔΟ}{ΑΔ}+\frac{ΟΕ}{ΒΕ}+\frac{ΟΖ}{ΓΖ}.$$



Σχ. 108.

Θὰ εὕρωμεν δι' ἀναλόγου πορείας, ὅτι
$$\frac{ΑΟ}{ΑΔ}+\frac{ΒΟ}{ΒΕ}+\frac{ΓΟ}{ΓΖ}=2.$$

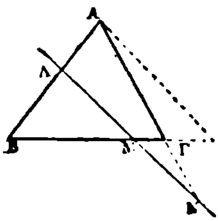
Θεώρημα τοῦ Μενελάου

166. Ὅταν μία διατέμνουσα τέμνει τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, τὸ γινόμενον τῶν τριῶν τμημάτων μὲ μὴ κοινὰ πέρατα, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἄλλων τμημάτων.

Ἂν παραστήσωμεν διὰ τῶν Α,Β,Γ τὰ τρίγωνα ΑΛΝ,ΒΛΜ,ΓΜΝ.

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν: $\frac{Α}{Β}\cdot\frac{Β}{Γ}\cdot\frac{Γ}{Α}=1.$

Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην ἢ παραπληρωματικήν, εἶναι μεταξύ των ὡς τὸ γινόμενον τῶν πλευρῶν, αἵτινες περιέχουν τὴν γωνίαν ταύτην.



Σχ. 109.

ἄρα
$$\frac{Α}{Β}=\frac{ΑΛ\,.\,ΑΝ}{ΒΛ\,.\,ΛΜ},$$
$$\frac{Β}{Γ}=\frac{ΒΜ\,.\,ΛΜ}{ΓΜ\,.\,ΜΝ},$$
$$\frac{Γ}{Α}=\frac{ΓΝ\,.\,ΜΝ}{ΑΝ\,.\,ΛΝ}.$$

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη καὶ ἁπλοποιοῦντες, ἔχομεν:
$$\frac{Α\,.\,Β\,.\,Γ}{Β\,.\,Γ\,.\,Α}=1=\frac{ΑΛ\,.\,ΒΜ\,.\,ΓΝ}{ΒΛ\,.\,ΓΜ\,.\,ΑΝ}$$

ἢ
$$ΑΛ\,.\,ΒΜ\,.\,ΓΝ=ΒΛ\,.\,ΓΜ\,.\,ΑΝ.$$

Θεώρημα τοῦ Céva

167. Αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι τὰς κορυφὰς ἑνὸς τριγώνου μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο τέμνουσαι τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ὁρίζουν ἓξ τμήματα τοιαῦτα ὥστε τὸ γινόμενον τῶν τριῶν, μὲ μὴ συμπίπτοντα πέρατα, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἄλλων.

Παριστῶμεν διὰ α,β,γ... τὰ τρίγωνα ΑΟΛ, ΒΟΜ κλπ.

Τὰ τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφήν, ἔχουν λόγον ὃν αἱ βάσεις των, ἔχομεν λοιπόν:
$$\frac{α}{δ}=\frac{ΑΛ}{ΒΛ},\quad \frac{β}{ε}=\frac{ΒΜ}{ΓΜ},\quad \frac{γ}{ζ}=\frac{ΓΝ}{ΑΝ}.$$

ἐξ' οὗ $\frac{\alpha.\beta.\gamma}{\delta.\varepsilon.\zeta} = \frac{\text{ΑΛ}.\text{ΒΜ}.\text{ΓΝ}}{\text{ΒΛ}.\text{ΓΜ}.\text{ΑΝ}}.$

Ἀρκεῖ νὰ δεχθῇ ὅτι $\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon\zeta} = 1.$

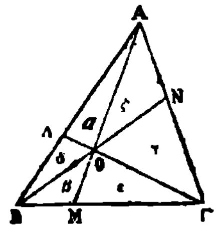
Λοιπὸν $\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{\text{ΟΛ}.\text{ΟΑ}}{\text{ΟΜ}.\text{ΟΓ}},$

$$\frac{\beta}{\zeta} = \frac{\text{ΟΒ}.\text{ΟΜ}}{\text{ΟΛ}.\text{ΟΝ}},$$

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\text{ΟΓ}.\text{ΟΝ}}{\text{ΟΛ}.\text{ΟΒ}}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν:

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon\zeta} = 1.$$



Σχ. 110.

Ἄλλη ἀπόδειξις. Ἔχομεν ὡς γνωστόν:

$$\frac{\text{ΛΑ}}{\text{ΛΒ}} = \frac{\text{ΟΓΑ}}{\text{ΟΓΒ}},$$

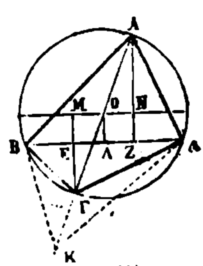
$$\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}} = \frac{\text{ΟΑΒ}}{\text{ΟΑΓ}},$$

$$\frac{\text{ΝΓ}}{\text{ΝΑ}} = \frac{\text{ΟΒΓ}}{\text{ΟΒΑ}}.$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη, λαμβάνομεν ὡς γινόμενον τὴν μονάδα.

Θεώρημα

168. Ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἥτις δύναται νὰ ἀχθῇ διὰ δοθέντος σημείου Ε ἐντὸς δοθείσης γωνίας, εἶναι τοιαύτη ὥστε ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ΕΓ, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Ε, καὶ αἱ κάθετοι ΒΓ, ΔΓ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας ΒΕΔ, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ.



Σχ. 111.

Δεχόμενοι τὰς εὐθείας ΓΒ, ΓΔ, ΓΕ ἀντιστοίχως καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει δύο ἀπέναντι γωνίας Β καὶ Δ ὀρθάς· ἀκολούθως, ΑΓ θὰ εἶναι διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, καὶ ὡς ἔχομεν ἤδη δείξει αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΒΓ,ΑΔ ἔχουν σας προβολὰς ΒΕ,ΖΔ (ἀριθ. 135), ἄρα τὸ θεώρημα μεταπίπτει εἰς τὸ ἀκόλουθον:

Ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἥτις δύναται νὰ ἀχθῇ δι' ἑνὸς δοθέντος σημείου Ε ἐντὸς δοθείσης γωνίας ΧΑΨ (σχ. 112) *εἶναι εὐθεῖα ΒΕΓ τοιαύτη ὥστε τὸ τμῆμα ΒΕ, νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν προβολὴν ΖΓ τῆς πλευρᾶς ΑΓ (Ἐπίσης τὸ τμῆμα ΓΕ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν προβολὴν ΒΖ τῆς πλευρᾶς ΑΒ).*

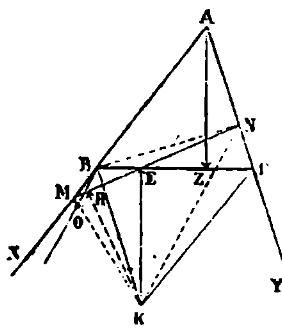
Ἀπόδειξις. Ἔστω ΒΕ=ΖΓ.

Ὑψοῦντες κάθετον ΕΚ ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ λαμβάνοντες ΕΚ ΑΖ, σχηματίζομεν ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΚΓ.

Διὰ τοῦ σημείου Ε φέρομεν μίαν ἄλλην εὐθεῖαν ΜΕΝ. Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι <ΜΝ.

Συγκρίνομεν τὰ τρίγωνα ΒΚΓ, ΜΚΝ.

Ἐὰν ἀποδείξωμεν ὅτι ΒΚΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ΜΚΝ, θὰ ἔχωμεν δείξει ὅτι ΒΓ<ΜΝ, διότι τὸ ὕψος ΚΕ τοῦ πρώτου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὕψους ΚΗ τοῦ δευτέρου.



Σχ. 112

Ἀλλά, ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΓ καὶ ΒΚ, τὰ τρίγωνα ΒΚΓ, ΒΚΝ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΚ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ συγκρίνωμεν τὰ ΒΚΝ καὶ ΜΚΝ· πρὸς τοῦτο φέρομεν παράλληλον ΒΟ πρὸς τὴν πλευρὰν ΝΚ λαμβανομένην ὡς βάσιν. Τὸ σημεῖον Ο εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Κ, διότι ἡ γωνία ΚΒΟ, ἴση πρὸς τὴν ΒΚΝ, εἶναι μικροτέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ΒΚΓ, ΚΒΜ· ἄρα ἡ κάθετος ἐκ τοῦ σημείου Β ἐπὶ τὴν ΚΝ εἶναι μικροτέρα τῆς καθέτου ἐκ τῆς κορυφῆς Μ ἐπὶ τὴν αὐτὴν βάσιν ΚΝ. Οὕτω τὸ τρίγωνον ΒΚΝ εἶναι μικρότερον τοῦ ΜΚΝ.

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΚΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ΜΚΝ,

ἐξ οὗ $\quad\quad$ ΒΓ<ΜΝ

168 α. *Σημείωσις.* Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δὲν εἶναι παρὰ μία μερικὴ περίπτωσις τοῦ γενικοῦ θεωρήματος τοῦ Νεύτωνος: *Ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ἥτις δύναται νὰ ἀχθῇ μεταξὺ δύο δοθεισῶν καμπύλων, εἰς τρόπον ὥστε ἡ εὐθεῖα αὕτη ΒΕΓ νὰ διέρχεται δι' ἑνὸς δοθέντος σημείου ἢ νὰ ἐφάπτεται μιᾶς τρίτης καμπύλης, εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ πληροῖ τοὺς κάτωθι ὅρους: Αἱ κάθετοι αἱ ἀγόμεναι εἰς τὰς καμπύλας εἰς τὰ ἄκρα Β καὶ Γ τῆς εὐθείας, πρέπει νὰ τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐπὶ τὴν τρίτην καμπύλην εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε.*

§ V. Βοηθητικοὶ ὄγκοι

169. *Βοηθητικοὶ ὄγκοι.* Ἡ χρῆσις τῶν βοηθητικῶν ὄγκων εἶναι ἀνάλογος τῆς τῶν βοηθητικῶν ἐμβαδῶν, ἀλλὰ εἶναι πολὺ περισσότερον διαδεδομένη. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν βοηθητικῶν ὄγκων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν:

1) Σχέσεις μεταξὺ διαφόρων γραμμῶν (ἀριθ. 170).

2) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σχήματος (ἀριθ. 173).

3) Τὰς ἰδιότητας ἑνὸς ἐπιπέδου σχήματος θεωρουμένου ὡς τομῆς ἑνὸς στερεοῦ (ἀριθ. 174).

Πρώτη περίπτωσις. *Γραμμικαὶ σχέσεις.*

Θεώρημα

170. **Ἐὰν τετράεδρον ἔχει τὰς τρεῖς ἕδρας αὐτοῦ ἴσας, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς τετάρτης ἕδρας ἀπὸ τὰς τρεῖς ἄλλας εἶναι σταθερόν.**

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος πρὸς ἐκείνην τοῦ θεωρήματος (ἀριθ. 163). Ἑνοῦμεν τὸ δοθὲν σημεῖον μὲ τὰς τέσσαρας κορυφάς, ὁπότε τὸ στερεὸν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἐχούσας ὡς βάσεις μίαν τῶν πλευρικῶν ἑδρῶν, κλπ.

Ἐπίσης, τὸ θεώρημα τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται εἰς τὰς ἠγμένας εὐθείας ἀπὸ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου (ἀριθ. 165) ὁδηγεῖ εἰς τὸ ἀκόλουθον θεώρημα, εὐκόλως ἀποδεικνυόμενον μὲ τὴν βοήθειαν τῶν βοηθητικῶν ὄγκων.

Ἐὰν αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐξ ἑκάστης κορυφῆς ἑνὸς τετραέδρου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ στερεοῦ, τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων τὰ ὁποῖα προκύπτουν διαιροῦντες δι' ὁλοκλήρου τῆς ἀντιστοίχου γραμμῆς, ἕκαστον τμῆμα κείμενον μεταξὺ τοῦ σημείου Θ καὶ τῆς ἕδρας τοῦ τετραέδρου, ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα.

Θεώρημα

171. **Δοθέντος ἑνὸς σημείου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυέδρου, τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων αἵτινες ἄγονται ἐξ αὐτοῦ τοῦ σημείου ἐπὶ τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου εἶναι σταθερόν.**

Λαμβάνοντες ἑκάστην ἕδραν ὡς βάσιν μιᾶς πυραμίδος ἐχούσης τὸ δοθὲν σημεῖον ὡς κορυφὴν ἔχομεν μίαν ὁμάδα πυραμίδων. Κατόπιν θεωροῦμεν μίαν ἄλλην ὁμάδα πυραμίδων ἐχουσῶν κορυφὴν τὸ κέντρον τοῦ πολυέδρου καὶ βάσεις τὰς ἕδρας αὐτοῦ.

Ὁ ὄγκος τοῦ πολυέδρου εὑρίσκεται εἴτε πολλαπλασιάζοντες τὸ τρίτον μιᾶς ἕδρας ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὡς ἄνω ἠγμένων καθέτων, εἴτε πολλαπλασιάζοντας τὸ τρίτον μιᾶς ἕδρας ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστημάτων τοῦ πολυέδρου. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων εἶναι σταθερόν, διότι ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστημάτων.

172. Παρατήρησις. Ἡ μέθοδος τῶν βοηθητικῶν ἐμβαδῶν ἢ ὄγκων εἶναι πολλὲς φορὲς ὀλιγώτερον κομψὴ ἀπὸ μίαν λύσιν ἄμεσον, ἀλλὰ ἐφαρμόζεται εἰς ἕνα ἀρκετὰ μεγάλον ἀριθμὸν προβλημάτων. Οὕτω, ὡς πρὸς τὰς μεθόδους τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ γνωστοῦ θεωρήματος :

Τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐξ ἑνὸς τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ εἶναι σταθερόν, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὰς ἀκολούθους παρατηρήσεις :

Ἡ δοθεῖσα ἀπόδειξις (ἀριθ. 20) εἶναι εὐφυής, ἀλλὰ δὲν ἐφαρμόζεται παρὰ εἰς αὐτὸ τὸ πρόβλημα. Ἡ μέθοδος τοῦ διπλασιασμοῦ (ἀριθ. 74) εἶναι γενικωτέρα, ἀλλὰ δὲν ἁρμόζει παρὰ εἰς τὰ ἐπίπεδα σχήματα· καὶ ἡ χρῆσις τῶν βοηθητικῶν ἐπιφανειῶν (ἀριθ. 163) ἔχει περισσοτέρας ἐφαρμογὰς καὶ ἄγει εἰς ἀναλόγους ἀποδείξεις διὰ τὴν γεωμετρίαν τοῦ χώρου.

Δευτέρα Περίπτωσις. *Θεωροῦμεν γνωστοὺς ὄγκους, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ζητουμένης ἐπιφανείας.*

Πρόβλημα

173 **Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κώνου ἐκ περιστροφῆς, τεμνομένου ὑπὸ πλαγίου ἐπιπέδου.**

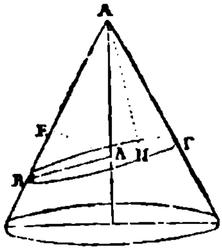
Ἡ κωνικὴ τομὴ ΒΓ εἶναι μία ἔλλειψις τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν ἢ νὰ ὑπολογίσωμεν τοὺς ἄξονας. Ἐκ τοῦ σημείου Δ,

καθ' ὃ ὁ ἄξων τέμνει τὴν κωνικὴν τομήν, φέρομεν κάθετον ΔΕ ἐπὶ μίαν γενέτειραν. Φέρομεν ἀκόμη τὴν κάθετον ΑΗ ἐπὶ τὴν κωνικὴν τομήν.

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ΑΒΓ ἰσοῦται:

$$\text{μὲ τὴν ἔλλειψιν ΒΓ} \times \frac{ΑΗ}{3},$$

ἀλλὰ τὸ σημεῖον Δ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλας τὰς γενετείρας. Ὁ κῶνος λοιπὸν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ὅριον εἰς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων αἱ ὁποῖαι θὰ εἶχαν τὸ σημεῖον Δ ὡς κορυφήν, καὶ τῶν ὁποίων τὸ τρίγωνον τῆς βάσεως θὰ εἶχε πλευρὰς δύο γειτονικὰς γενετείρας καὶ μίαν χορδὴν τῆς ἐλλείψεως. Ἄρα ὁ ὄγκος δύναται νὰ εὑρεθῇ πολλαπλασιάζοντες τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν ἐπὶ $\frac{ΔΕ}{3}$· ἑπομένως ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια:



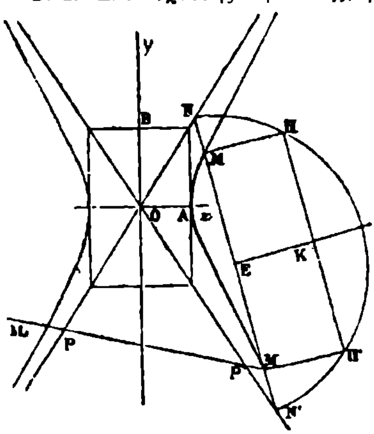
Σχ. 113.

$$ΒΑΓ \quad \frac{\text{ἔλλειψις ΒΓ} \times ΑΗ}{ΔΕ}.$$

Τρίτη Περίπτωσις. *Μεταχειριζόμεθα βοηθητικὸν ὄγκον τέλος διὰ να μελετήσωμεν τὰς ἰδιότητας ἑνὸς ἐπιπέδου σχήματος, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς τμῆμα ἑνὸς στερεοῦ.*

Θεώρημα

174. Ἐπὶ τυχούσης τεμνούσης, ἡ ὑπερβολὴ καὶ αἱ ἀσύμπτωτοι αὐτῆς καθορίζουν ἴσα τμήματα.



Σχ. 114.

Ἂς θεωρήσωμεν τὸν σχηματιζόμενον κῶνον κατὰ τὴν περιστροφὴν τῆς ΟΝ περὶ τὴν Οx.

Ἐπίπεδον τέμνον καθέτως τὸν κύριον μεσημβρινὸν καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἴχνος ἔστω ΝΝ', θὰ ἔτεμνε τὸν κῶνον κατὰ μίαν ἔλλειψιν, ἀφοῦ ὅλαι αἱ γενέτειραι τῆς αὐτῆς χοάνης θὰ τέμνωνται.

Ἔστω ΝΗΝ' ἡ κατάκλισις τοῦ ἡμίσεως τῆς ἐλλείψεως. Τὸ ἐπίπεδον τῆς ὑπερβολῆς ἀπέχει τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου κατὰ τὸ μῆκος ΟΒ· ἄρα τὸ ἴχνος ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως εἶναι μία χορδὴ ΗΗ' παράλληλος πρὸς τὴν ΝΝ' καὶ τοιοῦτον ὥστε ΕΚ=ΟΒ.

Ἀλλὰ ὁ ΝΝ' εἶναι ὁ πρωτεύων ἄξων τῆς ἐλλείψεως καὶ ἑπομένως ἡ ὑψουμένη κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΝΝ' διαιρεῖ ἑκάστην παράλληλον χορδὴν εἰς δύο ἴσα μέρη, οὕτω ΚΗ=ΚΗ'· ἄρα ΜΝ=Μ'Ν'.

Ἐὰν η τέμνουσα ἔτεμνε τοὺς δύο κλάδους, ἡ κωνικὴ τομὴ θὰ ἦτο ὑπερβολή, τῆς ὁποίας ὁ πρωτεύων ἄξων θὰ ἦτο ἡ ΡΡ', ἐνῶ ἡ $M'M_1$ θὰ ἦτο ἡ προβολὴ μιᾶς παραλλήλου χορδῆς· ἄρα πάλιν $M_1P=M'P'$.

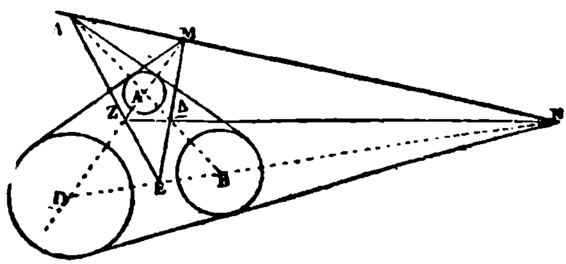
Ἐφαρμογή. Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἀποδειχθείσης ἰδιότητος κατασκευάζεται εὐκόλως ὑπερβολή, τῆς ὁποίας γνωρίζομεν τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἓν σημεῖον τῆς καμπύλης.

175. Πόρισμα. *Ἑκάστη ἐφαπτομένη περατουμένη εἰς τὰς ἀσυμπτώτους, χωρίζεται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς.*

Θεώρημα τοῦ D'Alembert

176. **Τρεῖς περιφέρειαι, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, ἔχουν ἓξ κέντρα ὁμοιότητος· τὰ τρία ἐξωτερικὰ κέντρα κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἐπίσης ἀνὰ δύο ἐσωτερικὰ κέντρα καὶ ἓν ἐξωτερικόν.**

Ἀπόδειξις τοῦ Monge. Θεωροῦμεν τὰς σφαίρας αἱ ὁποῖαι ἔχουν μεγίστους κύκλους τοὺς δοθέντας Α, Β, Γ. Οἱ κῶνοι οἱ περιγεγραμμένοι εἰς τὰς σφαίρας ταύτας λαμβανόμενοι ἀνὰ δύο, ἔχουν ἀντιστοίχως κορυφὰς τὰ κέντρα ὁμοιότητος.



Σχ. 118.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ τρία ἐξωτερικὰ κέντρα Λ, Μ, Ν, κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὰ δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἀφίνουν τὰς τρεῖς σφαίρας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος. Τὰ δύο αὐτὰ ἐπίπεδα περιέχουν τὰς τρεῖς κορυφὰς Λ, Μ, Ν, τῶν περιγεγραμμένων κώνων. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ δύο ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ μίαν εὐθεῖαν, ἕπεται ὅτι τὰ τρία σημεῖα Λ, Μ, Ν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

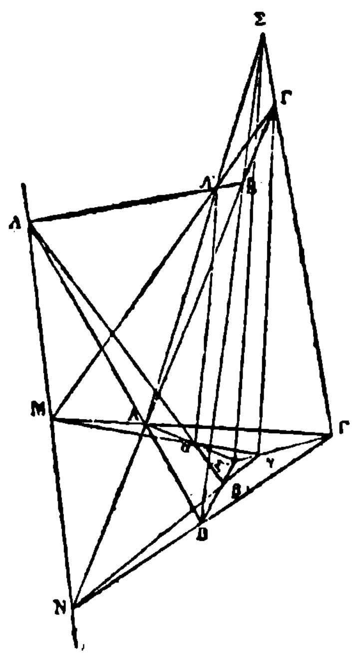
Παρατήρησις. Διὰ τὰ Ζ, Δ, Ν θεωροῦμεν τὰ δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἀφίνουν τὰς σφαίρας Β καὶ Γ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, ἐνῶ ἡ σφαῖρα Α εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄλλο, κλπ.

Θεώρημα τοῦ Desargues

177. **Ἐὰν αἱ πλευραὶ δύο τριγώνων ΑΒΓ, αβγ, τέμνονται ἀνὰ δύο εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας, αἱ εὐθεῖαι Αα, Ββ, Γγ, αἱ ὁποῖαι ἑνώνουν τὰς ἀντιστοίχους κορυφάς, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.**

'Υποθέτομεν τὸ αβγ, βάσιν ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου τὸ Α'Β'Γ' θὰ εἶναι τομή, ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου ἀγομένου διὰ τῆς εὐθείας ΛΜΝ.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, Α'Β' τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Λ, διότι ΛΑ'Β' εἶναι ἡ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πρίσματος τοῦ περιέχοντος τὴν Λαβ.



Σχ. 116.

Εἶναι προφανὲς ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΑ' ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ· διότι, ἐὰν διὰ τῶν τεμνομένων εὐθειῶν ΛΑΒ, ΛΑ'Β' φέρομεν ἓν πρῶτον ἐπίπεδον κατόπιν δεύτερον ἐπίπεδον διὰ τῶν ΜΑΓ, ΜΑ'Γ', τρίτον δὲ διὰ τῶν ΝΒΓ, ΝΒ'Γ', τὰ τρία ἐπίπεδα τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Σ.

Ἄρα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι Λα, Ββ, Γγ τέμνονται εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Σ', προβολὴν τῆς κορυφῆς Σ τῆς πυραμίδος εἰς τὴν βάσιν ΑΒΓ.

Θεώρημα

177 α. Ἐὰν αἱ κορυφαὶ δύο τριγώνων ΑΒΓ, αβγ, ὁρίζουν ἀνὰ δύο τρεῖς εὐθείας τεμνομένας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Σ', αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων τέμνονται ἀνὰ δύο, εἰς τρία σημεῖα Λ, Μ, Ν, κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Θεωροῦμεν μίαν πυραμίδα, τῆς ὁποίας ἔστωσαν Σ'αΑ, Σ'βΒ, Σ'γΓ αἱ προβολαὶ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν. Αἱ προβάλλουσαι αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς κορυφὰς α, β, γ θὰ δώσουν ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων ἀκμῶν τὰ σημεῖα Α', Β', Γ'.

Ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς Α'Β'Γ', τέμνει τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως κατὰ μίαν εὐθεῖαν καὶ αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ ΑΒ καὶ Α'Β', τέμνονται ἐπ' αὐτῆς τῆς εὐθείας, ἔστω εἰς τὸ Λ· ἄρα ἡ αβ διέρχεται ἐπίσης δι' αὐτοῦ τοῦ σημείου, διότι ἡ αβ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς Α'Β'.

177 β. Σημείωσις. Τὰ δύο θεωρήματα τοῦ Desargues, εἶναι θεμελιώδη εἰς τὴν θεωρίαν τῆς *ὁμολογίας*.

§ VI. *Προβολαὶ ἢ τομαὶ*

178. Ἡ μέθοδος τῶν προβολῶν ἢ τομῶν, εἶναι τρόπον τινὰ ἡ ἀντίστροφος τῆς μεθόδου, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖ τοὺς βοηθητικοὺς ὄγκους καὶ ἐπιφανείας, πρὸς μελέτην τῶν ἐπιπέδων προβλημάτων

τῆς Γεωμετρίας. Πράγματι, διὰ τῆς μ θόδου τῶν προβολῶν μεταβαίνομεν εἰς ἕνα πλέον ἁπλοῦν σχῆμα, ἀπὸ τὸ προτιθέμενον ἢ μεταφέρομεν ἕνα πρόβλημα τῆς Γεωμετρίας τοῦ χώρου, εἰς ἓν πρόβλημα τοῦ ἐπιπέδου, περιοριζόμενοι νὰ μελετήσωμεν πλέον τὴν τομὴν τοῦ στερεοῦ ὑπὸ ἑνὸς καταλλήλως ἐκλεγομένου ἐπιπέδου.

Θὰ περιορισθῶμεν ἐδῶ εἰς τὴν *κυλινδρικὴν προβολήν*, δηλαδὴ τὴν προβολὴν τὴν ὁποίαν δίδοουν εὐθεῖαι παράλληλοι μεταξύ των, ἀλλὰ μὲ τυχοῦσαν διεύθυνσιν, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς. Οὕτω, ἡ μελέτη τῆς ἐπιπέδου προβολῆς ἑνὸς δοθέντος σχήματος, ἀνάγεται εἰς τὴν μελέτην τῆς τομῆς τοῦ κυλίνδρου, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν προβαλλουσῶν τὸ δοθὲν σχῆμα.

Θεώρημα

179. **Ἡ διχοτομος τῆς γωνίας ἑνὸς τριγώνου, διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι πλευράν, εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν προσκειμένων πλευρῶν.**

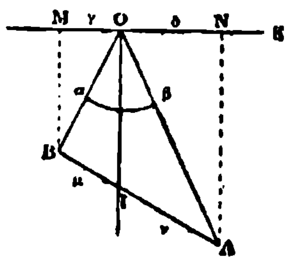
Προβάλλομεν τὰς κορυφὰς Α καὶ Β ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου ΟΚ.

Αἱ πλευραὶ α καὶ β, ἔχουσιν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὴν ΟΙ, εἶναι δὲ ἀνάλογοι τῶν προβολῶν τῶν γ καὶ δ.

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει διὰ τὰ τμήματα μ καὶ ν, ἄρα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\mu}{\nu}$.

Παρατήρησις. Διὰ τὰ τμήματα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου, προβάλλομεν τὰ τμήματα αὐτὰ καὶ τὰς προσκειμένας πλευρὰς ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἐπίσης ἁπλῆ, ὡς ἡ ἀνωτέρω.



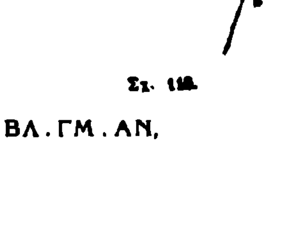
Σχ. 117.

Θεώρημα τοῦ Μενελάου

180. **Ἐὰν μία τέμνουσα, τέμνει τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, τὸ γινόμενον τριῶν τμημάτων μὴ ἐχόντων κοινὰ πέρατα, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἄλλων τμημάτων (ἀριθ. 166).**

Ἐπὶ τυχούσης εὐθείας, προβάλλομεν τὰς τρεῖς κορυφὰς τοῦ τριγώνου, διὰ τῶν εὐθειῶν Αα, Ββ, Γγ, παραλλήλως πρὸς τὴν τέμνουσαν. Τὸ σημεῖον Ο εἶναι ἡ προβολὴ τῶν τριῶν σημείων Λ, Μ, Ν.

Αἱ παράλληλοι διαιροῦν τὰς τεμνούσας εἰς μέρη ἀνάλογα· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν λόγον $\frac{ΑΛ}{ΒΛ}$, διὰ τοῦ $\frac{αο}{βο}$, κλπ.



Σχ. 118.

Ἀλλὰ τὴν σχέσιν ΑΛ . ΒΜ . ΓΝ = ΒΛ . ΓΜ . ΑΝ,

ἢ τὴν $\frac{ΑΛ}{ΒΛ}\cdot\frac{ΒΜ}{ΓΜ}\cdot\frac{ΓΝ}{ΑΝ}=1$, δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν διὰ $\frac{αο}{βο}\cdot\frac{βο}{γο}\cdot\frac{γο}{αο}=1$.

Ἡ τελευταία ὅμως αὕτη ἰσότης εἶναι προφανής· συνεπῶς ἡ ζητουμένη σχέσις ἀπεδείχθη.

Θεώρημα τοῦ Carnot

181. Ἐὰν εὐθεῖα τέμνει τὰς πλευρὰς ἑνὸς ἐπιπέδου πολυγώνου, ἑκάστη πλευρὰ διαιρεῖται εἰς δύο τμήματα. Τὸ γινόμενον ὅλων τῶν τμημάτων τῶν μὴ ἐχόντων κοινὰ πέρατα, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων τμημάτων.

Ἔστω, π.χ., ἕνα πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ, τοῦ ὁποίου αἱ διαδοχικαὶ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ,... τέμνονται ὑπὸ μιᾶς τεμνούσης εἰς τὰ σημεῖα Η, Κ, Λ, Μ, Ν.

Προβάλλομεν τὸ σχῆμα ἐπὶ μιᾶς τυχούσης εὐθείας xy, κειμένης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, δι' εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὴν τέμνουσαν, καὶ ἔστω o τὸ σημεῖον ὅπου ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὴν xy.

$$\frac{ΑΗ}{ΒΗ}\cdot\frac{ΒΚ}{ΓΚ}\cdot\frac{ΓΛ}{ΔΛ}\cdot\frac{ΔΜ}{ΕΜ}\cdot\frac{ΕΝ}{ΑΝ}=1$$

ἢ

$$\frac{αο}{βο}\cdot\frac{βο}{γο}\cdot\frac{γο}{δο}\cdot\frac{δο}{εο}\cdot\frac{εο}{αο}=1$$

Ἡ σχέσις αὕτη εἶναι προφανὴς ἄρα ἡ πρώτη ἐδείχθη.

181 α. Παρατήρησις. Δεικνύομεν ἐπίσης δι' ἑνὸς πολὺ ἁπλοῦ τρόπου, τὴν ἀκόλουθον γενικὴν πρότασιν:

Ἐὰν ἐπίπεδον τέμνει τὰς πλευρὰς ἑνὸς στρεβλοῦ πολυγώνου, ἑκάστη πλευρὰ διαιρεῖται εἰς δύο τμήματα. Τὸ γινόμενον ὅλων τῶν τμημάτων τῶν μὴ ἐχόντων κοινὰ πέρατα, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων τμημάτων.

Ἀρκεῖ νὰ προβάλλωμεν τὸ σχῆμα ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, δι' εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον· οὕτω ἐπανερχόμεθα εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Carnot.

Τόπος

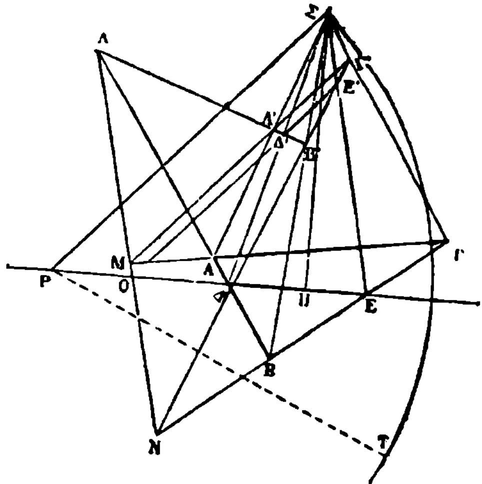
182. Μιὰ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ τέμνεται ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΛΜΝ, καὶ τὴν πυραμίδα κατὰ τομὴν Α'Β'Γ'. Στρέφομεν τὴν τομὴν Α'Β'Γ' περὶ τὸν ἄξονα ΜΝ, καὶ φέρομεν τὰς ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος;

Διὰ τοῦ ὕψους ΣΗ φέρομεν ἐπίπεδον ΣΗΟΡ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα στροφῆς· τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ὁρίζει δύο εὐθείας ΔΕ, Δ'Ε' τῶν ὁποίων ἀρκεῖ νὰ μελετηθῇ ἀντιστοίχως ἡ θέσις, διότι αὗται εἶναι συνδεδεμέναι σταθερῶς μετὰ τῆς βάσεως καὶ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς τομῆς. Οὕτω τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν γνωστὴν ἄσκησιν τῆς ἐπιπέδου γεωμετρίας:

Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου τομῆς Σ τῶν εὐθειῶν ΔΔ', ΕΕ' (ἀριθ. 84).

Ἡ κορυφὴ Σ γράφει περιφέρειαν τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τῶν ΜΝ· Ρ εἶναι τὸ κέντρον αὐτῆς καὶ ΡΣ ἡ ἀκτίς.

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον Σ, ὡς σημεῖον ὄψεως τῶν δύο προοπτικῶν σχημάτων Α'Β'Γ', ΑΒΓ καὶ τὸ



Σχ 119.

πρόβλημα ἀναφέρεται συχνὰ ὑπὸ τὴν μορφὴν τοῦ θεωρήματος:

Ἐὰν ἕνα σχῆμα ΑΒΓ μένει ἀκίνητον ἐνῶ τὸ προοπτικόν του Α'Β'Γ' στρέφεται περὶ τὸ ἴχνος ΛΜΝ τοῦ ἐπιπέδου, ὁ τόπος τοῦ σημείου Σ εἶναι κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα ΛΜΝ.

Θεώρημα

183. **Εἰς ἕνα τρίεδρον, τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ἀπὸ ἑκάστην ἀκμὴν καὶ τὴν διχοτόμον τῆς ἀπέναντι γωνίας, διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.**

Λαμβάνομεν ἴσα μήματα ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ ἐφ' ἑκάστης ἀκμῆς· θὰ ἔχωμεν μίαν πυραμίδα ἔχουσαν βάσιν ΑΒΓ καὶ παραπλεύρους ἕδρας, τρία ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς ἑκάστου ἐξ αὐτῶν, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, ἑπομένως τὰ ἴχνη τῶν ἀγομένων ἐπιπέδων ἐντὸς τοῦ τριέδρου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, εἶναι αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἀλλὰ αἱ γραμμαὶ αὗται τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ· συνεπῶς, τὰ τρία ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΣΜ.

Πρόβλημα

184. **Νὰ περιγραφῇ κῶνος ἐκ περιστροφῆς εἰς δοθὲν τρίεδρον.**

Κατόπιν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, παρατηροῦμεν ὅτι ἀρ-

κεῖ νὰ περιγραφῇ μία περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ προκῦπτον ἂν ληφθῇ:

$$\Sigma A = \Sigma B = \Sigma \Gamma$$

Ἐπειδὴ αἱ ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι, ὁ κῶνος θὰ εἶναι ἐκ περιστροφῆς.

Παρατηρήσεις. 1) Δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν τέσσαρας κώνους ἐκ περιστροφῆς μὲ δύο χοάνας, εἰς τρεῖς εὐθείας διερχομένας διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν τέσσαρας κώνους ἐκ περιστροφῆς μὲ δύο χοάνας, εἰς τρία ἐπίπεδα μὴ διερχόμενα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

2) Ἡ Παραστατικὴ Γεωμετρία ἐπιτρέπει τὴν πραγματοποίησιν κατασκευῶν ἀναφερομένων εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο. (Βλ. *Elements de Géométrie descriptive*, par F. J., καὶ les *Exercices de Géométrie descriptive*, 4η ἔκδοσις).

I V

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

185. Ὁρισμός. Ἡ μέθοδος ἡ καλουμένη Μετασχηματισμὸς τῶν σχημάτων, συνίσταται εἰς τὴν ἀντικατάστασιν ἑνὸς δοθέντος σχήματος ὑπὸ ἑνὸς ἁπλουστέρου, συνδεομένου μετὰ τοῦ πρώτου διὰ σχέσεων θέσεως καὶ μεγέθους.

Κατὰ τὴν ἔκθεσιν τῶν στοιχειωδῶν μεθόδων, θὰ χρησιμοποιησωμεν τοὺς μετασχηματισμούς, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἐκ τῶν ἀκολούθων μετατροπῶν:

1) Ἡ παράλληλος μεταφορά.
2) Ἡ ἀναγωγὴ τῶν τεταγμένων ἑνὸς σχήματος.
3) Ὁμοιότης καὶ ὁμοιοθεσία.
4) Ἡ μέθοδος τοῦ ἀντιθέτου προβλήματος.
5) Ἡ ἀντιστροφή, ἢ ὁ μετασχηματισμὸς διὰ τῶν ἀντιστρόφων ἀκτίνων.

§ 1. Παράλληλος μεταφορὰ

186. Μεταφορὰ μιᾶς κορυφῆς. Τὰ θεμελιώδη θεωρήματα τὰ ἀναφερόμενα εἰς αὐτὸν τὸν τρόπον τοῦ μετασχηματισμοῦ, εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

Δύο τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἰσοδύναμα.
Δύο πυραμίδες ἔχουσαι τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἰσοδύναμοι.

Χρησιμοποιοῦμεν συχνὰ τὸ πρῶτον τῶν δύο τούτων θεωρημάτων, εἰς ὅλα τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα πρόκειται νὰ μεταβάλλωμεν ἓν δοθὲν πολύγωνον εἰς ἓν τρίγωνον ἰσοδύναμον καὶ νὰ διαιρέσωμεν ἓν πολύγωνον εἰς μέρη ἰσοδύναμα ἢ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δοθέντα μήκη.

Χρησιμοποιοῦμεν τὸ δεύτερον θεώρημα, διὰ νὰ ἀποδείξωμεν θεωρήματα ἀναφερόμενα εἰς ὄγκους πρίσματος ἢ πυραμίδος.

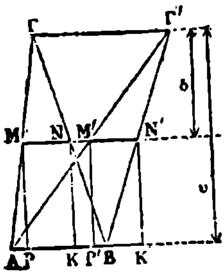
Ἰδοὺ ἡ ἰδιότης τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦμεν συχνότερα:

Θεώρημα

187. **Ἐὰν ἡ κορυφὴ ἑνὸς τριγώνου κινεῖται ἐπὶ μιᾶς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, τὸ τμῆμα τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἐπὶ μιᾶς παραλλήλου πρὸς αὐτὴν τὴν βάσιν, ἔχει σταθερὸν μέγεθος, οἱασδήποτε οὔσης τῆς θέσεως τῆς κινητῆς κορυφῆς.**

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ μετεκινήθη εἰς τὸ Γ΄. Πρέπει νὰ εἶναι:

$$MN = M'N'.$$



Σχ. 120.

Ἔχομεν: $\frac{MN}{AB} = \frac{\delta}{\upsilon}$,

ἀλλὰ $\frac{\delta}{\upsilon} = \frac{M'N'}{AB}$,

ἄρα $M'N' = MN$.

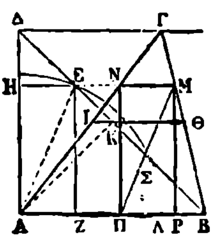
188. Παρατήρησις. Τὰ ἀντίστοιχα ὀρθογώνια ΜΝΡΚ καὶ Μ΄Ν΄Ρ΄Κ΄ εἶναι ἴσα.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὁποῖα σχηματίζομεν, φέροντες ἐκ τῶν Ν καὶ Ν΄ εὐθείας, ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΓ΄, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἰδοὺ μία ἐφαρμογή:

Πρόβλημα

189. Εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν, εἰς τρόπον ὥστε, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὁποῖον ἐγγράφεται ἀντιστοίχως, νὰ ἔχῃ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο παρακειμένων πλευρῶν δοθὲν τετράγωνον ρ^2.



Σχ. 121.

Μεταφέρομεν τὴν κορυφὴν Γ εἰς τὸ Δ, εἰς τρόπον ὥστε νὰ σχηματισθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ.

Πρέπει νὰ εἶναι: $EZ^2 + EH^2 = \rho^2$

ἄρα $AE = \rho$.

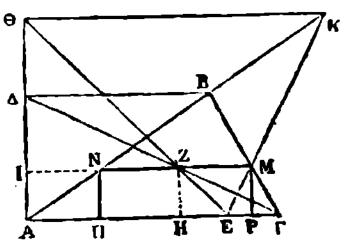
Οὕτω μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α καὶ μὲ ἀκτῖνα ρ, γράφωμεν μίαν περιφέρειαν. Ἡ καμπύλη αὕτη συναντᾷ τὴν ΒΔ εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Σ.

Διὰ τοῦ σημείου Ε, φέρομεν παράλληλον ΕΝΜ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, κατόπιν ὑψοῦμεν τὰς καθέτους ΜΡ καὶ ΝΠ:

$$MN = HE$$

ἄρα $MN^2 + MP^2 = \rho^2$.

Παρατήρησις. Τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν πόδα Κ τῆς καθέτου ΑΚ.



Σχ. 122.

Πρόβλημα

190. Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος 2λ.

Ὑποθέτομεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω ΜΝΠΡ ὀρθογώνιον τοιοῦτον ὥστε $MN + MP = \lambda$, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πρόβλημα μεταπίπτει εἰς τὸ νὰ ἐγγραφῇ τὸ

ὀρθογώνιον ΑΗΖΙ· εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΑΔ, τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον.

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ λάβωμεν: ΑΕ=ΑΘ=λ, καὶ νὰ φέρωμεν τὴν ΘΕ (ἀριθ. 99 α).

Ἔχωμεν: $ZH + Zi = \lambda$,

Ἄρα $MP + MN = \lambda$.

191. Παρατήρησεις. 1) Δυνάμεθα νὰ ἀποφύγωμεν τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου ΓΑΔ, διότι ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν μίαν παράλληλον ΘΚ ἕως ὅτου συναντήσει τὴν ΑΒ, καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Κ μετὰ τοῦ Ε.

Ἔχομεν, πράγματι: $\frac{MP}{A\Theta} = \frac{ME}{KE}$, ἐξ οὗ $MP = \lambda.\frac{ME}{KE}$,

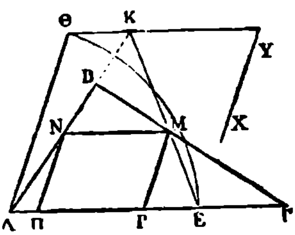
$\frac{MN}{AE} = \frac{KM}{KE}$, ἐξ οὗ $MN = \lambda.\frac{KM}{KE}$.

ἄρα $MP + MN = \lambda.\frac{KM + ME}{KE} = \lambda$.

2) Ἡ δευτέρα αὐτὴ κατασκευὴ ἄγει ἀμέσως εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἀκολούθου προβλήματος, τὸ ὁποῖον ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται δυσκολώτερον.

Πρόβλημα

192. **Εἰς τυχὸν τρίγωνον, νὰ ἀχθῇ παράλληλος ΜΝ πρὸς τὴν βάσιν, καὶ διὰ τῶν σημείων Μ καὶ Ν εὐθεῖαι ΜΡ, ΝΠ παράλληλοι πρὸς τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν ΧΨ, εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἐγγεγραμμένον παραλληλόγραμμον νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν περίμετρον 2k.**



Σχ. 123.

Ἡ ἀναπτυχθεῖσα λύσις εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα καὶ ἡ χρῆσις τῶν αὐτῶν γραμμάτων, μᾶς ἐπιτρέπει νὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν ἔκθεσιν τῶν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος κατασκευῶν.

Διὰ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν ΧΨ· λαμβάνομεν:

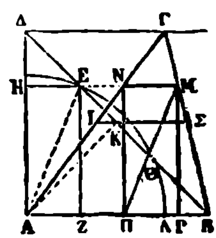
$$A\Theta = AE = k.$$

Προεκτείνομεν τὴν ΑΒ ἕως ὅτου συναντήσει τὴν παράλληλον ΘΚ· ἡ εὐθεῖα ΕΚ ὁρίζει τὴν κορυφὴν Μ τοῦ παραλληλογράμμου.

Θὰ ἔχωμεν: $MN + MP = k$.

Πρόβλημα

193. **Εἰς δοθὲν τρίγωνον, νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος ἔχει δοθὲν μῆκος.**



Σχ. 124.

Ἔχομεν ἤδη πραγματευθῆ τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὑπὸ μίαν διάφορον ἔκφρασιν (ἀρ.189).

Θεωροῦμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΔ

Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὸ δοθὲν μῆκος ΑΛ, γράφομεν τόξον κύκλου τὸ ὁποῖον θὰ τμήσῃ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ.

Ἕκαστον τῶν σημείων τομῆς Ε καὶ Ζ δίδει ἀνὰ μίαν λύσιν

$$ΠΜ = ΑΕ = λ.$$

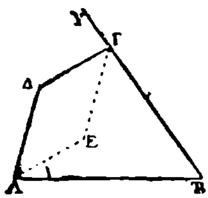
Παρατήρησις. Ἡ κάθετος ΑΚ θὰ ἔδιδε τὸ ὀρθογώνιον μὲ τὴν ἐλαχίστην διαγώνιον: ΙΣ θὰ ἦτο ἡ ἄνω βάσις αὐτοῦ τοῦ ὀρθογωνίου.

194. Μεταφορὰ ἑνὸς σχήματος. *Ἡ παράλληλος μεταφορά*, ἢ ἁπλῶς ἡ μέθοδος τῆς μεταφορᾶς, συνίσταται εἰς τὸ νὰ μεταφέρωμεν ἓν σχῆμα ΑΒΓΔ... ἀπὸ μίαν θέσιν δοθεῖσαν, εἰς μίαν ἄλλην Α′Β′Γ′Δ′..., εἰς τρόπον ὥστε τὰ τμήματα ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ κλπ. νὰ εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα.

Ἡ μέθοδος αὕτη δίδει συχνὰ πολὺ ἁπλᾶς λύσεις· ἰδοὺ μερικὰ παραδείγματα:

Πρόβλημα

194 α. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ γωνίαι καὶ δύο ἀπέναντι πλευραί.



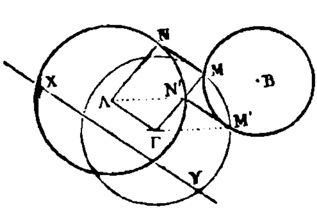
Σχ. 125.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον ΑΒ καὶ ΔΓ αἱ δοθεῖσαι πλευραί, μεταφέρομεν τὴν πλευρὰν ΔΓ εἰς τὴν ΑΕ.

Ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς γωνίας Δ, ἐπομένως ἡ γωνία ΒΑΕ εἶναι γνωστή, διότι ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῆς γωνίας Δ ἀπὸ τῆς γωνίας Α· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν τὴν γωνίαν ΒΑΕ, λαμβάνοντες ἀκολούθως ΑΕ=ΔΓ, μῆκος γνωστόν, καὶ διὰ τοῦ σημείου Ε νὰ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ ἕως ὅτου συναντήσει τὴν ΒΥ· ἡ τομὴ αὕτη ὁρίζει τὴν κορυφὴν Γ.

Πρόβλημα

194 β. Μεταξὺ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν, νὰ ἐγγραφῇ μία εὐθεῖα μήκους λ, καὶ ἡ ὁποία νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς μία δοθεῖσαν ΧΥ.



Σχ. 126

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι· πρέπει νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὸν γεωμετρικὸν τόπον ὁ ὁποῖος προκύπτει διὰ μιᾶς *παραλλήλου μεταφορᾶς* (ἀριθ. 59, παρ. 2α).

Ἐκ τοῦ κέντρου Α φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ ἴσην πρὸς λ καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ΧΥ· κατόπιν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ, γράφομεν μίαν περιφέρειαν ἴσην πρὸς τὴν Α.

Δηλαδή, μεταφέρομεν τὴν περιφέρειαν Α εἰς τὸ Γ, τρόπον ὥστε ἡ ΑΓ νὰ ἰσοῦται πρὸς λ καὶ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΧΥ.

Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, τὰ σημεῖα τομῆς Μ, Μ' δίδουν τὰς λύσεις ταύτας, τὰ σχήματα ΑΝΜΓ καὶ ΑΝ'Μ'Γ εἶναι παραλληλόγραμμα.

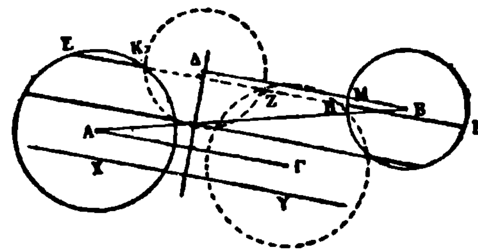
Παρατηρήσεις. Ἡ περιφέρεια Α δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἑνὸς τυχόντος πολυγώνου· ἡ παράλληλος μεταφορὰ δύναται νὰ γίνῃ πάλιν μὲ τὴν χρῆσιν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

Ἡ περιφέρεια Β δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ μιᾶς τελούσης καμπύλης.

Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν, ὑπάρχουν τέσσαρες λύσεις.

Πρόβλημα

194 γ. Δίδονται δύο περιφέρειαι Α καὶ Β, καὶ μία εὐθεῖα ΧΥ· νὰ ἀχθῇ τέμνουσα, παράλληλος πρὸς τὴν ΧΥ, εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν περιεχομένων χορδῶν νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος λ.



Σχ. 127.

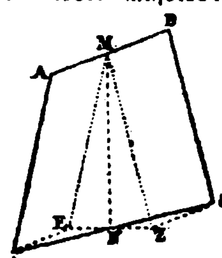
Χρησιμοποιοῦμεν μίαν παράλληλον μεταφοράν, καὶ ὡς εἰς τὸ προηγούμενο πρόβλημα, φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΧΥ καὶ ἴσην πρὸς τὸ δοθὲν μῆκος λ, καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ γράφομεν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν Α. Ἑκάστη παράλληλος πρὸς τὴν ΧΥ ὡς καὶ ἡ ΕΖ ἰσοῦται πρὸς λ.

Διὰ μιᾶς παραλλήλου μεταφορᾶς, φέρομεν τὴν περιφέρειαν Β εἰς τρόπον τὸ κέντρον της νὰ ἔλθῃ εἰς τὸ Δ, ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ.

Τὰ σημεῖα τομῆς δίδουν τὴν λύσιν.

Πράγματι, ΕΖ = ΑΓ = λ, ΚΖ = ΜΝ, ἄρα ΕΚ + ΜΝ = λ.

Βλέπομεν, ἐπὶ τοῦ σχήματος, μίαν δευτέραν λύσιν πλησιεστέραν εἰς τὴν ΧΥ.



Σχ. 128.

Θεώρημα

***194 δ.* Ἐὰν τετράπλευρον ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας, ἡ εὐθεῖα ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας τῆς σχηματιζομένης, ὑπὸ τῶν δύο πρώτων πλευρῶν.**

Ἔστωσαν ΑΔ = ΒΓ καὶ Μ τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

Διὰ μιᾶς μεταφορᾶς, φέρομεν τὴν ΑΔ εἰς ΜΕ καὶ ΒΓ εἰς ΜΖ. Φέρωμεν τὴν ΕΖ καὶ δεικνύομεν ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς ΔΓ.

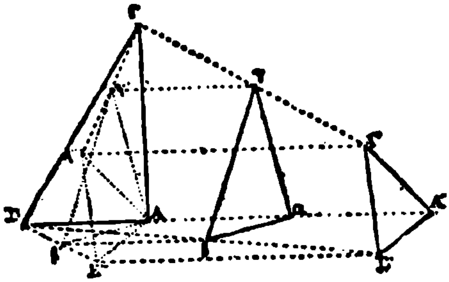
Τὰ ἰσογώνια τρίγωνα ΔΝΕ, ΓΝΖ εἶναι ἴσα, διότι ΔΕ = ΓΖ, ἄρα ΔΝ = ΓΝ· συνεπῶς ἡ ΜΝ εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ

μέσα· ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΜΖ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ ἐφ' ὅσον ΝΕ=ΝΖ, τὸ ὕψος ΜΝ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς Μ, καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον (ΑΔ, ΒΓ).

Θεώρημα

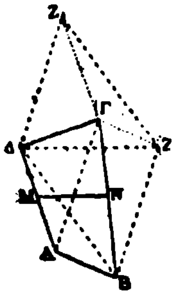
194 ε. Ὅταν δύο τρίγωνα εἶναι κατ' ἀναλογίαν ὅμοια ΑΒΓ, Α'Β'Γ' καὶ διαιρέσωμεν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ τμήματα α, β, γ, τὰς εὐθείας αἵτινες συνδέουν τὰς ὁμολόγους κορυφάς, λαμβάνομεν ἓν τρίγωνον αβγ ὅμοιον πρὸς τὰ δύο πρῶτα.

Μεταφέροντες τὸ Α'Β'Γ' εἰς τὸ ΑΒ''Γ'', κατάλογον διαιροῦν-



Σχ. 129.

τες τὸ ΒΒ'' καὶ ΓΓ'' εἰς τὸν αὐτὸν λόγον μὲ τὸ ΒΒ' καὶ ΓΓ', λαμβάνομεν ἓν τρίγωνον Αβ'γ', ὅμοιον πρὸς τὰ δύο πρῶτα καὶ ἴσον πρὸς αβγ· ἄρα τὸ τελευταῖο τοῦτο εἶναι ὅμοιον πρὸς τὰ δοθέντα.



Σχ 130.

195. Σημείωσις. Ἡ *μέθοδος τῆς παραλλήλου μεταφορᾶς*, ἡ ἤδη ἀναφερθεῖσα (ἀριθ. 59 α) ὑπεδείχθη ὑπὸ τοῦ M. PÉTERSEN, καὶ συχνὰ ἐφηρμόσθη ὑπὸ τοῦ Δανοῦ αὐτοῦ σοφοῦ. (Βλέπε: *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*, σελ. 50 - 60.

Ἡ *μέθοδος τῆς μεταφορᾶς* ἀναφέρεται ὑπὸ τοῦ M. IVAN ALEXANDROFF, εἰς τὰ ὑπ' αὐτοῦ, *Problèmes de Géométrie élémentaire, groupés d'après les méthobes à employer pour leur résolution* (σελ. 94 καὶ 98). Ὁ συγγραφεὺς αὐτὸς δεικνύει τὸν τρόπον πρὸς λύσιν

---

15. Σημ. μετ. Λέγομεν ὅτι δύο ὅμοια σχήματα, κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι κατ' ἀναλογίαν ὅμοια, ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ κινηθῇ τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο, παραμένον πάντοτε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του, οὕτως ὥστε αἱ πλευραί του νὰ γίνουν παράλληλοι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς τοῦ ἄλλου. Ἐὰν τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν, τὰ ὅμοια σχήματα καλοῦνται κατ' ἀντιστροφὴν ὅμοια. Ὑπάρχουν σχήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι καὶ κατ' ἀναλογίαν καὶ κατ' ἀντιστροφὴν ὅμοια π. χ. δύο κύκλοι τοῦ ἐπιπέδου

ἑνὸς μεγάλου ἀριθμοῦ προβλημάτων ἐπὶ τοῦ τυχόντος τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Ἐκ τῆς κορυφῆς Γ (σχ. 130), λαμβάνομεν ΓΕ ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς ΑΔ, ἐπίσης ΓΖ πρὸς ΑΒ.

1) Τὸ σχῆμα ΒΔΕΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἰσοῦνται πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου.

2) Αἱ τέσσαρες γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ἔχουν μεταφερθῆ εἰς τὸ Γ.

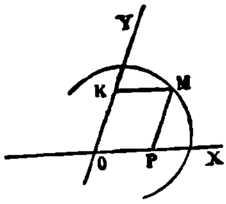
3) Ἡ διαγώνιος ΔΖ εἶναι διπλασία τῆς εὐθείας ΜΝ, ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν ΑΔ, ΒΓ.

§ II. *Ἀναγωγὴ τῶν τεταγμένων*

196. Ὁρισμός. Ὀνομάζονται τεταγμέναι ἑνὸς σχήματος αἱ κάθετοι αἵτινες ἄγονται ἐκ διαφόρων σημείων τῆς περιμέτρου του ἐπὶ μιᾶς σταθερᾶς εὐθείας λαμβανομένης ὡς ἄξονος.

Ἡ τετμημένη ἑνὸς σημείου εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ποδὸς τῆς τεταγμένης του, ἀπὸ ἑνὸς σημείου σταθεροῦ, καλουμένου ἀρχή, καὶ λαμβανομένου ἐπὶ τοῦ ἐκλεγέντος ἄξονος.

Λαμβάνομεν γενικώτερον ὡς ἄξονας δύο εὐθείας τεμνομένας ΟΧ, ΟΨ, σχηματιζούσας τυχοῦσαν γωνίαν. Ἐξ ἑκάστου σημείου τῆς περιμέτρου τοῦ πρὸς μελέτην σχήματος, φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας. Αἱ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα ΟΨ εἶναι αἱ τεταγμέναι, καὶ αἱ παράλληλοι πρὸς τὸν ΟΧ εἶναι αἱ τετμημέναι. Οὕτω ΡΜ εἶναι ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου Μ, καὶ ΚΜ, ἢ ἡ ἴση της ΟΡ, ἡ τετμημένη.



Σχ. 131.

197. Παρατήρησις. Οἱ τρόποι μετασχηματισμοῦ, οἵτινες πρόκειται νὰ ὑποδειχθοῦν εἶναι γνωστοὶ ὑπὸ τὸ ὄνομα ἀναγωγὴ τῶν τεταγμένων ἢ κατάκλισις τῶν τεταγμένων· ἀλλὰ ὁ μετασχηματισμὸς δύναται νὰ γίνῃ ἐπὶ τῶν τετμημένων τόσον καλά, ὅσον καὶ ἐπὶ τῶν τεταγμένων.

Δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν ἢ νὰ ἐλαττώσωμεν τὰς συντεταγμένας, δηλαδὴ δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἑκάστην τεταγμένην ἢ ἑκάστην τετμημένην ἐπὶ ἕναν *σταθερὸν ἀριθμόν*, ἀκέραιον, κλασματικὴν παράστασιν ἢ κλάσμα.

Πρόβλημα

198. Νὰ μελετηθοῦν αἱ μεταβολαί, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀπὸ τὴν ἀναγωγὴν τῶν τεταγμένων ἑνὸς σχήματος.

Πρέπει νὰ διακρίνωμεν τὰς μεταβολὰς αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὴν γεωμετρίαν τῆς θέσεως ἀπὸ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὰ ἐμβαδὰ ἢ εἰς τοὺς ὄγκους.

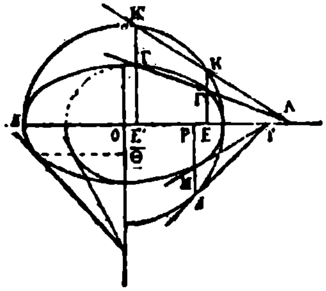
1) Διὰ τὰς αὐτὰς τετμημένας ΟΕ, ΟΕ', ΟΡ.

Αἱ ἀντίστοιχοι τέμνουσαι ΓΓ', ΚΚ' τέμνουν τὸν ἄξονα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Λ.

Αἱ ἐφαπτόμεναι ΜΤ, ΝΤ, τέμνουν ἐπίσης τὸν ἄξονα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Τ

2) Τὰ ἐμβαδὰ ἐλαττοῦνται ἢ αὐξάνονται ἀναλόγως τῶν ἀντιστοίχων τεταγμένων.

3) Οἱ ὄγκοι ἐλαττοῦνται ἢ αὐξάνουσιν ἀναλόγως τῶν ἀντιστοίχων γραμμῶν.



Σχ. 132.

Πρόβλημα

199. Νὰ μελετηθοῦν αἱ μεταβολαὶ αἱ ὁποῖαι προκύπτουν, ἀπὸ τὴν κατάκλισιν τῶν τεταγμένων.

1) Αἱ ἀντίστοιχοι τέμνουσαι συναντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τῆς κοινῆς διαμέτρου, τοῦ δοθέντος σχήματος καὶ τοῦ μετασχηματισμένου. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ἀντιστοίχους ἐφαπτομένας.

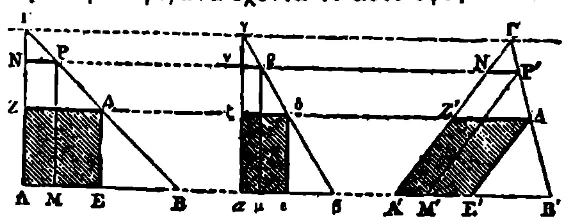
2) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὰς κατακλιθείσας τεταγμένας ἑνὸς δοθέντος σχήματος, εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος τούτου, ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας κλίσεως.

3) Τὸ αὐτὸ συμβαίνει διὰ τοὺς ὄγκους.

Θεώρημα

200. Ὅταν μεταβάλλωμεν τὰς τεταγμένας ἢ τὰς τετμημένας ἑνὸς δοθέντος σχήματος, τὰ ἐγγεγραμμένα ἀντίστοιχα σχήματα ἔχουν μεταξύ των τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν καὶ τὰ ἀντίστοιχα περιγεγραμμένα σχήματα.

Θεωροῦμεν τρία τρίγωνα ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τῶν ὁποίων



Σχ. 133.

αἱ βάσεις εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Τέμνομεν τὰ τρίγωνα αὐτὰ ὑπὸ μιᾶς εὐθείας ΝΡ' παράλληλου πρὸς τὴν βάσιν καὶ φέρομεν ΡΜ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ· Ρ'Μ' παράλληλον πρὸς τὴν Α'Γ', κλπ. (σχ. 133).

Ἔχομεν προφανῶς:

$$\frac{\Gamma N P}{\Gamma A B} = \frac{\gamma\nu\rho}{\gamma\alpha\beta} = \frac{\Gamma' N' P'}{\Gamma' A' B'}.$$

$$\frac{P M B}{\Gamma A B} = \frac{\rho\mu\beta}{\gamma\alpha\beta} = \frac{P' M' B'}{\Gamma' A' B'}$$

ἄρα

$$\frac{A N P M}{A \Gamma B} = \frac{\alpha\nu\rho\mu}{\alpha\gamma\beta} = \frac{A' N' P' M'}{A' \Gamma' B'}$$

Θεώρημα

201. Τὰ μέγιστα ἐγγεγραμμένα σχήματα εἶναι ἀντίστοιχα.

Τὸ θεώρημα τοῦτο, εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἀλλὰ ἡ μεγάλη χρησιμότης τοῦ πορίσματος τούτου, μᾶς ὁδήγησεν εἰς τὸ νὰ τὸ παρουσιάσωμεν ἀπ' εὐθείας.

Εἰς ἓν ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, δεικνύομεν ἁπλούστατα ὅτι τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον ΑΖΔΕ (σχ. 133) ἔχει τὴν κορυφήν του εἰς τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης, διότι τὸ ἄθροισμα ΔΕ+ΔΖ εἶναι σταθερὸν καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ΓΑ καὶ διὰ τὸ σημεῖον Δ μέσον τῆς ΓΒ οἱ προσθεταῖοι εἶναι ἴσοι. Τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ περιγεγραμμένου τριγώνου.

Ἔχομεν λοιπόν: $\frac{\text{ΑΖΔΕ}}{\text{ΑΒΓ}} = \frac{1}{2}$

Καὶ ὁ λόγος αὐτὸς τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου πρὸς τὸ περιγεγραμμένον ὀρθογώνιον εἶναι ὁ μέγιστος. Ἀλλὰ ἔχομεν ἐπίσης·

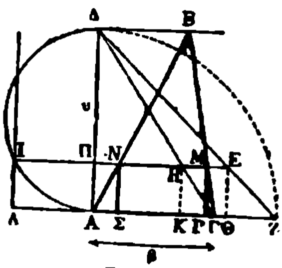
$$\frac{\alpha\zeta\delta\varepsilon}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\text{Α'Ζ'Δ'Ε'}}{\text{Α'Β'Γ'}} = \frac{1}{2}$$

ἄρα, *διὰ τυχὸν τρίγωνον, τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον παραλληλόγραμμον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται φέροντες διὰ τοῦ μέσου τῆς δοθείσης πλευράς, παραλλήλους πρὸς τὰς δύο ἄλλας.*

Πρόβλημα

***202.* Εἰς τυχὸν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον.**

Δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ δι' ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους.



Σχ. 134.

Ἔστω ΑΠΗΚ = ΝΜΡΣ = k^2.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΔΓ ἦτο ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον, τὸ πρόβλημα θὰ ἦτο λελυμένον (ἀριθ. 99).

Λαμβάνοντες: ΑΖ = ΑΔ = υ

ἔχομεν: $\frac{\text{ΑΠΕΘ}}{\text{ΑΠΗΚ}} = \frac{\text{ΠΕ}}{\text{ΠΗ}}$

Ἀλλὰ $\frac{\text{ΠΕ}}{\text{ΠΗ}} = \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\upsilon}{\beta}$

ἐξ οὗ $\frac{\text{ΑΠΕΘ}}{k^2} = \frac{\upsilon}{\beta}$· ἄρα ΑΠΕΘ $= k^2 . \frac{\upsilon}{\beta}$.

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν τετράγωνον, λ^2, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πρὸς τὸ k^2 λόγον $\frac{\upsilon}{\beta}$, κατόπιν νὰ μεταφέρωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν πλευρὰν λ ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ Λ, νὰ φέρωμεν παράλληλον ΛΙ πρὸς

τὴν ΑΔ καὶ νὰ ὑψώσωμεν κάθετον ΙΠΝΜ· ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\text{ΑΠ}.\text{ΠΕ} = \text{ΑΠ}.\text{ΠΔ} = \lambda^2 = k^2.\frac{\upsilon}{\beta}.$$

Ἀλλὰ

$$\frac{\text{ΑΠΗΚ}}{\text{ΑΠΕΘ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΖ}} = \frac{\beta}{\upsilon}$$

ἢ

$$\text{ΑΠΗΚ} = \text{ΑΠΕΘ}.\frac{\beta}{\upsilon}$$

ἀντικαθιστῶντες τὸ ΑΠΕΘ ἢ τὸ ΑΠ.ΠΔ διὰ τῆς τιμῆς τοῦ $k^2.\frac{\upsilon}{\beta}$ θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ΑΠΗΚ} = k^2.\frac{\upsilon}{\beta}.\frac{\beta}{\upsilon} = k^2$$

203. *Ἐγγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον.* Ὅταν ἐξ ἑνὸς τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ἑνὸς τετραέδρου Σ, ΑΒΓ, φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς παραπλεύρους ἕδρας, σχηματίζομεν ἕνα παραλληλεπίπεδον τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς ἕδραι εἶναι ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τῆς γωνίας Σ καὶ τοῦ ὁποίου μία κορυφὴ εἶναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ.

Θεώρημα

204. Οἱανδήποτε μεταβολὴν καὶ ἂν ἐφαρμόσωμεν εἰς μίαν ἢ καὶ περισσοτέρας ἀκμὰς τῆς γωνίας Σ τοῦ τετραέδρου, τὸ ἐγγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον καὶ τὸ ἀρχικὸν τετράεδρον ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, ὡς τὸ νέον παραλληλεπίπεδον καὶ τὸ μετασχηματισθὲν τετράεδρον.

Περιοριζόμεθα εἰς τὸ να ἀποδείξωμεν τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν. Ὑποθέτομεν ὅτι εἰς τὸ τετράεδρον Σ,ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον Ρ εἶναι ἡ κορυφὴ τοῦ ἐγγεγραμμένου παραλληλεπιπέδου, ἐλαττοῦμεν τὴν ἀκμὴν ΣΑ εἰς τὸ ἥμισυ, παραδείγματος χάριν, ἡ ἀπόστασις τοῦ Ρ′ ἀπὸ τῆς ἕδρας Β′Σ′Γ′, θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τοῦ Ρ ἀπὸ τῆς ἕδρας ΒΣΓ, ἐνῷ αἱ δύο ἄλλαι διαστάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου δὲν ὑφίστανται οὐδεμίαν μεταβολήν· ἄρα, παριστῶντες τὰ ἐγγεγραμμένα στερεὰ διὰ τῆς Ρ καὶ Ρ′ θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\text{Ρ}}{\text{Σ,ΑΒΓ}} = \frac{\text{Ρ}'}{\text{Σ}',\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}'}.$$

205. *Πόρισμα.* Εἰς τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον εἰς τὸ τετράεδρον Σ θὰ ἀντιστοιχῇ τὸ μέγιστον παραλληλεπίπεδον τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τετράεδρον Σ′.

Οὕτω, μετὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ὅτι εἰς τρίεδρον τρισορθογώνιον μὲ τρεῖς ἴσας ἀκμάς, τὸ μέγιστον ἐπιτυγχάνεται ὅταν τὸ Ρ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, καὶ τότε τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ τετραέδρου, θὰ συμπεράνομεν ὅτι διὰ τυχὸν τετράεδρον ἡ κορυφὴ Ρ′ τοῦ μεγίστου ἐγγεγραμμένου παραλληλεπίδου πρέπει νὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν διαμέσων τοῦ Α′Β′Γ′, καὶ τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον στερεὸν εἶναι τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ θεωρουμένου τετραέδρου.

§ III. Ὁμοιότης καὶ ὁμοιοθεσία

206. *Ὁμοιότης.* Ἡ σπουδὴ τῶν *ὁμοίων σχημάτων* βασίζεται κυρίως ἐπὶ τοῦ *θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ*, τοῦ σχετικοῦ πρὸς τὰ ὅμοια σχήματα.

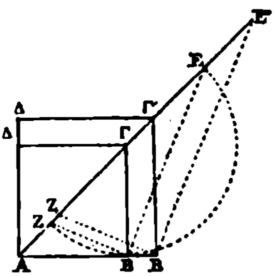
Διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ὁμοιότητος ἢ ὁμοιοθεσίας, κατασκευάζομεν συνήθως ἕνα σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ ζητούμενον καὶ συγκρίνομεν ἓν μῆκος ἐπ' αὐτοῦ πρὸς τὸ δοθὲν ὁμόλογόν του. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ἐργαζόμεθα κυρίως ὅταν τὸ προταθὲν πρόβλημα, ἢ τὸ ἁπλούστερον αὐτοῦ εἰς ὃ ἀναγόμεθα, ὁρίζεται διά τινος δοθέντος μήκους.

Σημείωσις. Ὁ ὅρος *ὁμοιοθεσία* ὀφείλεται εἰς τὸν Chasles, ἀλλ' ἡ σπουδὴ τὸν ὁμοιοθέτων σχημάτων εἰς τὸν Poncelet.

Πρόβλημα

207. **Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῆς διαγωνίου καὶ πλευρᾶς.**

Πάντα τὰ τετράγωνα εἶναι ὅμοια σχήματα καὶ ὁ λόγος δύο ὁμολόγων μηκῶν, εἰς δύο τυχόντα ἐξ αὐτῶν, ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν πλευρῶν των. Κατὰ συνέπειαν, ὁ λόγος τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῆς διαγωνίου καὶ πλευρᾶς εἰς ἓν τυχὸν τετράγωνον πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ, θὰ εἶναι ὁ ἴδιος καὶ εἰς ἓν οἱονδήποτε ἄλλο τετράγωνον.



Σχ. 135.

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἑπομένην κατασκευήν.

Κατασκευάζομεν τυχὸν τετράγωνον ΑΒΓΔ, προεκτείνομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν ΖΒΕ, μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν ΓΒ.

Μεταφέρομεν ἀκολούθως τὸ δοθὲν ἄθροισμα ἢ διαφορὰν ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΕ′ (ἢ ΑΖ′) καὶ φέρομεν τὴν Ε′Β′ (ἢ Ζ′Β′) παράλληλον πρὸς τὴν ΕΒ (ἢ ΖΒ). Οὕτω ὁρίζεται ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου ΑΒ′.

208. *Παρατήρησις.* 1) Ἡ χρῆσις τῶν ὁμοίων σχημάτων παρέχει λύσεις εὐκόλως ἀνευρισκομένας ἀλλ' ὄχι καὶ τόσον κομψάς. Ἐνδείκνυται ἰδιαιτέρως διὰ τὴν ἐγγραφὴν εἰς δοθὲν σχῆμα ἄλλου ὁμοίου πρὸς δοθέν.

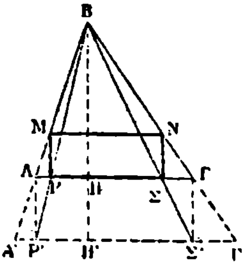
2) Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις, θὰ πρέπει νὰ γίνεται συνδυασμὸς βοηθητικῶν κατασκευῶν μετ' ἐκείνων τῶν ὁμοίων σχημάτων.

Πρόβλημα

209. **Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον ὅμοιον ἄλλου δοθέντος.**

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐλύθη ἤδη (§ 99, γ)· ἡ ὁμοιότης, ἐν τούτοις, εἶναι ἡ φυσικὴ μέθοδος λύσεως, ἀφοῦ ζητοῦμεν σχῆμα δοθείσης μορφῆς.

Κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς ΑΓ ὀρθογώνιον ΑΓ Σ'Ρ' ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ φέρομεν τὰς ΒΡ', ΒΣ'· εἰς τὰ Ρ, Π ὑψοῦμεν καθέτους ΡΜ, ΠΝ. Θὰ ἔχωμεν



Σχ. 136

$$\frac{ΜΝ}{ΑΓ}=\frac{ΜΡ}{ΑΡ'} \text{ ἢ } \frac{ΜΝ}{ΜΡ}=\frac{ΑΓ}{ΑΡ'}.$$

210. *Παρατήρησις.* 1) Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς ἓν ὀρθογώνιον καὶ νὰ ἔχωμεν συνεπῶς τρεῖς λύσεις.

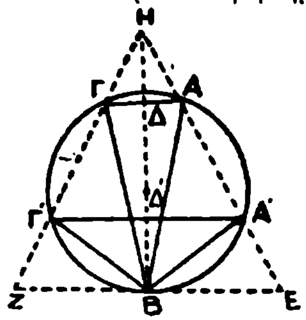
2) Ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν καὶ δεύτερον ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ νὰ ἔχωμεν οὕτω δευτέραν λύσιν, σχετικῶς πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτήν, θὰ ὑπάρχουν ἓξ λύσεις τοῦ προβλήματος.

3) Διὰ τὴν ἐγγραφὴν τετραγώνου, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ΑΡ'=ΑΓ καὶ αἱ λύσεις περιορίζονται εἰς τρεῖς.

Πρόβλημα

211. **Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν νὰ ἐγγραφῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδεται τὸ ἄθροισμα λ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους.**

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΑΒΓ τρίγωνον τοιοῦτον, ὥστε



Σχ. 137

$$ΑΓ+ΒΔ=λ.$$

Λαμβάνομεν τμῆμα ΔΗ = ΑΓ, ὁπότε

$$ΒΗ=λ.$$

Διὰ πᾶν ὅμοιον τρίγωνον τὸ ΗΑΓ πρὸς τὸ ὕψος θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν βάσιν. Ἐπομένως καὶ διὰ τὸ τρίγωνον ΕΗΖ, μὲ βάσιν ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Β, θὰ ἔχωμεν

$$ΖΕ=ΒΗ \text{ ἢ } ΒΕ=\frac{λ}{2}.$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν:

Ἐπὶ μιᾶς ἐφαπτομένης τῆς δοθείσης περιφερείας λαμβάνομεν τμῆμα $ΒΕ=\frac{λ}{2}$, ἐπὶ τῆς καθέτου πρὸς αὐτὴν ΒΗ = λ καὶ φέρομεν τὴν ΛΕ.

Τὸ σημεῖον Α ὁρίζεται οὕτω· ἐπειδὴ

$$ΑΔ=\frac{1}{2}ΔΗ, \text{ ἄρα } ΑΓ=ΒΗ \text{ καὶ } ΑΓ+ΒΔ=λ.$$

Ὑπάρχει καὶ δευτέρα, ἐν γένει, λύσις Α'ΒΓ'.

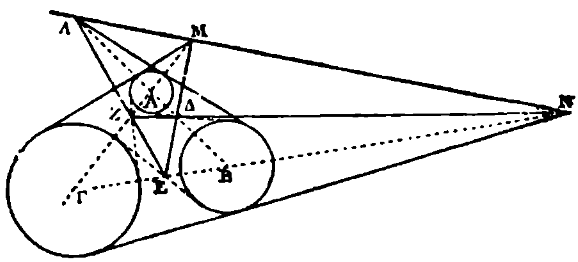
Παρατηρήσεις. 1) Τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἀναπτυχθῇ καὶ διερευνηθῇ ἀργότερον (§ 1503).

2) Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν ἐγγραφὴν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, μὲ γνωστὸν ἄθροισμα $\beta + \upsilon$, εἰς ἓν οἱονδήποτε κανονικὸν πολύγωνον, ἢ καὶ ἁπλῶς εἰς σχῆμα ἔχον ἄξονα συμμετρίας, ἀλλ' ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅπως ἡ κορυφὴ τοῦ τριγώνου εἶναι ἓν ἐκ τῶν κοινῶν σημείων τοῦ ἄξονος τούτου καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ σχήματος.

Θεώρημα τοῦ d'Alembert

212. **Τρεῖς περιφέρειαι, ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι, ὁρίζουν ἓξ κέντρα ὁμοιοθεσίας· τὰ τρία ἐξωτερικὰ κέντρα εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας καθὼς καὶ δύο ἐσωτερικὰ καὶ ἓν ἐξωτερικόν.**

Ἔστωσαν Λ, Μ, Ν τὰ ἐξωτερικὰ κέντρα καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ ἐσωτερικά. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ τρία πρῶτα εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.



Σχ. 138.

Πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη δι' ἑνὸς κέντρου ὁμοιοθεσίας δυο σχημάτων εἶναι ἄξων ὁμοιοθεσίας διὰ τὰ σχήματα ταῦτα, ἀποτελεῖται δηλ. ἐξ ἑνὸς ζεύγους ὁμολόγων γραμμῶν αἱ ὁποῖαι συνέπεσαν· ἀντιστρόφως, πᾶς ἄξων ὁμοιοθεσίας δύο σχημάτων διέρχεται διὰ τοῦ ἀντιστοίχου κέντρου ὁμοιότητος.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΛΜ, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Λ εἶναι ἄξων ὁμοιοθεσίας τῶν περιφερειῶν (Α) καὶ (Β) καὶ ὡς διερχομένη διὰ τοῦ Μ εἶναι ἄξων ὁμοιοθεσίας διὰ τὰς περιφερείας (Α) καὶ (Γ). Εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα αὐτη ἄξων ὁμοιοθεσίας διὰ τὰς περιφερείας (Β) καὶ (Γ) καὶ ὡς τοιαύτη διέρχεται κατ' ἀνάγκην διὰ τοῦ κέντρου ὁμοιοθεσίας Ν τῶν δύο τελευταίων περιφερειῶν ([16]).

§ IV. Μέθοδος τοῦ ἀντιθέτου προβλήματος

213. *Ἀντίθετον πρόβλημα.* Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην, ἐπιλαμβανόμεθα κατὰ πρῶτον τῆς λύσεως τοῦ ἀντιθέτου πρὸς τὸ προταθὲν προβλήματος καὶ κατασκευάζοντες σχῆμα ἴσον ἢ ὅμοιον ἐκείνου

---

16. Σημ. μετ. Οἱ ἄξονες νοοῦνται θετικῆς ὁμοιοθεσίας. Ἀνάλογος ἀπόδειξις θὰ ἠδύνατο νὰ γίνῃ καὶ διὰ τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως.

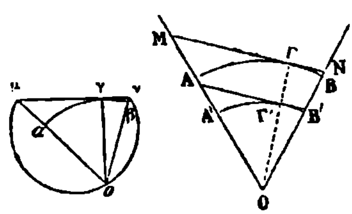
εἰς τὸ ὁποῖον ἀγόμεθα, ἐπανερχόμεθα ἀκολούθως εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα.

Ἡ μέθοδος αὐτὴ χρησιμοποιεῖται εἰς τὰ περισσότερα τῶν προβλημάτων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν ἐγγραφὴν σχημάτων. Διὰ τὴν ἐγγραφήν, ἐπὶ παραδείγματι, ἑνὸς σχήματος Α εἰς δοθὲν ἄλλο Β, περιγράφομεν εἰς τὸ σχῆμα Α σχῆμα ἴσον ἢ ὅμοιον πρὸς τὸ Β καὶ ἐπιδιώκομεν ἀκολούθως νὰ ἀνεύρωμεν σχέσεις θέσεως τοιαύτας, ὥστε νὰ δυνηθῶμεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν κατασκευὴν κατ' ἀντίθετον τάξιν.

Σημείωσις. Ἡ μέθοδος τοῦ *ἀντιθέτου προβλήματος* ὠνομάσθη πολλάκις μέθοδος *δι' ἀντιστροφῆς*· εἶναι, ἐν τούτοις, προτιμώτερον νὰ ἐπιφυλάξωμεν τὴν ὀνομασίαν αὐτὴν διὰ μίαν ἄλλην, πολὺ ἐνδιαφέρουσαν, μέθοδον τὴν ὁποίαν θὰ γνωρίσωμεν ἀργότερον (§ 217).

Πρόβλημα

214. Εἰς δοθὲν τόξον ΑΒ νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη ΜΓΝ, περατουμένη εἰς τὰς ἄκρας ἀκτῖνας ΟΑΜ, ΟΒΝ καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ τμῆμα ΓΜ αὐτῆς νὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ΓΝ.



Σχ. 139.

Κατασκευάζομεν πρῶτον σχῆμα ομν ὅμοιον πρὸς τὸ ζητούμενον.

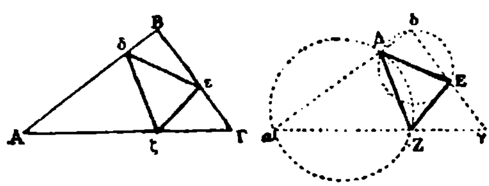
Πρὸς τοῦτο, λαμβάνομεν τμῆμα $μγ=3$ γν καὶ ἐπὶ τοῦ μν γράφομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ΑΟΒ. Εἰς τὸ σημεῖον γ ὑψοῦμεν κάθετον γο καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον ο καὶ ἀκτῖνα ογ γράφομεν τὸ τόξον αγβ.

Διὰ τὴν ἐπάνοδον εἰς τὸ δοθὲν σχῆμα, μεταφέρομεν τὸ τόξον αγβ εἰς τὴν θέσιν Α'Γ'Β', φέρομεν τὴν ΟΓ' Γ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Γ τὴν κάθετον ΜΓΝ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΓ.

Ἕνεκα τῶν ὁμοίων σχημάτων, θὰ ἔχωμεν : $ΜΓ=3ΓΝ$.

Πρόβλημα

215. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἄλλο ἴσον πρὸς δοθὲν **ΔΕΖ**



Σχ. 140.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ περιγράφομεν τρίγωνον ἴσον πρὸς **τὸ** ΑΒΓ· πρὸς τοῦτο, ἐπὶ τῆς ΔΕ γράφομεν τόξον δεχόμενον **γωνίαν** ἴσην πρὸς τὴν Β, ἐπὶ τῆς ΔΖ ἄλλο δεχόμενον γωνίαν ἴσην **πρὸς**

τὴν Α καὶ διὰ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τέμνουσαν αβ ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ (§ 139).

Τὰ τρίγωνα αβγ, ΑΒΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας. Ἐπομένως, τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ σχῆμα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ζητούμενον καὶ ἂν λάβωμεν ἐπὶ τοῦ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ τμήματα Αδ=αΔ κλπ., τὸ δεξιὰ τρίγωνον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Παρατήρησις. Εἰς πλείστας περιπτώσεις, περιοριζόμεθα εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἀντιθέτου μόνον προβλήματος· ἐπειδὴ ἐκ ταύτης εὐκόλως μεταβαίνομεν εἰς ἐκείνην τοῦ προταθέντος.

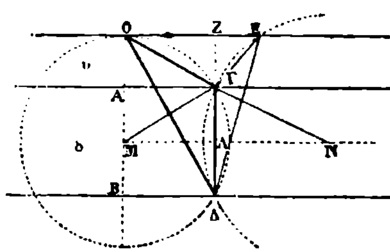
Πρόβλημα

216. Δύο παράλληλοι ΑΓ, ΔΒ εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν δ ἀπ' ἀλλήλων, ἐξ ἑνὸς δὲ σημείου Ο, εἰς ἀπόστασιν υ ἀπὸ τῆς πρώτης, φέρομεν τὴν κοινὴν κάθετον ἐπ' αὐτὰς ΟΑΒ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν γ ἀπ' αὐτῆς, μία ἄλλη κοινὴ κάθετος ΓΔ θὰ φαίνεται ἐκ τοῦ σημείου Ο ὑπὸ τὴν μεγίστην γωνίαν ΓΟΔ ;

Ἂς λύσωμεν τὸ ἀντίθετον πρόβλημα.

Διὰ τοῦ σημείου Ο ἂς φέρωμεν παράλληλον ΟΕ πρὸς τὰς Α ΒΔ καὶ ζητήσωμεν τὸ σημεῖον Ο τῆς εὐθείας αὐτῆς διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ὡρισμένης θέσεως τμῆμα ΓΔ φαίνεται ἐξ αὐτοῦ ὑπὸ τὴν μεγίστην γωνίαν.

Διὰ μίαν τυχοῦσαν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῆς ΓΔ καὶ τέμνουσαν τὴν ἀχθεῖσαν παράλληλον εἰς Ε, εἶναι γων. ΓΕΔ=ΓΝΛ. Γίνεται δὲ ἡ γωνία αὐτὴ μεγίστη ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας καταστῇ ὅσον τὸ δυνατὸν μικροτέρα, δηλ. ὅταν ἡ περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς παραλλήλου.



Σχ. 141.

Ἀρκεῖ, ἐπομένως, διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος νὰ γράψωμεν περιφέρειαν (Μ) ἐφαπτομένην τῆς ἐκ τοῦ σημείου Ο παραλλήλου εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ καὶ ἔχουσαν τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς μέσης παραλήλου ΜΝ. Τὰ σημεῖα τομῆς Γ,Δ, τῆς περιφερείας αὐτῆς καὶ τῶν δύο παραλλήλων καθορίζουν τὸ τμῆμα ΓΔ καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$\text{γων. } \Delta O\Gamma = \Lambda M\Gamma > \Lambda N\Gamma = \Delta E\Gamma,$$

ἀφοῦ $\Gamma M < \Gamma N.$

Παρατήρησις. Δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ὑπολογίσωμεν τριγωνομετρικῶς τὴν μεγίστην γωνίαν ΓΟΔ. Πράγματι, ἡ γωνία Ο = Μ, αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΛΜ ἔχουν μήκη

$$\Gamma\Lambda = \frac{\delta}{2}, \quad \Gamma M = MO = \frac{\delta}{2} + \upsilon$$

καὶ $\Lambda M = \sqrt{\left(\frac{\delta}{2} + \upsilon\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2}\right)^2} = \sqrt{\upsilon(\upsilon + \delta)}$

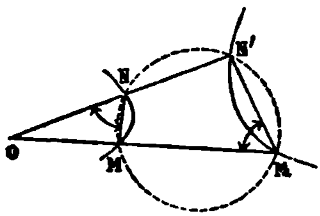
Ἑπομένως:

$$\eta\mu\, O = \eta\mu\, \Gamma M \Lambda = \frac{\Gamma\Lambda}{\Gamma M} = \frac{\delta}{2} : \left(\frac{\delta}{2} + \upsilon\right) = \frac{\delta}{\delta + 2\upsilon}$$

καὶ $$\varepsilon\varphi\, M = \varepsilon\varphi\, O = \frac{\delta}{Z\sqrt{\upsilon(\upsilon + \delta)}}$$

§ V. *Ἀντιστροφή*

217. *Ὁρισμός.* Ὀνομάζονται *ἀντίστροφα* δύο σχήματα, ἐὰν πᾶσα εὐθεῖα ΟΜΜ', ἀγομένη ἐξ ἑνὸς δοθέντος σημείου Ο, τέμνει αὐτὰ εἰς σημεῖα Μ καὶ Μ' τοιαῦτα, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας τμημάτων ΟΜ, ΟΜ' νὰ ἔχῃ σταθερὰν τιμήν.



Σχ. 142.

Τὸ σταθερὸν σημεῖον Ο ὀνομάζεται *πόλος* ἢ *κέντρον* τῆς ἀντιστροφῆς, τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα Μ καὶ Μ' *ἀντίστροφα* (17) σημεῖα καὶ αἱ εὐθεῖαι ΟΜ, ΟΜ' *ἀντίστροφοι ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες* (17). Τὸ σταθερὸν γινόμενον (ΟΜ) (ΟΜ') καλεῖται *δύναμις ἀντιστροφῆς*.

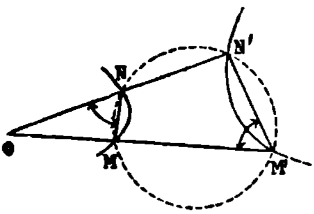
Ἡ δύναμις ἀντιστροφῆς εἶναι *θετικὴ* ὅταν τὰ σημεῖα Μ, Μ' εὑρίσκωνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ πόλου Ο, *ἀρνητικὴ* ἐὰν εὑρίσκωνται ἑκατέρωθεν αὐτοῦ καὶ συμβολίζεται συνήθως διὰ $\pm K^2$.

Τὸν μετασχηματισμὸν ἑνὸς σχήματος ΜΝΡ..... εἰς ἓν ἄλλο Μ'Ν'Ρ'..... τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀντιστροφῆς θὰ τὸν ὀνομάζωμεν *μετασχηματισμὸν δι' ἀντιστροφῆς*.

Σημείωσις Ἡ ὀνομασία: *δύναμις σημείου πρὸς περιφέρειαν*, ἐξ ἧς προέκυψεν καὶ ἡ *δύναμις ἀντιστροφῆς*, εἰσήχθη ὑπὸ τοῦ Steiner.

Θεώρημα

218. Δύο ζεύγη ὁμολόγων σημείων κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας καὶ αἱ ἀντίστοιχοι χορδαὶ ΜΝ, Μ'Ν' εἶναι ἀντιπαράλληλοι εὐθεῖαι.



Σχ. 143.

Ἔστω K^2 ἡ δύναμις ἀντιστροφῆς· ἐπειδὴ

$$OM \cdot OM' = K^2 = ON \cdot ON',$$

ἕπεται ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Μ, Μ', Ν, Ν' κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

17. Σημ. μετ. Ὁμόλογα σημεῖα καὶ ὁμόλογοι ἀκτῖνες ἀντιστροφῆς εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὁρολογίαν· καὶ αὐτοὺς τοὺς ὅρους θὰ χρησιμοποιοῦμεν συνήθως.

Αἱ γωνίαι M' καὶ ONM εἶναι ἴσαι καθὼς καὶ αἱ N' καὶ OMN· ἤτοι, αἱ ἀντίστοιχοι χορδαὶ MN, M'N', εἶναι ἀντιπαράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας OMN', ONN'.

Θεώρημα

219. Τὸ μῆκος τῆς χορδῆς MN εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ γινομένου τῆς δυνάμεως ἀντιστροφῆς ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς ἀντιστοίχου χορδῆς διὰ τοῦ γινομένου τῶν ὁμολόγων ἀκτίνων εἰς τὰ ἄκρα τῆς δευτέρας χορδῆς.

Ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ MN, M'N' εἶναι ἀντιπαράλληλοι (Σχ. 143), τὰ τρίγωνα OMN καὶ OM'N' εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως :

$$\frac{MN}{M'N'}=\frac{ON}{OM'}, \quad MN=M'N'.\frac{ON}{OM'}.$$

Ἀφ' ἑτέρου, $ON.ON'=K^2$, $\quad ON=\frac{K^2}{ON'}$ · ἄρα

$$MN=K^2.\frac{M'N'}{OM'.ON'}.$$

Ἐπίσης:

$$M'N'=K^2\frac{MN}{OM.ON}.$$

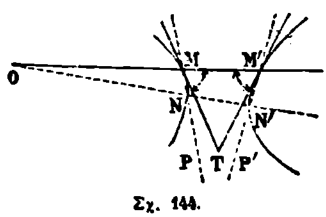
Θεώρημα

220. Αἱ ἐφαπτόμεναι δύο ἀντιστρόφων γραμμῶν εἰς δύο σημεῖα αὐτῶν ὁμόλογα, σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετὰ τῆς δι' αὐτῶν διερχομένης ἀκτῖνος ἀντιστροφῆς.

Πράγματι, ἂν OMM', ONN' εἶναι δύο τυχοῦσαι ἀκτῖνες, τὸ τετράπλευρον MM'N'N εἶναι ἐγγράψιμον, αἱ χορδαὶ MN, M'N' ἀντιπαράλληλοι καὶ

γων. PMM' = P'N'O.

Ἡ σχέσις αὐτὴ θὰ διατηρεῖται ὁσονδήποτε πλησίον καὶ ἂν ἔλθῃ ἡ ἀκτὶς ONN' πρὸς τὴν OMM'. Εἰς τὸ ὅριον, ἑπομένως, Γ, ὁπότε αἱ χορδαὶ MN καὶ M'N' ἀποβαίνουν αἱ ἐφαπτόμεναι TM, TM', θὰ συμβαίνῃ



Σχ. 144.

γων. TMM' = TM'M.

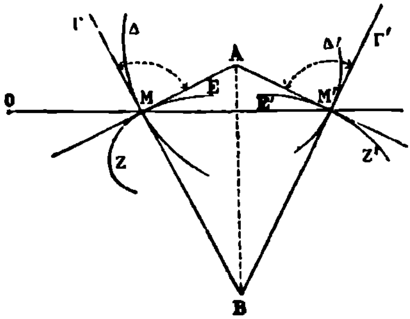
Σχόλιον. Δύο ἐφαπτόμεναι TM, TM', καὶ τὸ τμῆμα MM' τῆς ἀκτῖνος εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς σχηματίζουν ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

Θεώρημα

221. Ἡ γωνία δύο γραμμῶν ἑνὸς σχήματος εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τῶν ὁμολόγων γραμμῶν εἰς τὸ ἀντίστροφον σχῆμα.

Ἡ γωνία δύο καμπύλων εἰς τὸ σημεῖον τομῆς των εἶναι ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων τῶν καμπύλων εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.

Ἔστωσαν ΜΔ, ΜΕ δύο καμπύλαι τοῦ πρώτου σχήματος, Μ'Δ', Μ'Ε' αἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα. Πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ γωνία ΑΜΓ τῶν ἐφαπτομένων τῶν πρώτων εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΜ'Γ' τῶν ἐφαπτομένων τῶν δευτέρων.



Σχ. 145.

Πράγματι,

γων. ΓΜΜ' = ΓΜ'Μ,

ΑΜΜ' = ΑΜ'Μ, (§ 220)

ἄρα

γων. ΑΜΓ = ΑΜ'Γ'.

222. *Παρατηρήσεις*. 1) Τὰ δύο ζεύγη ἐφαπτομένων ὁρίζουν τραπέζιον ἰσοσκελὲς καὶ συμμετρικὸν πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τῶν σημείων τομῆς τῶν ἐφαπτομένων.

2) Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις, τὸ ἀντίστροφον σχῆμα μιᾶς περιφερείας ΜΔ εἶναι εὐθεῖα Μ'Γ' [§ 223]. Τὸ θεώρημα ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ.

Ἡ γωνία ΑΜΓ τῶν ἐφαπτομένων ἰσοῦται πρὸς τὴν γωνίαν τῆς ἐφαπτομένης ΑΜ' μετὰ τῆς εὐθείας Μ'Γ', τῆς ἀντιστρόφου τοῦ τόξου ΜΔ.

3) Δὲν πρέπει νὰ συγκρίνωμεν τὰς γωνίας τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ δύο ζευγῶν ἀντιστοίχων χορδῶν, ἀλλὰ τὰς γωνίας δύο ζευγῶν ἐφαπτομένων εἰς δύο ὁμόλογα σημεῖα. Ἐπειδὴ αἱ πρῶται εὐθεῖαι δὲν εἶναι ἀντίστροφοι ἀλλήλων.

Θεώρημα

223. Τὸ ἀντίστροφον περιφερείας διερχομένης διὰ τοῦ πόλου ἀντιστροφῆς, εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον τὴν διερχομένην διὰ τοῦ πόλου.

224. Ἀντιστρόφως, τὸ ἀντίστροφον εὐθείας εἶναι περιφέρεια διερχομένη διὰ τοῦ πόλου καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς, διὰ τοῦ πόλου, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

225. Τὸ ἀντίστροφον περιφερείας μὴ διερχομένης διὰ τοῦ πόλου, εἶναι περιφέρεια ὁμοιόθετος αὐτῆς πρὸς τὸν πόλον.

Ἰδοὺ μερικαὶ ἐφαρμογαί:

Αον Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου

226. Εἰς πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον, τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ τετράπλευρον, Δ'ΖΒ' τυχοῦσα κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΕΖ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. Θεωρήσωμεν τὴν ἀντιστροφὴν μὲ πόλον τὸ σημεῖον Α καὶ δύναμιν $K^2 = ΑΕ.ΑΖ$ καὶ ἔστωσαν Β', Γ' Δ' τὰ ἀντίστροφα τῶν κορυφῶν Β, Γ, Δ.

Ἐπειδὴ ἡ διὰ τοῦ Ζ ἀχθεῖσα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΕ εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς περιφερείας, τὰ σημεῖα Β', Γ', Δ' κεῖνται ἐπ' αὐτῆς καὶ θὰ ἔχωμεν

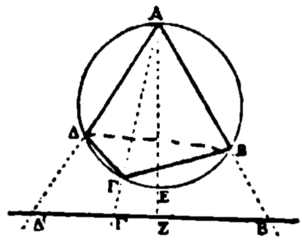
$$Δ'Β' = Δ'Γ' + Γ'Β' \quad (1)$$

Ἀλλ' εἴδομεν ὅτι (§ 210):

$$Δ'Β' = ΔΒ \cdot \frac{K^2}{ΑΔ \cdot ΑΒ},$$

$$Δ'Γ' = ΔΓ \cdot \frac{K^2}{ΑΔ \cdot ΑΓ},$$

$$Γ'Β' = ΓΒ \cdot \frac{K^2}{ΑΓ \cdot ΑΒ},$$



Σχ. 146.

καὶ ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$\frac{ΔΒ \cdot K^2}{ΑΔ \cdot ΑΒ} = \frac{ΔΓ \cdot K^2}{ΑΔ \cdot ΑΓ} + \frac{ΓΒ \cdot K^2}{ΑΓ \cdot ΑΒ}$$

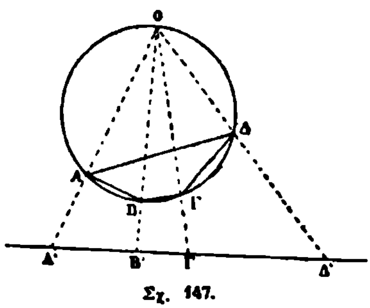
ἤ, ἀπαλείφοντες τοὺς παρονομαστάς,

$$ΔΒ \cdot ΑΓ = ΔΓ \cdot ΑΒ + ΓΒ \cdot ΑΔ, \quad (2)$$

ἥτις εἶναι ἡ σχέσις τῆς ἐκφωνήσεως.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ἰσόπλευρον, ΑΔ = ΔΒ = ΒΑ, ἡ σχέσις (2) γίνεται ΑΓ = ΔΓ + ΓΒ καὶ ἐκφράζει τὸ γνωστὸν θεώρημα: Ἡ ἀπόστασις ἑνὸς σημείου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον ἀπὸ μιᾶς κορυφῆς αὐτοῦ, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο κορυφὰς (§ 680).

226 α. *Ἄλλη ἀπόδειξις*. Ἐκλέγομεν ὡς πόλον τυχὸν σημεῖον Ο τῆς περιφερείας, δύναμιν K² τυχοῦσαν καὶ ἔστωσαν α, β, γ, δ, αἱ



Σχ. 147.

ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ καὶ Α', Β', Γ', Δ' τὰ ἀντίστροφα σημεῖα τῶν τεσσάρων κορυφῶν.

Γνωρίζομεν ὅτι διὰ τέσσαρα διαδοχικὰ τμήματα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἰσχύει ἡ ταυτότης

$$Α'Β' \cdot Γ'Δ' + Α'Δ' \cdot Β'Γ' = Β'Δ' \cdot Α'Γ'. \quad (1)$$

Πράγματι, ἀντικαθιστῶντες ἕκαστον τῶν τμημάτων Α'Δ', Β'Δ' Α'Γ' διὰ τῶν μικροτέρων τμημάτων ἐξ ὧν ἀποτελεῖται, λαμβάνομεν ὡς τιμὴν ἑκάστου μέλους τῆς (1) τὸ ἄθροισμα

$$(A'B'.\Gamma'\Delta'+A'B'.B'\Gamma'+B'\Gamma'.B'\Gamma'+\Gamma'\Delta'.B'\Gamma')$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$A'B'=\frac{AB.K^2}{\alpha\beta},\quad \Gamma'\Delta'=\frac{\Gamma\Delta.K^2}{\gamma\delta}\ \text{κλπ.},$$

ἡ σχέσις (1) γίνεται

$$\frac{AB.\Gamma\Delta}{\alpha\beta\gamma\delta}+\frac{A\Delta.B\Gamma}{\alpha\delta\beta\gamma}=\frac{B\Delta.A\Gamma}{\beta\delta\alpha\gamma},$$

δηλ. ἡ προηγουμένη

$$AB.\Gamma\Delta+A\Delta.B\Gamma=B\Delta.A\Gamma.$$

226 β. *Παρατήρησις.* Ἐὰν ΑΒ.ΓΔ = ΑΔ.ΒΓ, θὰ ἔχωμεν ἐπίσης καὶ

$$A'B'.\Gamma'\Delta'=A'\Delta'.B'\Gamma' \quad \text{ἢ} \quad \frac{B'\Gamma'}{B'A'}=\frac{\Delta'\Gamma'}{\Delta'A'}.$$

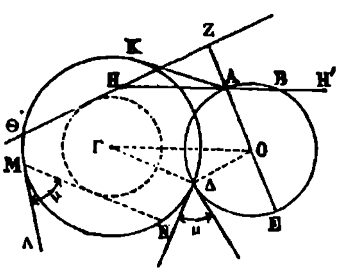
Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ τμῆμα Α'Γ' λέγεται διῃρημένον *ἁρμονικῶς* ὑπὸ τῶν σημείων Β' καὶ Δ', καθὼς καὶ ἀντιστρόφως διὰ τὸ τμῆμα Β'Δ' ὑπὸ τῶν Β' καὶ Γ'. Αἱ εἰς τὸ σημεῖον Ο συντρέχουσαι τέσσαρες εὐθεῖαι σχηματίζουν *ἁρμονικὴν δέσμην [τετράδα]* καὶ πᾶσα εὐθεῖα τέμνουσα μίαν τοιαύτην δέσμην διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν στοιχείων της.

Ἐκ τούτων ἕπεται τὸ ἀκόλουθον

Θεώρημα

227. *Ἐὰν τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν τὰ γινόμενα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ἴσα, ἡ τετρὰς τῶν εὐθειῶν, τῶν συνδεουσῶν τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας μετὰ τεσσάρων κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου, ὁρίζει ἐπὶ πάσης εὐθείας ἁρμονικὴν τετράδα σημείων.*

Παρατήρησις. Τὰ τετράπλευρα ταῦτα ὀνομάζονται *ἁρμονικὰ* καὶ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τὸ γινόμενον τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων. Διὰ τὰς ἰδιότητας αὐτῶν βλέπε § 2454.



Σχ. 148.

Πρόβλημα

228. **Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων Α,Β καὶ τέμνουσα περιφέρειαν (Γ) κατὰ δοθεῖσαν γωνίαν μ.**

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ μ = ΛΜΝ ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὸ σημεῖον τομῆς Δ.

Θεωροῦμεν ἀντιστροφὴν μὲ πόλον τὸ σημεῖον Α καὶ δύναμιν AK^2 = δύναμις τοῦ σημείου Α πρὸς τὴν δοθεῖσαν περιφέ-

ρειαν (Γ), ἵνα διατηρηθῇ ἡ περιφέρεια αὕτη. Κατ' αὐτήν, ἡ ζητουμένη περιφέρεια (Ο) θὰ μετασχηματισθῇ εἰς εὐθεῖαν ΖΘ, τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν (Γ) κατὰ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν μ καὶ διερχομένην διὰ τοῦ ἀντιστρόφου Η τοῦ σημείου Β.

Ἡ εὐθεῖα ΖΘ προσδιορίζεται εὐκόλως, ἐφ' ὅσον θὰ εἶναι μία τῶν ἐφαπτομένων τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ Η πρὸς τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁμόκεντρον τῆς δοθείσης (Γ) καὶ ἐφαπτομένην τῆς χορδῆς ΜΝ. Ἡ δὲ ζητουμένη περιφέρεια (Ο) εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς εὐθείας ΖΘ, μὲ κέντρον ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου πρὸς αὐτὴν καὶ διάμετρον ΑΕ ὁριζομένην ἐκ τῆς σχέσεως

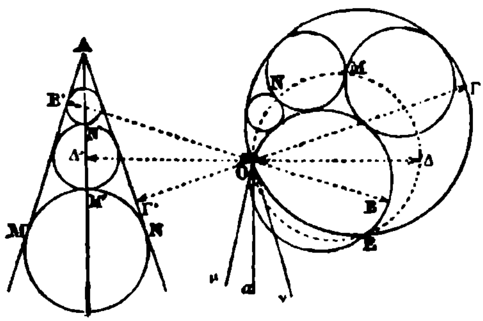
$$ΑΕ \, . \, ΑΖ = ΑΚ^2 .$$

Παρατήρησις. Ὑπάρχουν δύο λύσεις, καὶ μόνον, ἀντίστοιχοι τῶν δύο, ἐν γένει, ἐφαπτομένων ἐκ τοῦ Η πρὸς τὴν θεωρηθεῖσαν ὁμόκεντρον τῆς (Γ) περιφέρειαν.

Τόπος

229. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων ἀνὰ δύο καὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν ;

Θεωρήσωμεν περιφερείας ἐφαπτομένας ἀλλήλων ἀνὰ δύο καθὼς καὶ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας Α καὶ ἀντιστροφὴν μὲ τυ-



Σχ. 149.

χόντα πόλον Ο καὶ δύναμιν τυχοῦσαν $Κ^2$. Κατ' αὐτήν, αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας Α καὶ ἡ διχοτόμος αὐτῆς μετασχηματίζονται εἰς περιφερείας διερχομένας διὰ τοῦ πόλου καὶ τοῦ ἀντιστρόφου Ε τῆς κορυφῆς Α καὶ μὲ διαμέτρους ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ ἀντιστοίχως τοιαύτας, ὥστε

$$ΟΒ \, . \, ΟΒ' = ΟΓ' = ΟΔ \, . \, ΟΔ' = Κ^2,$$

ὅπου Α', Β', Γ', οἱ πόδες τῶν ἐκ τοῦ Ο καθέτων ἐπὶ τὰς τρεῖς εὐθείας. Αἱ δὲ περιφέρειαι αἱ ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων ἀνὰ δύο, μετασχηματίζονται εἰς περιφερείας ἐφαπτομένας ἀλλήλων ἀνὰ δύο καὶ τῶν περιφερειῶν (ΟΒ), (ΟΓ), καὶ ἔχουσῶν τὰ σημεῖα Ν, Μ, κλπ. τῶν πρὸς ἀλλήλας ἐπαφῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας (ΟΔ). Ἐπειδὴ

αὕτη εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ τόπου ΑΜ'Ν'..... τῶν σημείων ἐπαφῆς εἰς τὸ ἀρχικὸν σχῆμα (18).

Οὕτω φθάνομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον θεώρημα:

229α. Ἐὰν ἐγγράψωμεν μεταξὺ δύο περιφερειῶν ἀκολουθίαν περιφερειῶν ἐφαπτομένων ἀνὰ δύο, τὰ σημεῖα ἐπαφῆς εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.

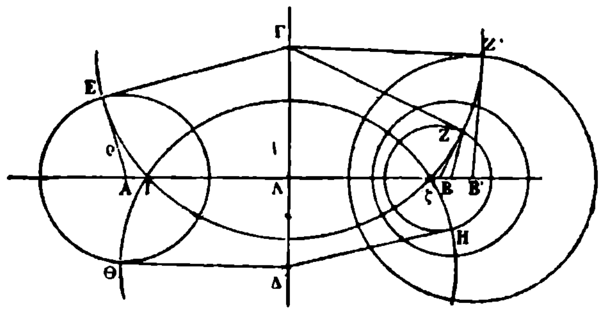
230. *Παρατηρήσεις.* 1) Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια (ΟΔ) εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α, ὀνομάζεται *διχοτομοῦσα* περιφέρεια τῶν περιφερειῶν (ΟΒ), (ΟΓ). Ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς Οα εἰς τὸ Ο εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν ἐφαπτομένων Ομ, Ον, τῶν περιφερειῶν (ΟΒ), (ΟΓ).

2) Ἕνεκα τῶν μετασχηματισμῶν εἰς τοὺς ὁποίους ἀγόμεθα, ἀναφέρομεν καὶ τὰ ἑπόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα

231. Αἱ περιφέρειαι, αἱ τέμνουσαι ὀρθογωνίως δύο δοθείσας καὶ μὴ τεμνομένας περιφερείας (Α) καὶ (Β), διέρχονται διὰ δύο σταθερῶν σημείων ἐπὶ τῆς διακέντρου ΑΒ.

Ὁ ριζικὸς ἄξων ΓΔ τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν εἶναι ὁ τόπος



Σχ. 150.

τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, ὡς αἱ (Γ) καὶ (Δ), αἵτινες τέμνουν ὀρθογωνίως τὰς (Α) καὶ (Β).

Γενικώτερον, ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν τεμνουσῶν ὀρθογωνίως πάσας τὰς περιφερείας, αἵτινες ἔχουν ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν ταύτην. Ἐπειδὴ αἱ ἐκ τῶν σημείων της ἐφαπτόμεναι ΓΕ, ΓΖ, ΓΖ'....., εἶναι πᾶσαι ἴσαι καὶ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας ΑΕ, ΒΖ, ΒΖ'.....

Ἀφ' ἑτέρου, δύο τυχοῦσαι ἐκ τῶν περιφερειῶν τοῦ δευτέρου συστήματος, αἱ μὲ κέντρα Γ, Δ, λ. χ., ἔχουν ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν

---

18. Σ η μ. μ ε τ. Εἰς τὴν ἀπόδειξιν ὑπετέθησαν αἱ περιφέρειαι (ΟΒ), (ΟΓ) τεμνόμεναι· ἀλλ' ὁ τόπος εἶναι πάντοτε περιφέρεια, οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχουν πρὸς ἀλλήλας αἱ περιφέρειαι αὗται.

εὐθεῖαν ΑΒ, ἀφοῦ αἱ δυνάμεις τῶν Α καὶ Β πρὸς τὰς περιφερείας αὐτὰς εἶναι ἴσαι· ἐπειδὴ $ΑΕ^2 = ΑΘ^2$ καὶ $ΒΖ^2 = ΒΗ^2$. Ἑπομένως, ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ὡς ριζικὸς ἄξων τοῦ συστήματος τῶν περιφερειῶν Γ, Δ....., τέμνει ταύτας εἰς σταθερὰ σημεῖα Ι, J, τὰ ἔχοντα μηδενικὰς δυνάμεις πρὸς αὐτάς.

232. 1) Ὁ Poncelet, ὅστις πρῶτος ἐθεώρησεν τὰ σημεῖα αὐτά, τὰ ὠνόμασεν ὁριακὰ σημεῖα. (Βλ. Traité des propriétés projectives des figures, tome I, No 76).

2) Τὰ οριακὰ σημεῖα εἶναι πραγματικὰ καὶ διάφορα ἀλλήλων ἐὰν αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι (Α), (Β), (Β')..... δὲν τέμνωνται, καὶ συμπίπτουν εἰς ἓν ἐὰν αἱ περιφέρειαι αὗται ἐφάπτωνται (τὸ κοινὸν σημεῖον ἐπαφῆς των). Ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἔχουν κοινὰ σημεῖα τὰ ὁριακὰ σημεῖα εἶναι φανταστικά. Τοῦτο συμβαίνει λ. χ. διὰ τὰς περιφερείας ὡς αἱ (Γ), (Δ)..... τοῦ δευτέρου συστήματος· ἐπειδὴ αἱ ὀρθογώνιοι πρὸς αὐτὰς περιφέρειαι τοῦ πρώτου συστήματος (Α), (Β)..... δὲν συναντοῦν τὴν διάκεντρον ΓΔ.

Θεώρημα

233. ***Δύο περιφέρειαι μὴ τεμνόμεναι, ἔχουν ὡς ἀντίστροφα δύο ὁμοκέντρους περιφερείας, ἐὰν ὡς πόλος ἀντιστροφῆς ληφθῇ ἓν ἐκ τῶν ὁριακῶν σημείων.***

Ἐκλέγοντες, πράγματι, τὸ σημεῖον Ι (Σχ. 150) ὡς πόλον ἀντιστροφῆς, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ περιφέρειαι (Γ), (Δ)....., ὡς διερχόμεναι διὰ τοῦ πόλου Ι καὶ τοῦ σημείου J, μετασχηματίζονται εἰς εὐθείας διερχομένας διὰ τοῦ ἀντιστρόφου J' τοῦ δευτέρου σημείου. Ἐπειδὴ δε αἱ περιφέρειαι αὗται εἶναι ὀρθογώνιοι πρὸς τὰς περιφερείας (Α), (Β), (Β')....., ἕπεται ὅτι ἡ δέσμη τῶν διὰ τοῦ J' εὐθειῶν θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς περιφερείας εἰς ἃς μετασχηματίζονται αἱ (Α), (Β).....

Ἤτοι, αἱ περιφέρειαι (Α), (Β)..... ἔχουν ὡς ἀντίστροφα τὰς περιφερείας μὲ κοινὸν κέντρον τὸ σημεῖον J'.

234. *Παρατήρησις*. Πᾶσαι αἱ περιφέρειαι, αἵτινες δὲν τέμνονται καὶ ἔχουν τὸν αὐτὸν ριζικὸν ἄξονα ΓΔ, δύνανται νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ὁμοκέντρους περιφερείας.

Θεώρημα

235. ***Δύο τεμνόμεναι περιφέρειαι (Α) (Β) μετασχηματίζονται εἰς ἴσας περιφερείας, ἐὰν ἐκλεγῇ ὡς πόλος ἀντιστροφῆς ἓν τυχὸν σημεῖον μιᾶς ἐκ τῶν περιφερειῶν αἵτινες διχοτομοῦν αὐτάς.***

Πράγματι, ἡ διχοτομοῦσα αὕτη περιφέρεια (Δ), ὡς διερχομένη διὰ τοῦ πόλου καὶ τῶν δύο σημείων τομῆς τῶν περιφερειῶν (Α) καὶ (Β), μετασχηματίζεται προφανῶς εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν ἀντιστρόφων (Α'), (Β') τῶν περιφερειῶν αὐτῶν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ (Δ) διχοτομεῖ τὰς (Α) καὶ (Β), ἕπεται ὅτι τὸ ἀντίστροφόν της (Δ') θὰ διχοτομῇ τὴν γωνίαν τῶν περιφερειῶν (Α') καὶ (Β') καὶ κατὰ συνέπειαν αἱ δύο τελευταῖαι περιφέρειαι θὰ εἶναι ἴσαι.

Ἐπειδή, δύο περιφέρειαι, τεμνόμεναι κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὑπὸ τῆς κοινῆς των χορδῆς, κατ' ἀνάγκην εἶναι ἴσαι.

236. *Παρατήρησις*. Τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς καὶ ἐὰν αἱ δύο περιφέρειαι δὲν τέμνωνται. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ διχοτομοῦσα περιφέρεια ἀντικαθίσταται ὑπὸ τῆς περιφερείας ἥτις εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων ἀνὰ δύο καὶ τῶν δοθεισῶν (Α) καὶ (Β) (§ 229).

Θεώρημα

237. Μεταξὺ δύο περιφερειῶν (Α) καὶ (Β) αἱ ὁποῖαι δὲν τέμνονται καὶ δὲν ἔχουν κοινὰ σημεῖα, ἐγγράφομεν ἀκολουθίαν περιφερειῶν (Γ), (Δ)..... ἑκάστη τῶν ὁποίων ἐφάπτεται τῶν δοθεισῶν καὶ τῆς προηγουμένης καὶ ἑπομένης αὐτῆς περιφερείας.

1) Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς πρὸς ἀλλήλας τῶν περιφερειῶν (Γ), (Δ)..... εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας (Π).

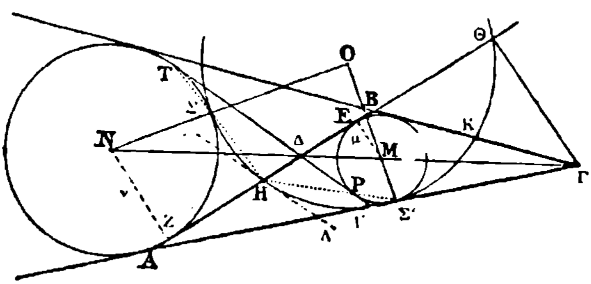
2) Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ἐγγεγραμμένων περιφερειῶν εἶναι ν καὶ ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν ἐφάπτεται τῆς τελευταίας εἴς τι σημεῖον Μ τῆς περιφερείας (Π), θὰ ὑπάρχουν πάλιν ν περιφέρειαι, ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων ἀνὰ δύο καὶ τῶν δοθεισῶν, οἱονδήποτε καὶ ἂν ἐκλεγῇ τὸ σημεῖον Ν τῆς περιφερείας (Π) ὡς σημεῖον ἐπαφῆς τῆς πρώτης καὶ τελευταίας ἐξ αὐτῶν.

Ἀρκεῖ νὰ μετασχηματισθοῦν δι' ἀντιστροφῆς αἱ περιφέρειαι (Α) καὶ (Β) εἰς δύο ἄλλας ὁμοκέντρους (Α') καὶ (Β').

Αἱ περιφέρειαι (Γ), (Δ)..... μετασχηματίζονται εἰς τὰς ἴσας περιφερείας (Γ'), (Δ')....., ἐγγεγραμμένας μεταξὺ τῶν περιφερειῶν (Α') καὶ (Β') καὶ τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα ἐπαφῆς εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς ὁμοκέντρου πρὸς τὰς τελευταίας περιφερείας (Π'). Καὶ ἐπειδὴ τὰς ἴσας ταύτας περιφερείας δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς ν ἴσους κυκλικοὺς τομεῖς Μ'ΟΜ'' κλπ., γίνεται φανερὸν ὅτι, ἐὰν θεωρήσωμεν ἕνα κυκλικὸν τομέα, ἴσον πρὸς τοὺς προηγουμένους, Ν'ΟΝ'' ὡς πρῶτον, μετὰ ν ἴσους πρὸς αὐτὸν τομεῖς ἐπανερχόμεθα εἰς ἐκεῖνον ἀφ' οὗ ἀνεχωρήσαμεν.

Θεώρημα τοῦ Feuerbach

238. Ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων τριγώνου εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς αὐτό.



Σχ. 151.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον, Μ,Ν τὰ κέντρα, μ,ν αἱ ἀκτῖνες τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ μιᾶς παρεγγεγραμμένης περιφερείας καὶ Η, Κ, Ι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καὶ προβάλλομεν τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς ΑΒ εἰς τὸ Θ. Γνωρίζομεν ὅτι

$$\frac{\Gamma M}{\Gamma N}=\frac{\mu}{\nu},\quad \frac{\Delta M}{\Delta N}=\frac{\mu}{\nu},\quad \text{ἐπομένως}:\ \frac{\Gamma M}{\Gamma N}=\frac{\Delta M}{\Delta N}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ εἰς τὴν τελευταῖαν σχέσιν μήκη διὰ τῶν προβολῶν των ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, λαμβάνομεν

$$\frac{\Theta E}{\Theta Z}=\frac{\Delta E}{\Delta Z},$$

δηλ. τὰ σημεῖα Δ καὶ Θ διαιροῦν ἁρμονικῶς τὸ τμῆμα ΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἥμισυ τοῦ τμήματος ΕΖ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ἀποστάσεων τοῦ μέσου του Η ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ καὶ Θ (Νικ., Σ. Γ., § 123 (2)), καὶ ἀκόμη, ΑΖ = ΒΕ, ἄρα καὶ ΗΖ = ΗΕ, ἕπεται ὅτι

$$(ZE^2 = H\Delta .\ H\Theta .).$$

Κατόπιν τούτων, ἂς μετασχηματίσωμεν τὸ σχῆμα δι' ἀντιστροφῆς, λαμβάνοντες τὸ Η διὰ πόλον καὶ διὰ δύναμιν K^2 τὸ γινόμενον ΗΔ. ΗΘ $= HE^2 = HZ^2$. Κατ' αὐτήν, αἱ περιφέρειαι (Μ), (Ν) μετασχηματίζονται εἰς ἑαυτάς, ἀφοῦ τὰ τετράγωνα τῶν ἐκ τοῦ Η ἐφαπτομένων πρὸς αὐτὰς ΗΕ, ΗΖ εἶναι ἴσα πρὸς K^2· ἡ δὲ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ πόλου Η, μέσου τῆς ΑΒ, καὶ διὰ τοῦ ποδὸς Θ τοῦ ἐκ τοῦ Γ ὕψους τοῦ τριγώνου, μετασχηματίζεται εἰς εὐθεῖαν (ε), διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Δ. Ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ Θ, ἀφοῦ ΗΔ. ΗΘ $= K^2$.

Ἡ εὐθεῖα (ε) θὰ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (ἀντιστοιχοῦσαν εἰς ἑαυτὴν κατὰ τὴν ἀντιστροφὴν) κατὰ γωνίαν ΒΔΡ ἴσην πρὸς ἐκείνην κατὰ τὴν ὁποίαν τὴν τέμνει καὶ ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων, δηλ. κατὰ τὴν γωνίαν ΛΗΒ, ὅπου ΗΛ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας αὐτῆς εἰς τὸ Η. Ἀλλ' ἡ εὐθεῖα ΗΛ εἶναι ἀντιπαράλληλος τῆς ΑΒ ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Γ (§ 28,3) καὶ ἐπομένως ἡ εὐθεῖα (ε) δὲν εἶναι ἄλλη παρὰ ἡ δευτέρα ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη ΔΓ τῶν περιφερειῶν (Μ) καὶ (Ν).

Κατ' ἀκολουθίαν, τὸ ἀντίστροφον τῆς εὐθείας (ε), δηλ. ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων, ἐφάπτεται τῶν ἀντιστρόφων τῶν περιφερειῶν (Μ), (Ν). Ταῦτα δέ, ὡς εἴδομεν, συμπίπτουν πρὸς τὰς ἰδίας περιφερείας (Μ) καὶ (Ν).

238α. *Παρατήρησις.* Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Σ΄, Σ τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων καὶ τῶν περιφερειῶν (Μ) καὶ (Ν), ἀρκεῖ νὰ συνδέσωμεν τὸ σημεῖον Η μετὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῆς δευτέρας ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης πρὸς αὐτάς. Ἡ εὐθεῖα ΗΤ ὁρίζει τὸ σημεῖον Σ καὶ ἡ ΗΡ τὸ σημεῖον Σ΄. (Βλπ. ἐπίσης § 1341).

238β. Ἕνεκα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἡ περιφέρεια τοῦ Euler ὠνομάσθη πολλάκις καὶ *περιφέρεια τοῦ Feuerbach*. Ἡ ὀνομασία ἄλλωστε τῆς περιφερείας αὐτῆς ὡς *τῶν ἐννέα σημείων* δὲν εἶναι πολὺ ἐπιτυχής, δεδομένου ὅτι ἡ γραμμὴ αὐτὴ διέρχεται καὶ διὰ πλήθους ἄλλων ἀξιοσημειώτων σημείων, ὡς γνωρίζομεν σήμερον. Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων εἶναι τὸ *σημεῖον τοῦ Feuerbach*. (§ 1341β).

239. Διὰ τὰ ἀντίστροφα σχήματα εἰς τὸν χῶρον, θὰ περιορισθῶμεν μόνον εἰς ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα σχετίζονται πρὸς τὸ ἐπίπεδον καὶ τὴν σφαῖραν. Ἐὰν στρέψωμεν μίαν εὐθεῖαν καὶ μίαν περιφέρειαν περὶ μίαν διάμετρον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, παράγομεν ἓν ἐπίπεδον καὶ μίαν σφαῖραν.

Δύο περιφέρειαι στρεφόμεναι περὶ τὴν διάκεντρόν των παράγουν δύο σφαίρας.

Ἐκ τῶν παρατηρήσεων αὐτῶν προκύπτουν τὰ ἑπόμενα συμπεράσματα.

Θεώρημα

240. Τὸ ἀντίστροφον σχῆμα σφαίρας πρὸς πόλον κείμενον ἐπ' αὐτῆς, εἶναι ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον τὴν διερχομένην διὰ τοῦ πόλου.

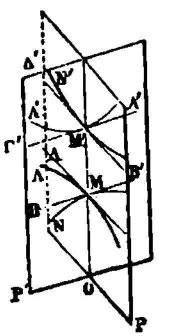
Τὸ ἀντίστροφον σχῆμα ἐπιπέδου πρὸς πόλον ἐξωτερικὸν αὐτοῦ, εἶναι σφαῖρα διερχομένη διὰ τοῦ πόλου καὶ ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ πόλου διερχομένης καθέτου διαμέτρου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Τὸ ἀντίστροφον σχῆμα σφαίρας πρὸς πόλον μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας της, εἶναι μία ἄλλη σφαῖρα. Ὁ δὲ πόλος εἶναι κέντρον ὁμοιότητος τῶν δύο ἀντιστρόφων σχημάτων.

Θεώρημα

241. Εἰς δύο ἀντίστροφα σχήματα, αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἔστωσαν (ΜΝ), (ΜΛ) δύο καμπύλαι εἰς τὸν χῶρον καὶ (Μ'Ν'), (Μ'Λ') αἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν. Αἱ καμπύλαι (ΜΝ), (Μ'Ν') εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τοῦ πόλου Ο, καὶ τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς καμπύλας (ΝΛ), (Ν'Λ').



Σχ. 152

Θεωρήσωμεν τὰς ἐφαπτομένας ΜΑ, ΜΒ τοῦ πρώτου ζεύγους τῶν καμπύλων καὶ τὰς Μ'Α', Μ'Β' τοῦ δευτέρου ζεύγους, ἀλλὰ διευθυνομένας κατ' ἀντιθέτους φορὰς πρὸς τὰς πρώτας.

Αἱ τρίεδροι γωνίαι Μ, ΟΑΒ καὶ Μ', ΟΑ'Β' εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι μίαν δίεδρον ἴσην περιεχομένην μεταξὺ δύο ἑδρῶν ἴσων ἀντιστοίχως. Πράγματι, αἱ δίεδροι μὲ κοινὴν ἀκμὴν ΟΜΜ' εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ ἕδραι ΑΜΟ, ΒΜΟ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἕδρας Α'Μ'Ο, Β'Μ'Ο, ὡς ἤδη ἐδείχθη (§ 221).

Ἑπομένως, καὶ αἱ τρίται ἕδραι τῶν δύο τριέδρων εἶναι ἴσαι, ἢ

$$AMB = A'M'B' = \Gamma'M'\Delta' \quad (^{19})$$

Παρατήρησις. Ἐθεωρήσαμεν τὴν κατὰ κορυφὴν γωνίαν τῆς Γ'Μ'Δ' διὰ νὰ ἀχθῶμεν εἰς ἰσότητα τριέδρων.

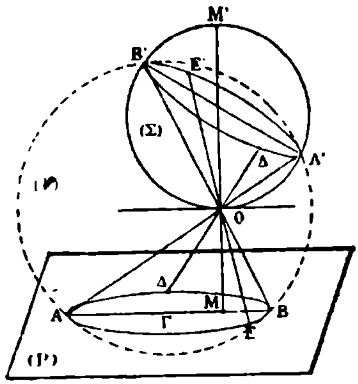
---

19. Σημ. μετ. Αἱ καμπύλαι (ΜΝ), (ΝΛ) ὑποτίθενται ἐπίπεδοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀπόδειξιν.

Θεώρημα

242. Τὸ ἀντίστροφον σχῆμα περιφερείας πρὸς πόλον ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς κείμενον, εἶναι περιφέρεια.

Ἔστω (ΑΒ) ἡ περιφέρεια, (Ρ) τὸ ἐπίπεδόν της καὶ Ο σημεῖον ἐκτὸς τοῦ (Ρ) κείμενον. Ἐκ τοῦ Ο ἂς φέρωμεν κάθετον ΟΜ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καὶ ἂς θεωρήσωμεν τὸ ἀντίστροφον Μ' τοῦ ποδὸς Μ.



Σχ. 153

Ἡ σφαῖρα (Σ) μὲ διάμετρον ΟΜ' εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) καί, ἑπομένως, πάντα τὰ ὁμόλογα σημεῖα τῆς περιφερείας (ΑΒ) θὰ εὑρίσκωνται ἐπ' αὐτῆς. Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ ΟΑ . ΟΑ'=ΟΒ . ΟΒ', ὑπάρχει σφαῖρα (Τ) μὲ μέγιστον κύκλον τὴν περιφέρειαν ΑΒΑ'Β' καὶ εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει προφανῶς ἡ περιφέρεια (ΑΒ)· ἐπὶ τῆς σφαίρας ταύτης εὑρίσκονται πάντα τὰ ὁμόλογα σημεῖα Δ' τῶν διαφόρων σημείων Δ τῆς περιφερείας (ΑΒ)· ἐπειδὴ εἶναι: ΟΔ . ΟΔ'= ΟΑ . ΟΑ'= ΟΒ . ΟΒ'.

Ὁ τόπος, ἑπομένως, τῶν σημείων Δ' εἶναι περιφέρεια, τομὴ τῶν σφαιρῶν (Σ) καὶ (Τ).

243. *Παρατηρήσεις.* 1) Αἱ ἀντίστροφοι περιφέρειαι (ΑΒ), (Α'Β') εἶναι ἀντιπαράλληλοι τομαὶ τοῦ κώνου μὲ κορυφὴν Ο καὶ βάσιν τὴν περιφέρειαν (ΑΒ).

2) Πᾶσα ἐπίπεδος τομὴ τοῦ κώνου παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), δίδει περιφέρειαν ἀντίστροφον τῆς (Α'Β') ἀλλὰ μὲ διάφορον δύναμιν ἀντιστροφῆς.

3) Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας (Σ) εἰς τὸ Ο δίδει περιφέρειαν περιωρισμένην εἰς τὸ σημεῖον αὐτό, ἡ δὲ διεύθυνσίς του ἀρκεῖ πρὸς καθορισμὸν τῶν ἀντιπαραλλήλων τομῶν τοῦ εἰς τὴν (Σ) ἐγγεγραμμένου πλαγίου κυκλικοῦ κώνου (ΟΑ'Β').

4) Ἡ θεώρησις τῆς σφαίρας (Τ) καὶ τοῦ κώνου (ΟΑΒ) μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἑπομένην παρατήρησιν: Πᾶς κῶνος τέμνων σφαῖραν κατὰ περιφέρειαν ΒΑ, τέμνει αὐτὴν ἐκ νέου κατὰ περιφέρειαν πάλιν Α'Β'.

5) Ἐὰν ὡς δύναμις ἀντιστροφῆς ληφθῇ $K^2=2\rho^2$, ὅπου ρ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας (ΑΒ), τὸ ἐπίπεδον (Ρ) θὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀντιστρόφου του σφαίρας (Σ).

244. ***Στερεογραφικὴ προβολή.*** Ὀνομάζομεν *στερεογραφικὴν προβολὴν* ἑνὸς σφαιρικοῦ σχήματος τὴν κωνικὴν προβολὴν αὐτοῦ ἐπὶ διαμετρικὸν ἐπίπεδον τῆς σφαίρας, ὅταν ὡς κορυφὴ τοῦ κώνου ληφθῇ ἓν τῶν ἄκρων τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον διαμέτρου τῆς σφαίρας.

Συνέπειαι. Πᾶν ὅ,τι ἀπεδείχθη διὰ τὰ ἀντίστροφα σχήματα εἰς τὸν χῶρον ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τῆς *στερεογραφικῆς προβολῆς.*

Οὕτω, μία περιφέρεια ΑΜΒ προβάλλεται κατὰ περιφέρειαν Α'Μ'Β' αἱ γωνίαι διατηροῦνται κλπ.

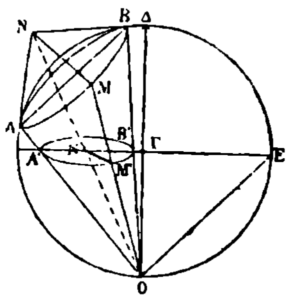
Θεώρημα τοῦ Chasles

245. Τὸ κέντρον Ν' τῆς περιφερείας καθ' ἣν προβάλλεται περιφέρεια ΑΜΒ τῆς σφαίρας, εἶναι ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Ν τοῦ κώνου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν κατὰ τὰ σημεῖα τῆς θεωρουμένης περιφερείας ΑΜΒ.

Δι' ἑνὸς τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας ΑΜΒ φέρομεν τὸ ἐπίπεδον ΜΟΝ, διερχόμενον διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ τῆς κορυφῆς Ν τοῦ περιγεγραμμένου κώνου. Ἡ εὐθεῖα ΝΝ'Ο εἶναι ἡ προβάλλουσα τοῦ Ν καὶ τὸ τμῆμα Μ'Ν' ἡ προβολὴ τῆς ἐφαπτομένης ΜΝ.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν καὶ νὰ δώσωμεν συνάμα μίαν ἄλλην ἀπόδειξιν τοῦ γνωστοῦ θεωρήματος τῆς § 242, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ μῆκος Μ'Ν' εἶναι σταθερόν.

Πρὸς τοῦτο, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία ΟΜΝ, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς εὐθείας ΟΜ καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΜΝ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τῆς ΟΜ μετὰ τοῦ τόξου τῆς περιφερείας, ἣν ὁρίζει ἐπὶ τῆς σφαίρας τὸ ἐπίπεδον ΜΟΝ ([20]).



Σχ. 154.

Τὸ ἀντίστροφον τοῦ τόξου τούτου εἶναι τμῆμα Μ'Ν' (§§ 220, 223), καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι ΟΜΝ, ΟΜ'Ν' εἶναι παραπληρωματικαί. Καὶ ἐπειδὴ εἰς δύο τρίγωνα αἱ πλευραί, αἱ ἀπέναντι ἴσων ἢ παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι ἀνάλογοι (§ 150), θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{M'N'}{MN}=\frac{ON'}{ON} \quad \text{ἢ} \quad M'N'=MN.\frac{ON'}{ON}.$$

Δηλ. ἡ Μ'Ν' ἔχει μῆκος σταθερόν.

245 α. ***Σημείωσις.*** Τὸ θεώρημα τοῦ Chasles ἐδόθη τὸ 1816. Ἡ ἀνωτέρω ἐκφώνησίς του παρέμεινε κλασσικὴ καὶ δὲν θὰ πρέπει νὰ τροποποιηθῇ· κατ' αὐτήν, ἡ προβολὴ δὲν νοεῖται ὡς *ὀρθή,* ἀλλὰ ὡς *κωνικὴ* ἢ *κεντρική,* καθὼς τὴν ἐθεωρήσαμεν.

Γενικὴ παρατήρησις

246. Ὅπως εἴδομεν, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις ἑνὸς ἐπιπέδου (Ρ) ὡς πρὸς τὴν ἀντίστροφον αὐτοῦ σφαῖραν, ὁ πόλος Ο τῆς ἀντιστροφῆς εἶναι τὸ ἓν τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Ἂν Μ' εἶναι ὁ ποὺς τῆς διαμέτρου ταύτης ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον

20. Σημ. Μετ. Ἐπειδὴ ἡ ΜΝ ἐφάπτεται τοῦ τόξου τούτου εἰς τὸ

δυνάμεθα εὐκόλως νὰ διαπιστώσωμεν τὴν ἀλήθειαν τῶν ἑπομένων παρατηρήσεων :

Πᾶς μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας διερχόμενος διὰ τοῦ πόλου Ο μετασχηματίζεται εἰς εὐθεῖαν τοῦ (Ρ) διὰ τοῦ σημείου Μ'.

Πᾶς μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας διερχόμενος διὰ τοῦ πόλου μετασχηματίζεται εἰς εὐθεῖαν τοῦ (Ρ), μὴ διερχομένην διὰ τοῦ Μ'.

Πᾶσα περιφέρεια τῆς σφαίρας μὴ διερχομένη διὰ τοῦ πόλου ἔχει ὡς ἀντίστροφον περιφέρειαν εἰς τὸ (Ρ).

Αἱ περιφέρειαι τοῦ (Ρ) αἱ διερχόμεναι διὰ τοῦ Μ' ἔχουν ὡς ἀντίστροφα μικροὺς κύκλους τῆς σφαίρας, διερχομένους διὰ τοῦ διαμετρικοῦ σημείου τοῦ πόλου.

Πᾶσα ἰδιότης ἑνὸς σφαιρικοῦ σχήματος ἔχει τὴν ἀντίστοιχόν της ἐπὶ τοῦ ἀντιστρόφου σχήματος εἰς τὸ (Ρ).

Ἀντιστρόφως, πᾶσα ἰδιότης ἑνὸς σχήματος εἰς τὸ ἐπίπεδον (Ρ) ἔχει τὴν ἀντίστοιχόν της ἐπὶ τοῦ ἀντιστρόφου αὐτοῦ σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν.

Παραδείγματα

247. *Θεωρήματα.* (α) Εἰς τὸ ἐπίπεδον, πᾶσα τέμνουσα δύο περιφερειῶν, διερχομένη διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν κέντρων ὁμοιότητος αὐτῶν, τέμνει τὰς περιφερείας ὑπὸ ἴσας γωνίας.

(β) Δύο ἀντιομόλογα σημεῖα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς σημεῖα ἐπαφῆς περιφερείας ἐφαπτομένης τῶν δύο περιφερειῶν. [Νικ., Σ. Γ. § 63].

(γ) Δύο ζεύγη ἀντιομολόγων σημείων ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν [Νικ., Σ. Γ. § 63].

(δ) Ὁ τόπος τῶν σημείων ἐκ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἴσας ἐφαπτομένας πρὸς δύο περιφερείας, εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον τῶν περιφερειῶν.

Ἡ εὐθεῖα αὕτη καλεῖται *ριζικὸς ἄξων* τῶν δύο περιφερειῶν.

(ε) Πᾶσα περιφέρεια μὲ κέντρον ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος καὶ ἀκτῖνα τὴν ἐξ αὐτοῦ ἐφαπτομένην πρὸς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην τῶν δύο περιφερειῶν, τέμνει ὀρθογωνίως αὐτάς.

(ζ) Αἱ περιφέρειαι, αἱ διερχόμεναι διὰ δύο σταθερῶν σημείων καὶ τέμνουσαι δοθεῖσαν περιφέρειαν, ὁρίζουν χορδὰς ἐπὶ τῆς τεμνομένης περιφερείας διερχομένας διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀντίστοιχα θεωρήματα. (α) Εἰς τὴν σφαῖραν, πᾶς μέγιστος κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν κέντρων ὁμοιότητος δύο μικρῶν κύκλων αὐτῆς, τέμνει αὐτοὺς ὑπὸ ἴσας γωνίας.

(β) Δύο ἀντιομόλογα σημεῖα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς σημεῖα ἐπαφῆς κύκλου ἐφαπτομένου τῶν δύο μικρῶν κύκλων.

(γ) Δύο ζεύγη ἀντιομολόγων σημείων ἀνήκουν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

(δ) Ὁ τόπος τῶν σημείων ἐκ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν πρὸς δύο μικροὺς κύκλους τόξα μεγίστων κύκλων ἐφαπτόμενα αὐτῶν καὶ ἴσα, εἶναι μέγιστος κύκλος κάθετος πρὸς ἐκεῖνον, ὅστις διέρχεται διὰ τῶν κέντρων τῶν δύο μικρῶν κύκλων.

Οὗτος καλεῖται *ριζικὸς* κύκλος τῶν δύο μικρῶν κύκλων.

(ε) Πᾶς κύκλος μὲ κέντρον ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ κύκλου καὶ πολικὴν ἀκτῖνα τὴν χορδὴν τοῦ ἐξ αὐτοῦ ἐφαπτομένου τοξου μεγίστου κύκλου πρὸς τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον τῶν δύο μικρῶν κύκλων, τέμνει ὀρθογωνίως αὐτούς.

(ζ) Οἱ κύκλοι μιᾶς σφαίρας, οἱ διερχόμενοι διὰ δύο σταθερῶν σημείων αὐτῆς καὶ τέμνοντες δοθέντα μικρὸν κύκλον, ὁρίζουν, διὰ τῶν σημείων τομῆς, μεγίστους κύκλους τῆς σφαίρας διερχομένους διὰ τῆς αὐτῆς διαμέτρου.

248. *Παρατηρήσεις.* 1) *Τὸ ἑξάγωνον τοῦ Pascal, τὸ ἑξάγωνον τοῦ Brianchon* ἔχουν τὰ ἀνάλογά των ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα:

Εἰς πᾶν σφαιρικὸν ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς μικρὸν κύκλον, τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.

Τὰ διαγώνια τόξα μεγίστων κύκλων, τὰ συνδέοντα τὰς ἀντικειμένας κορυφὰς ἑνὸς σφαιρικοῦ ἑξαγώνου περιγεγραμμένου εἰς μικρὸν κύκλον, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἢ ἄλλως, τὰ ἐπίπεδα τῶν τριῶν μεγίστων κύκλων, οἵτινες διέρχονται διὰ τῶν ἀπέναντι κορυφῶν ἑνὸς ἑξαγώνου περιγεγραμμένου εἰς μικρὸν κύκλον, διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς διαμέτρου.

Ἰδοὺ ἓν παράδειγμα θεωρήματος ἐπὶ τῆς σφαίρας ὁδηγοῦντος εἰς θεώρημα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου:

Τὸ *Θεώρημα τοῦ Guéneau d'Aumont* (§ 160) μετασχηματίζεται εἰς τό:

Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντικειμένων γωνιῶν ἑνὸς ἐπιπέδου τετραπλεύρου, ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τυχόντα κυκλικὰ τόξα, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ. (Baltzer, § IV, n° 4).

Εἶναι εὔκολον ἄλλωστε νὰ ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας τὸ θεώρημα τοῦτο, ὡς καὶ πολλὰ ἄλλα, λαμβανόμενα δι' ἀντιστροφῆς ἐκ θεωρημάτων ἀναφερομένων εἰς σφαιρικὰ πολύγωνα. (Ex. d. G., 2e, 3e, 4e éditions, livre II, n° 686).

2) Ἡ στερεογραφικὴ προβολὴ χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν Χαρτογραφίαν. Θεωροῦντες ἐπίπεδον μεγίστου κύκλου σφαίρας ὡς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς καὶ κέντρον προβολῆς ἕνα τῶν πόλων τοῦ ἐπιπέδου τούτου, λαμβάνομεν ὡς προβολὴν ἑνὸς τυχόντος κύκλου τῆς σφαίρας, περιφέρειαν πάντοτε ἢ εὐθεῖαν. Παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας ἢ μεσημβρινοὶ προβάλλονται κατὰ περιφερείας, ἐν γένει, εὐκόλως δυναμένας νὰ κατασκευασθοῦν, ἡ δὲ διατήρησις τῶν γωνιῶν ἑνὸς σφαιρικοῦ σχήματος κατὰ τὴν προβολὴν ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα ἀπεικόνισιν αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἀρκετὰ πιστὴν κατὰ τὴν μορφήν. Ἡ ἰσοδυναμία ὅμως τῶν ἐπιφανειῶν δὲν διατηρεῖται διὰ περιοχὰς ἀνίσως τοῦ πόλου ἀπεχούσας καὶ μάλιστα διὰ τὰς ἐγγὺς αὐτοῦ εὑρισκομένας.

3) Ἡ *λοξοδρομία* εἶναι σφαιρικὴ καμπύλη τέμνουσα οἰκογένειαν μεσημβρινῶν κατὰ σταθερὰν γωνίαν. Διὰ τὴν χάραξίν της σχεδιάζομεν μίαν λογαριθμικὴν ἕλικα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μεγίστου κύκλου, ἔχουσαν ὡς πόλον τὸ κέντρον αὐτοῦ, καὶ προβάλλομεν ἀκολούθως τὴν καμπύλην ταύτην ἀπό τινος τῶν πόλων τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἀντιθέτου ἡμισφαιρίου. (Ex. de Géom. Descriptive, n° 1217 à 1223). Ἐπειδή, ὡς γνωστόν, ἡ λογαριθμικὴ ἕλιξ τέμνει κατὰ σταθερὰν γωνίαν τὰς πολικὰς ἀκτῖνας τοῦ ἐπιπέδου της (καθ' ἃς προβάλλονται οἱ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ μεσημβρινοὶ τῆς σφαίρας), γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ λαμβανομένη καμπύλη, *ἡ λοξοδρομία*, θὰ τέμνῃ κατὰ σταθερὰν γωνίαν τοὺς ἐν λόγῳ μεσημβρινούς.

4) Τὸ *θεώρημα τοῦ Villarceau: τὸ δισεφαπτόμενον* (bitangent) *ἐπίπεδον μιᾶς σπείρας τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην κατὰ δύο κύκλους ἴσους*, ἤγαγεν τὸν Mannheim εἰς θεώρημα ἀνάλογον διὰ σφαῖραν δισεφαπτομένην μιᾶς σπείρας. (Ex. de Géom. Descr. n°s 942, 943 et 1202—1205).

248. ***Σημείωσις.*** Ἡ στερεογραφικὴ προβολὴ φαίνεται ὅτι ὀφείλεται εἰς τὸν *Ἵππαρχον* (150 π. Χ.) καὶ μετεδόθη εἰς ἡμᾶς ὑπὸ τοῦ Πτολεμαίου (βλ. *Ἱστορικὴ ἐπισκόπησις*). Ἡ μέθοδος τοῦ *μετασχηματισμοῦ δι' ἀντιστροφῆς* προετάθη ὑπὸ τοῦ Stubbs τὸ 1843 καὶ ἐφηρμόσθη κατόπιν ὑπὸ τοῦ William Thomson ὑπὸ τὸ ὄνομα *Principe des images*. Ὁ Liouville ἐγενίκευσε τὴν ἀρχὴν ταύτην τὸ 1849· ἐπεξειργάσθη αὐτὴν διὰ τῆς ἀναλύσεως καὶ τὴν ὠνόμασεν μετασχηματισμὸν διὰ *ἀντιστρόφων ἐπιβατικῶν ἀκτίνων (Transformation par rayons vecteurs réciproques)*. Ὁ ὅρος *Ἐπιφάνειαι ἀντίστροφοι* ἐχρησιμοποιήθη ὑπὸ τοῦ Bravais εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ δύναμις ἀντιστροφῆς εἶναι ἴση πρὸς −1. (N. A. 1854, p. 227 et suivantes).

Ἡ μέθοδος τῆς ἀντιστροφῆς εἶναι πολὺ γόνιμος καὶ δυνάμεθα ἐπωφελῶς νὰ τὴν χρησιμοποιήσωμεν καὶ εἰς ζητήματα τῆς σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας (Βλ. Paul Serret, Des méthodes en Géométrie, p. 30).

V

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΚΑΙ ΕΠΕΚΤΑΣΙΣ

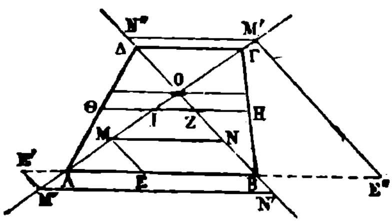
§ I. *Διερεύνησις προβλήματος*

249. *Ὁρισμός*. Ἡ διερεύνησις ἑνὸς προβλήματος συνίσταται εἰς τὴν σπουδὴν τῶν διαφόρων περιπτώσεων, αἵτινες δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν ὅταν μεταβάλλωνται τὰ δεδομένα αὐτοῦ.

Πρόβλημα

250. **Νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τραπεζίου εἰς τρόπον, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν διαγωνίων τμῆμα αὐτῆς νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.**

Κατασκευή. Λαμβάνομεν ΒΕ = λ καὶ φέρομεν τὴν ΕΜ παράλληλον τῆς ΒΔ. Ἡ εὐθεῖα ΜΝ εἶναι ἡ ζητουμένη.



Σχ. 155.

(α) Ἔστω λ > ΑΒ.

Λαμβάνομεν πάλιν

ΒΕ′ = λ

καὶ ἐκ τοῦ Ε′ φέρομεν παράλληλον Ε′Μ′ πρὸς τὴν ΔΒ. Ἡ εὐθεῖα Μ′Ν′ εἶναι ἡ ζητουμένη ἀλλ' ἐξωτερικὴ τοῦ τραπεζίου. Ὑπάρχει πάντοτε μία λύσις, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ μῆκος λ.

(β) $\lambda = AB$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ ΑΒ ἀπαντᾷ εἰς τὸ πρόβλημα.

(γ)
$$\lambda = \frac{AB - \Gamma\Delta}{2}.$$

Τὸ μεταξὺ τῶν διαγωνίων τμῆμα ΙΖ τῆς διαμέσου τοῦ τραπεζίου εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἐπειδὴ

$$IH = \frac{AB}{2}, \quad ZH = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad \text{καὶ} \quad IZ = \frac{AB - \Gamma\Delta}{2}.$$

(δ) Διὰ λ = 0, τὸ τμῆμα περιορίζεται εἰς τὸ σημεῖον Ο τομῆς τῶν διαγωνίων.

(ε) Διὰ ἀρνητικάς, τέλος, τιμὰς τοῦ λ, θὰ ἐλαμβάνομεν ΒΕ″ = καὶ θὰ εὑρίσκομεν τὸ τμῆμα Μ″Ν″, τοῦ ὁποίου ἡ ἐκ τοῦ Μ″ πρὸ

N'' φορὰ εἶναι ἀντίθετος τῆς ἀντιστοίχου φορᾶς διὰ τὰ προηγούμενα τμήματα.

Σύνοψις. Τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε λύσιν καὶ μίαν μόνον διὰ μεταβολὰς τοῦ λ ἀπὸ $+\infty$ ἕως 0 καὶ ἀπὸ 0 ἕως $-\infty$.

Ἐὰν δὲν λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν φορὰν τοῦ τμήματος MN καὶ τὸ σημεῖον M τοποθετοῦμεν πάντοτε ἐπὶ τῆς ΑΓ, τὸ μῆκος λ θὰ θεωρεῖται πάντοτε θετικὸν καὶ δι' ἑκάστην τιμὴν αὐτοῦ· θὰ ἔχωμεν δύο λύσεις· κατὰ τὴν μίαν, τὸ τμῆμα MN θὰ εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ κατὰ τὴν ἄλλην ἐντὸς τῆς ΓΟΔ.

Πρόβλημα

251. **Νὰ ἐγγραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τριῶν δοθεισῶν περιφερειῶν Α, Β, Γ.**

Ἡ ἐπαφὴ δύναται νὰ εἶναι ἐσωτερικὴ ἢ ἐξωτερική. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν παριστῶμεν τὰς περιφερείας διὰ τῶν Α, Β, Γ καὶ εἰς τὴν δευτέραν διὰ τῶν α, β, γ.

Δύναταί τις νὰ θεωρήσῃ τὰς ἑπομένας ὀκτὼ λύσεις: [21]

$$(1)\quad Α, Β, Γ \qquad (2)\ \begin{Bmatrix} Α, Β, γ \\ Α, β, Γ \\ α, Β, Γ \end{Bmatrix} \qquad (3)\ \begin{Bmatrix} Α, β, γ \\ α, Β, γ \\ α, β, Γ \end{Bmatrix} \quad \text{καὶ } (4)\ α, β, γ.$$

Πράγματι, ὅμως, ὑπάρχουν τέσσαρες μόνον διάφοροι κατασκευαί· ἐπειδὴ ἡ (1) ὁμὰς ἀντιστοιχεῖ εἰς τρεῖς ἐξωτερικὰς ἐπαφάς, ἕκαστον μέλος τῶν (2) καὶ (3) εἰς δύο ἐξωτερικὰς καὶ μίαν ἐσωτερικὴν ἢ δύο ἐσωτερικὰς καὶ μίαν ἐξωτερικὴν καὶ ἡ (4) ὁμὰς εἰς τρεῖς ἐσωτερικὰς ἐπαφάς.

Παρατήρησις. Αἱ ὀκτὼ λύσεις ἀντιστοιχοῦν ἀνὰ δύο ὡς ἑξῆς:

$$\begin{Bmatrix} Α, Β, Γ \\ α, β, γ \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Α, Β, γ \\ α, β, Γ \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Α, β, Γ \\ α, Β, γ \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} α, Β, Γ \\ Α, β, γ \end{Bmatrix}.$$

Εἰδικαὶ περιπτώσεις. Μία ἢ περισσότεραι περιφέρειαι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν περιοριζόμεναι εἰς σημεῖον, ἀφοῦ ἓν σημεῖον δύναται νὰ θεωρηθῇ περιφέρεια μὲ ἀκτῖνα μηδενικήν· δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

1) Δύο περιφερείας καὶ ἓν σημεῖον.
2) Μία περιφέρεια καὶ δύο σημεῖα.
3) Τρία σημεῖα.

Μία ἢ περισσότεραι περιφέρειαι δύνανται νὰ ἀντικατασταθοῦν δι' εὐθειῶν· ἐπειδὴ μία εὐθεῖα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς περιφέρεια μὲ ἀκτῖνα ἀπείρως μεγάλην. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ ἔχωμεν:

4) Δύο περιφερείας καὶ μίαν εὐθεῖαν.
5) Μίαν περιφέρειαν καὶ δύο εὐθείας.
6) Τρεῖς εὐθείας.

Δυνάμεθα τέλος νὰ θεωρήσωμεν καὶ τοὺς ἑπομένους συνδυασμούς:

7) Μίαν περιφέρειαν, ἓν σημεῖον καὶ μίαν εὐθεῖαν.
8) Δύο σημεῖα καὶ μίαν εὐθεῖαν.
9) Ἓν σημεῖον καὶ δύο εὐθείας.

Ἡ γενικὴ περίπτωσις τῶν τριῶν περιφερειῶν καὶ ἑκάστη τῶν

---

21. Σημ. μετ. Πρόκειται περὶ εἰδῶν, ἢ μορφῶν, λύσεων.

εἰδικῶν δύνανται νὰ παρουσιάσουν διαφόρους ποικιλίας, ἀναλόγως τῆς θέσεως τῶν δεδομένων. Διὰ τρεῖς λ.χ. περιφερείας Α,Β,Γ, παρατηροῦμεν ὅτι:

(α) Διὰ τρεῖς περιφερείας ἐξωτερικὰς ἀλλήλων καὶ μὲ κέντρα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὑπάρχουν *ὀκτὼ διάφοροι λύσεις* τοῦ προβλήματος.

(β) Διὰ τρεῖς περιφερείας ἐξωτερικὰς ἀλλήλων καὶ μὲ κέντρα κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὑπάρχουν *ὀκτὼ λύσεις*, συμμετρικαὶ ἀνὰ δύο πρὸς τὴν διάκεντρον.

(γ) Διὰ τρεῖς περιφερείας, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο Α, Β τέμνονται καὶ ἡ τρίτη Γ εἶναι ἐξωτερικὴ αὐτῶν, ὑπάρχουν *τέσσαρες* μόνον λύσεις. Πράγματι, αἱ Α καὶ Β θὰ ἐφάπτωνται τῆς ζητουμένης ἢ ἀμφότεραι ἐξωτερικῶς ἢ ἀμφότεραι ἐσωτερικῶς αὐτῆς καὶ θὰ ἔχωμεν τὰς ἑπομένας μορφάς:

Α, Β, Γ, Α, Β, γ α, β, Γ καὶ α, β, γ.

(δ) Διὰ τὰς Α καὶ Β ἐξωτερικὰς ἀλλήλων ἀλλ' ἐσωτερικὰς τῆς Γ, αἱ λύσεις εἶναι *τέσσαρες*, μὲ ἐσωτερικὴν πάντοτε ἐπαφὴν τῆς Γ μετὰ τῆς ζητουμένης:

Α, Β, γ α, β, γ Α, β, γ καὶ α, Β, γ.

(ε) Διὰ Α καὶ Β τεμνομένας καὶ ἐσωτερικὰς τῆς Γ, *δύο* λύσεις: Α, Β, γ καὶ α, β, γ.

Παρατήρησις. Τὰ ἀνωτέρω ὑποδειχθέντα εἶναι ἐπαρκῆ πρὸς διαπίστωσιν τῆς μεγάλης ποικιλίας τῶν ὄψεων ἑνὸς δεδομένου προβλήματος· καὶ θὰ ἠδύνατο ν' ἀχθῇ τις καὶ εἰς πολλὰς ἄλλας ἰδιομορφίας ἐὰν ἐπεθύμει νὰ τὸ ἐξετάσῃ διὰ πᾶσαν δυνατὴν διάταξιν τῶν δεδομένων αὐτοῦ.

Πρόβλημα

252. Νὰ ἐξετασθῇ τὸ πλῆθος τῶν λύσεων τὰς ὁποίας δύναται νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα: Νὰ γραφῇ περιφέρεια (Γ) ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν (Α) καὶ (Β) καὶ ἔχουσα ἀκτῖνα δοθεῖσαν γ.

Ἂς εἶναι α, β αἱ ἀκτῖνες τῶν (Α) καὶ (Β), δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

Ἡ μεγαλυτέρα ἀπόστασις δύο σημείων τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν εἶναι $\alpha+\beta+\delta$ καὶ ἡ μικροτέρα $\delta-(\alpha+\beta)$.

Ὑποθέσωμεν $\alpha>\beta$ καὶ τὰς δύο περιφερείας ἐξωτερικὰς ἀλλήλων:

$$\delta>\alpha+\beta.$$

1) $2\gamma>\delta+\alpha+\beta$. Ὑπάρχουν ὀκτὼ λύσεις, συμμετρικαὶ ἀνὰ δύο ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον ΑΒ.

2) $2\gamma=\delta+\alpha+\beta$. Ὑπάρχουν ἑπτὰ λύσεις· ἐπειδὴ αἱ δύο περιβάλλουσαι τὰς δοθείσας καὶ συμμετρικαὶ πρὸς τὴν διάκεντρον συμπίπτουν εἰς μίαν.

3) $\delta+\alpha+\beta>2\gamma)\ \delta+\alpha-\beta$, καὶ *κατὰ μείζονα λόγον*, $>\delta+\beta-\alpha$. Ὑπάρχουν ἓξ λύσεις.

4)	$2\gamma=\delta+\alpha-\beta$	Πέντε λύσεις.
5)	$\delta+\alpha-\beta>2\gamma>\delta+\beta-\alpha$	Τέσσαρες λύσεις.
6)	$2\gamma=\delta+\beta-\alpha$	Τρεῖς λύσεις.
7)	$\delta+\beta-\alpha>2\gamma>\delta-(\alpha+\beta)$	Δύο λύσεις.
8)	$2\gamma=\delta-(\alpha+\beta)$	Μία λύσις.
9)	$2\gamma<\delta-(\alpha+\beta)$	Οὐδεμία λύσις.

Εἰδικαὶ περιπτώσεις. Θὰ ἠδυνάμεθα ἀκόμη νὰ ἀναζητήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν λύσεων, ἀναλόγως τῆς σχετικῆς θέσεως τῶν περιφερειῶν πρὸς ἀλλήλας καὶ τῶν διαφόρων τιμῶν τοῦ μήκους γ.

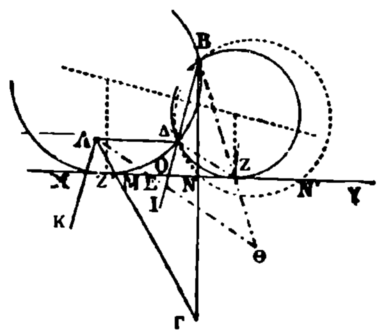
Ἐὰν λ. χ. ἡ περιφέρεια (Β) εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς (Α), δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τέσσαρας, τρεῖς, δύο, μίαν ἢ καμμίαν λύσιν τοῦ προβλήματος, ἀναλόγως τῶν, σχετικῶς πρὸς ἄλληλα, μεγεθῶν τῶν ἀκτίνων τῶν περιφερειῶν καὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.

Πρόβλημα

253. Δίδονται εὐθεῖα ΧΥ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ἐπὶ τῆς εὐθείας κινεῖται τμῆμα ΜΝ σταθεροῦ μήκους, εἰς ἑκάστην δὲ θέσιν αὐτοῦ φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΜΓ, ΒΝΓ τεμνομένας εἰς τὸ Γ. Νὰ μελετηθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς γωνίας εἰς τὸ Γ.

Ἔστω ΜΝ τυχοῦσα θέσις τοῦ τμήματος.

Διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τοῦ προβλήματος φέρομεν τὸ τμῆμα ΑΔ ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ ΜΝ. Τὸ σημεῖον Δ εἶναι τελείως ὡρισμένον καὶ ἡ ὑπὸ μελέτην γωνία ἰσοῦται πρὸς τὴν ΔΝΒ.



Σχ. 156

Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ γωνία αὕτη γίνεται τόσον μεγαλυτέρα ὅσον ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας ΔΝΒ εἶναι μικροτέρα καί, ἐπομένως, (§ 216), τὸ μέγιστον αὐτῆς ΔΖΒ θ' ἀντιστοιχῇ εἰς τὴν περιφέρειαν ΒΔΖ, τὴν ἐφαπτομένην τῆς εὐθείας ΧΥ. Ἓν δεύτερον μέγιστον δίδει ἡ περιφέρεια ΒΔΖ'.

Μεταξὺ τῶν θέσεων τῶν δύο μεγίστων, ἡ γωνία Γ ἢ Ν μηδενίζεται διὰ θέσιν τοῦ σημείου Ν ἐπὶ τῆς διὰ τῶν Β, Δ περιφερείας καὶ μὲ ἀκτῖνα ἀπείρως μεγάλην, δηλ. διὰ τὴν θέσιν Ο ἐπὶ τῆς κοινῆς χορδῆς ΒΔ. Πράγματι, αἱ εὐθεῖαι ΒΔΟ καὶ ΑΚ εἶναι τότε παράλληλοι.

Μεταβολαί. Ὅταν τὸ Ν εὑρίσκεται εἰς ἄπειρον πρὸς τὰ δεξιὰ ἀπόστασιν, ἡ γωνία εἶναι μηδέν· ἀπὸ τῆς θέσεως αὐτῆς καὶ ἐφ' ὅσον κινῆται πρὸς τ' ἀριστερά, ἡ γωνία αὐξάνει μέχρι τοῦ μεγίστου της Θ εἰς τὴν θέσιν Ζ τοῦ Ν καὶ ἐλαττοῦται κατόπιν μέχρι τοῦ μηδενὸς διὰ Ν≡Ο. Ἀπὸ τοῦ Ο αὐξάνει μέχρι τοῦ δευτέρου της μεγίστου διὰ Ν≡Ζ' καὶ κατόπιν ἐλαττοῦται μέχρι τοῦ μηδενὸς διὰ θέσιν τοῦ Ν εἰς ἄπειρον πρὸς τ' ἀριστερὰ ἀπόστασιν.

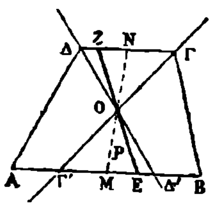
Παρατήρησις. Ἀπὸ ἀπόψεως συνεχείας τῆς συναρτήσεως Γ=σ(Ν), δὲν ὑπάρχουν δύο μέγιστα αὐτῆς ἀλλὰ ἓν μέγιστον καὶ ἓν ἐλάχιστον.

Πρόβλημα

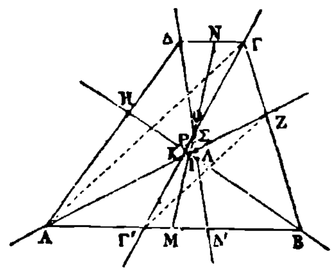
254. Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας ἀγομένης διὰ δοθέντος σημείου Ρ.

Ἡ εὐθεῖα MN, ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν βάσεων (Σχ. 157) διαιρεῖ τὸ τραπέζιον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα, καθὼς καὶ πᾶσα εὐθεῖα EZ διερχομένη διὰ τοῦ μέσου O τῆς MN καὶ ἐφ' ὅσον τὸ σημεῖον Z εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΔ. Τὰ πράγματα ὅμως ἀλλάζουν ἐὰν τὸ σημεῖον Z εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς μικρᾶς βάσεως τοῦ τραπεζίου καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ καθορίσωμεν τὰς ἄκρας θέσεις τῆς εὐθείας διαιρέσεως EZ.

(α) Φέρομεν τὰς ΓΟΓ', ΔΟΔ' (Σχ. 157). Ἡ εὐθεῖα EZ διέρχεται διὰ τοῦ O καὶ τέμνει τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου, ἐὰν τὸ σημεῖον P εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας ΓΟΔ ἢ ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς γωνίας.



Σχ. 157.



Σχ. 158.

(β) Ἂς προσδιορίσωμεν τὰς ἄκρας θέσεις τῆς εὐθείας διαιρέσεως, ὅταν αὕτη τέμνῃ τὴν μεγάλην βάσιν καὶ μίαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

Γραφικῶς. Ἀρκεῖ νὰ συνδέσωμεν τὸ σημεῖον A μετὰ τοῦ Γ (Σχ. 158), νὰ φέρωμεν τὴν παράλληλον πρὸς αὐτὴν Γ'Z καὶ τὴν εὐθεῖαν AZ.

Τὸ τρίγωνον ABZ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ Γ'ΒΓ.

Λογιστικῶς. Δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὕψος υ' τοῦ τριγώνου ABZ συναρτήσει τοῦ ὕψους υ τοῦ τραπεζίου καὶ τῶν βάσεών του β καὶ β'.

Θὰ ἔχωμεν: $\beta\upsilon' = \frac{\beta+\beta'}{2}\cdot\upsilon$ καὶ ἑπομένως $\upsilon' = \frac{\beta+\beta'}{2\beta}\upsilon$.

Ἔστω H σημεῖον τῆς ΑΔ εἰς τὸ ἴδιον ὕψος μὲ τὸ Z. Αἱ εὐθεῖαι AZ, BH τέμνονται ἐπὶ τῆς MN εἰς τὸ I, ἔστωσαν δὲ K καὶ Λ αἱ τομαὶ τῶν AZ, ΓΓ' καὶ BH, ΔΔ', ἀντιστοίχως.

Ἡ εὐθεῖα διαιρέσεως τέμνει τὴν μεγάλην βάσιν καὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ὅταν τὸ σημεῖον P εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας ΓΚZ ἢ τῆς κατὰ κορυφήν της.

Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ τέμνει τὴν μεγάλην βάσιν καὶ τὴν ΑΔ, ὅταν τὸ σημεῖον P εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας ΔΛΗ ἢ τῆς κατὰ κορυφήν της.

(γ) Τέλος, ἡ εὐθεῖα διαιρέσεως τέμνει τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς, ὅταν τὸ σημεῖον P εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας AIH ἢ τῆς κατὰ κορυφήν της.

(δ) Ἔστωσαν P' (P εἰς τὸ σχῆμα) καὶ Σ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν BH, ΓΓ' καὶ AZ, ΔΔ' ἀντιστοίχως.

Διὰ πᾶσαν θέσιν τοῦ Ρ ἐντὸς τοῦ μὴ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΟΚΙΛ, ὑπάρχουν τρεῖς λύσεις· ἐπειδὴ τὸ σημεῖον αὐτὸ θ' ἀνήκῃ εἰς τρεῖς τῶν προηγουμένως θεωρηθεισῶν περιοχῶν.

Διὰ τὰς θέσεις τοῦ Ρ ἐντὸς τοῦ ΟΡ'ΙΣ, ἡ εὐθεῖα δύναται νὰ τέμνῃ τὰς ΓΔ καὶ Γ'Δ' ἢ τὰς ΓΖ καὶ ΑΓ' ἢ τὰς ΔΗ καὶ ΒΔ'.

Διὰ θέσεις τοῦ Ρ ἐντὸς τοῦ τριγώνου Ρ'ΙΚ, ἡ εὐθεῖα τέμνει τὰς ΓΔ καὶ Γ'Δ' ἢ τὰς ΑΗ καὶ ΖΒ ἢ τὰς ΓΖ καὶ ΑΓ'. Ἀνάλογος παρατήρησις διὰ τὸ τρίγωνον ΣΙΛ καὶ τὰ ζεύγη τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ Γ'Δ', ΒΖ καὶ ΑΗ, ΔΗ καὶ Δ'Β.

(ε) Διὰ πᾶν σημεῖον Ρ ἐπὶ τ ς περιμέτρου τοῦ τετραπλεύρου ΟΚΙΛ, ὑπάρχουν δύο λύσεις.

(ζ) Διὰ τὰ σημεῖα Ρ ἐκτὸς τοῦ ΟΚΙΛ, ὑπάρχει μόνον μία λύσις τοῦ προβλήματος.

Παρατήρησις. Ἡ περίμετρος τοῦ τραπεζίου διαιρεῖται εἰς ὀκτὼ τμήματα. Ἡ εὐθεῖα διαιρέσεως συναντᾷ πάντοτε ἀνὰ δύο ἀπέναντι (22).

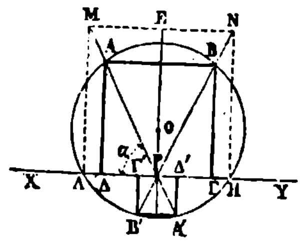
Πρόβλημα

255. Δίδονται περιφέρειαι (Ο) καὶ εὐθεῖα ΧΥ. Νὰ ἀχθῇ χορδὴ τῆς περιφερείας τοιαύτη, ὥστε τὸ τετράγωνον μὲ πλευρὰν αὐτὴν νὰ ἔχῃ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν κειμένην ἐπὶ τῆς ΧΥ.

Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα, ὑποθέτοντες μεταβλητὴν τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας ἀπὸ τῆς εὐθείας ΧΥ.

Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ ἐγγραφῆς σχήματος ὁμοίου πρὸς ἄλλο, δυνάμεθα νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὴν ὁμοιότητα (§ 206).

Ἐπὶ τῆς ΧΥ κατασκευάζομεν τετράγωνον τυχὸν ἀλλὰ τοῦ ὁποίου τὸ μέσον Ρ τῆς πλευρᾶς του νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ Ο καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΡΜ, ΡΝ.



Σχ. 159.

Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνον, ὡς ὅμοιον πρὸς τὸ ΛΗΜΝ.

Ἡ χορδὴ Α'Β' ὁρίζει ἓν δεύτερον τετράγωνον.

Παρατήρησις. Ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΧΥ διάμετρος, νὰ ληφθῇ τὸ κάθετον ἐπὶ τῆς ΧΥ τμῆμα ΗΝ διπλάσιον τοῦ ΗΡ καὶ νὰ ἀχθῇ ἡ ΝΒΡΒ'. Αἱ κάθετοι ΓΒ καὶ Γ'Β' εἶναι αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ Ρ τὴν ΡΝ, σχηματίζουσαν πρὸς τὴν ΧΥ τὴν σταθερὰν γωνίαν α τριγώνου ὀρθογωνίου ΡΗΝ, ἔχοντος μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ΗΝ διπλασίαν τῆς ἄλλης ΡΗ. Ἡ εὐθεῖα ΡΝ ὁρίζει τὰς κορυφὰς Β, Β', ἄρα καὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, Β'Γ' τῶν δύο τετραγώνων.

Διερεύνησις. Ἡ παράλληλος μεταφορὰ τῆς ΧΥ ἀρκεῖ νὰ γίνεται

---

22. Σημ. μετ. Αἱ εὐθεῖαι διαιρέσεως διὰ τὰς περιπτώσεις (α), (β), (γ) εἶναι ἐφαπτόμεναι καταλλήλων ὑπερβολῶν ἐχουσῶν ἀσυμπτώτους τὰς εὐθείας ΒΓ, ΒΑ ἢ ΑΒ, ΑΔ.

πρὸς τὸ ἓν μέρος ὡς πρὸς τὸ κέντρον· ἐπειδὴ συμμετρικαὶ θέσεις τῆς ΧΥ πρὸς τὸ σημεῖον Ο δίδουν συμμετρικὰ σχήματα.

(α) Ἡ ΧΥ διέρχεται ἐκ τοῦ κέντρου (Σχ. 160).

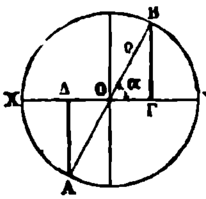
Ὑπάρχουν δύο ἴσαι λύσεις, ΑΔ, ΒΓ· θὰ ἔχωμεν

$$ΟΔ = \frac{ΑΔ}{2},$$

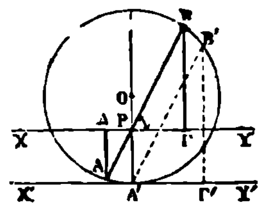
$$ΟΔ^2 + ΑΔ^2 = \frac{ΑΔ^2}{4} + ΑΔ^2 = ρ^2,$$

ἄρα:

$$5(ΑΔ)^2 = 4ρ^2, \quad ΑΔ^2 = \frac{4}{5}ρ^2.$$



Σχ. 160.

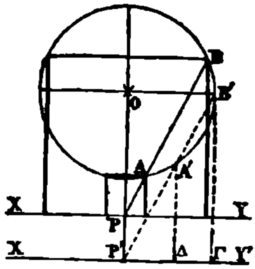


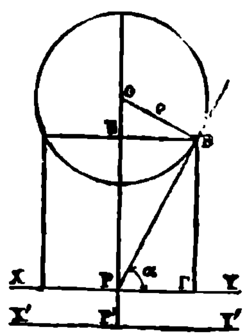
Σχ. 161.

(β) Ἐφ' ὅσον ἡ ΧΥ ἀπομακρύνεται τοῦ κέντρου, λαμβάνομεν δύο ἄνισα τετράγωνα μὲ πλευρὰς ΑΔ, ΒΓ (Σχ. 161).

(γ) Διὰ ΧΥ ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας, ἓν τῶν τετραγώνων ἀφανίζεται καὶ τὸ ἄλλο ἔχει πλευρὰν Β'Γ' (Σχ. 161).

(δ) Δι' ἐξωτερικὰς πρὸς τὴν περιφέρειαν θέσεις τῆς ΧΥ καὶ ἐφ' ὅσον ἡ ΡΑΒ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα, ὑπάρχουν δύο τετράγωνα εὐθέως ὅμοια (Σχ. 162).


Σχ. 162.


Σχ. 163.

(ε) Ὅταν ἡ ΟΡ' γίνῃ ἴση πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ εὐθεῖα Ρ'Β' διέρχεται διὰ τοῦ ἄκρου τῆς ἀκτῖνος ΟΒ', παραλλήλου πρὸς τὴν ΧΥ. Τὸ μῆκος Β'Γ' δίδει τότε τὴν πλευρὰν τοῦ μεγίστου τετραγώνου, μὲ ἐμβαδὸν $4ρ^2$ (Σχ. 162).

(ζ) Ἐφ' ὅσον ἡ XY ἐξακολουθεῖ νὰ ἀπομακρύνεται τοῦ κέντρου, θὰ διέλθῃ διὰ θέσεως κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ PB θὰ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας (O). Αἱ δύο λύσεις συμπίπτουν τότε καὶ ἀπὸ γεωμετρικῆς ἀπόψεως ὑπάρχει ἓν μόνον τετράγωνον.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ, θεωροῦμεν τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα OBE, PBE. Θὰ ἔχωμεν (Σχ. 163).

$$BE = 2.\,OE, \quad \text{ἀφοῦ } B\Gamma = 2.\,\Gamma P,$$

$$BE^2 + OE^2 = BE^2 + \frac{BE^2}{2} = \rho^2, \quad 5\,BE^2 = 4\rho^2, \quad BE^2 = \frac{4}{5}\rho^2.$$

Ἀλλ' ἡ BE εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου· ἄρα

$$B\Gamma^2 = \frac{16}{5}\rho^2,$$

τὸ δὲ τρίγωνον OBP εἶναι ὅμοιον τοῦ BEP, ἐξ' οὗ

$$BP = 2\rho, \quad OP^2 = 5\rho^2.$$

Κατὰ τὴν ἐν λόγῳ θέσιν, ἐπομένως, τῆς XY, θὰ εἶναι

$$OP = \rho\sqrt{5}.$$

(η) Διὰ ἀπόστασιν $OP > \rho\sqrt{5}$, διὰ τὴν θέσιν λ. χ. X'Y' τοῦ σχ. 163, δὲν ὑπάρχουν λύσεις.

Σημείωσις. Θὰ ἦτο χρήσιμος μία σύγκρισις τῆς προηγουμένης *γεωμετρικῆς διερευνήσεως* πρὸς τὴν *ἀλγεβρικὴν* τοῦ αὐτοῦ προβλήματος. (Βλπ. Ex. d'Algèbre, n° 1460).

Πρόβλημα

256. Εἰς τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον δοθείσης περιμέτρου 2 τ.

Κατασκευή. Ὑψοῦμεν κάθετον ΑΖ ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ φέρομεν τὴν παράλληλον ΒΔ.

Γνωρίζομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα διὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΑΔ, λαμβάνοντες

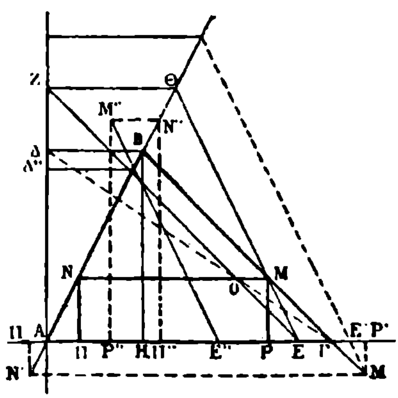
$$AE = AZ = \tau$$

καὶ φέροντες τὴν ΖΕ. Ἐκ τοῦ σημείου Ο γνωρίζομεν τὸ Μ (§ 99, α).

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ φέρωμεν ἁπλῶς τὰς ΘΖ καὶ ΘΕ (§ 191). Θὰ ἔχωμεν:

$$MN + MP = \tau.$$

Ὅταν ἡ περίμετρος μεταβάλλεται, ἡ κατασκευὴ ἀνάγεται εἰς τὴν ἀγωγὴν τῶν (ἐστιγμένων) εὐθειῶν, παραλλήλως τῆς ΘΕ.



Σχ. 164.

1) *Ἔστω ἡ βάσις ΒΓ μεγαλυτέρα τοῦ ὕψους ΒΗ ἢ ΑΔ.*

(α) Ὑποθέσωμεν $\tau > A\Gamma$, λ. χ. $\tau = AE'$.

Ἡ εὐθεῖα E'M', παράλληλος τῆς ΘΕ, τέμνει τὴν πρὸς τὰ κάτω προέκτασιν τῆς ΒΓ.

Τὸ ὕψος M'P' τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς πρὸς τὸ MP καὶ θὰ πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀρνητικόν. Ἔχομεν, πράγματι, εἰς ἀπολύτους τινάς:

$$M'N' - M'P' = AE = \tau.$$

(β) $\tau = A\Gamma$.

Τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι μηδὲν καὶ ἡ ἡμιπερίμετρος ἀνάγεται εἰς τὸ μῆκος ΑΓ.

(γ) $A\Delta < \tau < A\Gamma$.

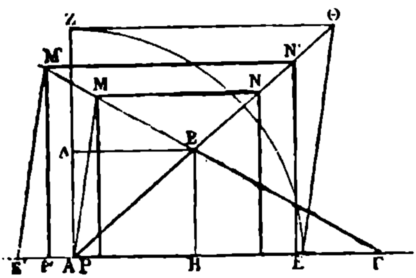
Τὸ σημεῖον Μ λαμβάνεται διὰ τῆς εὐθείας ΘΕ, τεμνούσης τὴν ΒΓ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ. Θὰ ἔχωμεν τότε τὴν κυρίαν λύσιν ΜΝΠΡ καὶ $MN + MP = \tau$.

(δ) $\tau = A\Delta$.

Ἡ ἡμιπερίμετρος ἀνάγεται εἰς τὸ ὕψος ΒΗ καὶ ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι μηδὲν (Σχ. 164).

(ε) $\tau < A\Delta$, ἴση λ. χ. πρὸς $A\Delta'' = AE''$.

Ἡ παράλληλος διὰ τοῦ E'' πρὸς τὴν ΘΕ τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ εἰς M'' (Σχ. 164).



Σχ. 165.

Τὸ σημεῖον M'' εἶναι ἀριστερὰ τοῦ N''. Ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου θὰ πρέπει νὰ θεωρηθῇ ἀρνητική. Ἔχομεν πράγματι, κατ' ἀπολύτους τιμὰς πάλιν:

$$M''P'' - M''N'' = AE'' = \tau.$$

Διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ τ μικροτέραν τοῦ ΑΔ, ἡ παράλληλος τῆς ΘΕ τέμνει τὴν πρὸς τὰ ἄνω προέκτασιν τῆς ΒΓ. Θὰ διακρίνωμεν ἐν τούτοις δύο ἀκόμη περιπτώσεις.

(ζ) Ἔστω $\tau = 0$.

Ἡ διαφορὰ εἶναι μηδὲν καὶ ἡ παράλληλος ΑΜ πρὸς τὴν ΘΕ (Σχ. 165) δίδει ἓν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, ἀφοῦ $MP - MN = 0$.

Ἡ ἐγγραφὴ τοῦ τετραγώνου τούτου γίνεται εὐκόλως διὰ τῆς ὁμοιότητος (§ 206).

(η) Ἔστω $\tau = -\lambda$.

Μεταφέρομεν τὸ μῆκος λ εἰς τὸ AE' (Σχ. 165)· θὰ ἔχωμεν

$$M'P' - M'N' = -\lambda.$$

Ἐν τῇ πραγματικότητι, ἀπὸ γεωμετρικῆς ἀπόψεως, λαμβάνομεν ἁπλῶς ἓν ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ἡ βάσις M'N' ὑπερβαίνει τὸ ὕψος κατὰ τὸ μῆκος λ.

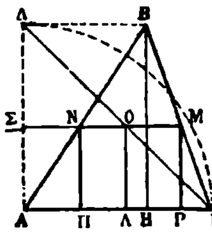
Παρατήρησις. Αἱ περιπτώσεις (α) καὶ (η) ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς λύσεις τοῦ ἑπομένου προβλήματος: Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τρίγωνον ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ὑπερβαίνει τὸ ὕψος κατὰ μῆκος λ.

Ἡ (γ): ἡ περίμετρος νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος.
Ἡ (ε): τὸ ὕψος νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν βάσιν κατὰ μῆκος δοθέν.
Ἡ (ζ) τέλος ἀνάγεται εἰς τὴν ἐγγραφὴν τετραγώνου.

257. 2. *Ἡ βάσις τοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ* (Σχ. 166). Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ γνωρίζομεν ὅτι ΟΣ + ΟΛ = ΑΓ. Δι' οἱονδήποτε σημεῖον Μ τῆς ΒΓ, θὰ ἔχωμεν πάντοτε ΜΝ + ΜΡ = ΑΓ.

Διὰ τὰ σημεῖα Μ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ, θὰ ἔχωμεν διαφορὰν διαστάσεων ἴσην πρὸς ΑΓ (§ 75).

3. *Ἡ βάσις εἶναι μικροτέρα τοῦ ὕψους.* Ἡ διερεύνησις εἶναι ὁμοία τῆς περιπτώσεως 1).



Σχ. 166.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου ὅπως ἐπὶ τῆς ΑΓ, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ τρεῖς, ἐν γένει, λύσεις. Ἐὰν λ. χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ τρεῖς πλευρὰς ἀνίσους καὶ τὸ μῆκος τ ληφθῇ περιεχόμενον μεταξὺ ἐκείνης τῆς πλευρᾶς καὶ τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν μικροτέραν ἀπ' ἀλλήλων διαφοράν, ὑπάρχουν τρία ὀρθογώνια ἐγγεγραμμένα εἰς τὸ τρίγωνον καὶ ἔχοντα ὡς περίμετρον 2 τ.

Εἰς τὸ τυχὸν τρίγωνον ἐγγράφονται τρία τετράγωνα καὶ τὸ *μεγαλύτερον τετράγωνον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μικροτέραν πλευράν.* Βλπ. ἐπίσης §§ 302 καὶ 1635.

Πρόβλημα

Νὰ μελετηθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἑνὸς μεταβλητοῦ σημείου δοθείσης εὐθείας ΧΥ.

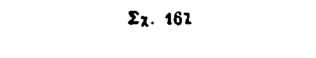
***1η Περίπτωσις.** Τὰ σημεῖα Α καὶ Β εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΧΥ.*

Ὑψοῦμεν κάθετον ΟΓ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΑΒ μέχρι τῆς τομῆς της Δ μετὰ τῆς ΧΥ.

Θὰ μελετήσωμεν τὴν διαφορὰν ΜΑ—ΜΒ διὰ θέσεις τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τῶν τμημάτων ΧΓ, ΓΔ, ΔΥ καὶ ἰδιαιτέρως δι' ἕκαστον τμῆμα.

(α) *Διὰ Μ ≡ Γ, ἡ διαφορὰ εἶναι μηδέν,* ἀφοῦ ΓΑ = ΓΒ.

(β) *Ἀπὸ τοῦ Γ εἰς τὸ Δ, ἡ διαφορὰ αὐξάνει.*



Σχ. 167

Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι:
ΜΑ — ΜΒ < ΝΑ — ΝΒ (Σχ. 167).

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ δύο τῶν πλευρῶν των συναντῶνται, τὸ ἄθροισμα τῶν τεμνομένων πλευρῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων:

$$MA + NB < NA + MB.$$

Ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν αὐτὴν ποσότητα χωρὶς μεταβολὴν τῆς φορᾶς τῆς ἀνισότητος.

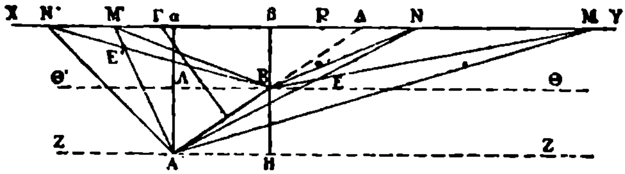
Ὥστε: $MA - MB < NA - NB$.

(γ) Διὰ $M \equiv \Delta$, ἔχομεν: $\Delta A - \Delta B = AB$.

(δ) Ἀπὸ τοῦ Δ εἰς τὸ Υ, *ἡ διαφορὰ ἐλαττοῦται* (Σχ. 168).

Μὲ ὅμοιον τρόπον, ὅπως καὶ προηγουμένως, ἀποδεικνύομεν ὅτι $MA - MB < NA - NB$.

Διὰ Μ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν, δεξιὰ τοῦ Δ, αἱ εὐθεῖαι ΜΑ,



Σχ. 168.

ΜΒ ἀποβαίνουν αἱ παράλληλοι ΖΑ, ΘΒ καὶ ἡ διαφορά των ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν αβ, προβολὴν τῆς ΑΒ ἐπὶ τῆς ΧΥ.

(ε) Ἀπὸ τοῦ Γ εἰς τὸ Χ, ἡ ἀπόστασις Μ'Β ὑπερβαίνει τὴν Μ'Α καὶ ἡ διαφορὰ $M'B - M'A = |M'A - M'B|$ αὐξάνει. Πράγματι,

$$M'B + N'A < N'B + M'A, \quad \text{ἄρα } M'B - M'A < N'B - N'A.$$

Διὰ Μ' εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν, ἀριστερὰ τοῦ Γ, αἱ εὐθεῖαι Μ'Α, Μ'Β ἀποβαίνουν αἱ παράλληλοι Ζ'Α, Θ'Β καὶ ἡ διαφορά των εἶναι πάλιν τὸ μῆκος $AH = \alpha\beta$.

(ζ) Ἂν ὡς τιμὴν τῆς διαφορᾶς λαμβάνωμεν πάντοτε τὴν ποσότητα $M'A - M'B$, θὰ πρέπει νὰ εἴπωμεν ὅτι, ἀπὸ τοῦ Γ εἰς τὸ Χ, ἡ τιμή της εἶναι ἀρνητικὴ καὶ αὐξάνει κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μέχρις ὅτου γίνῃ ἴση πρὸς αβ.

259. Σύνοψις. Κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ σημείου Μ ἀπὸ θέσεως εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀριστερὰ τοῦ Γ μέχρι τοῦ σημείου αὐτοῦ ἡ διαφορὰ εἶναι *ἀρνητικὴ* καὶ ἡ *ἀπόλυτος τιμή της* ἐλαττοῦται ἀπὸ τῆς τιμῆς αβ μέχρι τοῦ μηδενὸς διὰ $M \equiv \Gamma$. Δεξιὰ τῆς θέσεως αὐτῆς καὶ μέχρι τοῦ σημείου Δ, ἡ διαφορὰ καθίσταται θετικὴ καὶ αὐξάνει ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τῆς τιμῆς ΑΒ. Ἀπὸ τῆς θέσεως Δ μέχρι τῆς εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν δεξιὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ, ἡ διαφορὰ παραμένει θετικὴ ἀλλὰ συνεχῶς ἐλαττοῦται μέχρι τῆς τιμῆς αβ.

Κατὰ ταῦτα, ἡ τιμὴ τῆς διαφορᾶς $MA - MB$ αὐξάνει ἀπὸ $-\alpha\beta$ ἕως 0 καὶ ἀπὸ 0 ἕως ΑΒ καὶ κατόπιν ἐλαττοῦται μέχρι αβ.

Παρατήρησις. 1) Ἀπὸ τοῦ Γ ἕως Δ ἡ τιμὴ τῆς διαφορᾶς μεταβαίνει ἀπὸ τοῦ μηδενὸς εἰς τὴν τιμὴν ΑΒ (Σχ. 168)· ὑπάρχει ἑπομένως θέσις Ρ τοῦ Μ διὰ τὴν ὁποίαν γίνεται αὕτη ἴση πρὸς αβ ([23]).

---

23. Σημ. μετ. Ὡς ἐκ τῆς συνεχείας τῆς συναρτήσεως $MA - MB = \Phi(M)$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha\beta < AB$.

2) Θεωροῦντες μόνον τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῆς διαφορᾶς, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν:

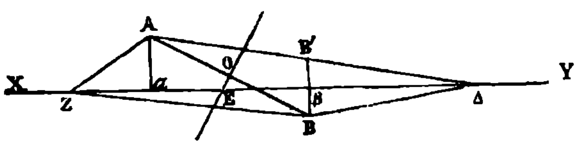
Μεταξὺ Χ ($\rightarrow \infty$) καὶ Ρ, ὑπάρχουν δύο θέσεις καὶ δύο μόνον, διὰ τὰς ὁποίας ἡ διαφορὰ δύναται νὰ λάβῃ τυχοῦσαν τιμὴν μεταξὺ 0 καὶ αβ.

Μεταξὺ Ρ καὶ Υ ($\rightarrow \infty$), ὑπάρχουν δύο θέσεις καὶ δύο μόνον, διὰ τὰς ὁποίας ἡ διαφορὰ δύναται νὰ λάβῃ τυχοῦσαν τιμὴν μεταξὺ αβ καὶ ΑΒ.

Ἑπομένως, *μεταξὺ* (Χ $\rightarrow \infty$) *καὶ* Υ ($\rightarrow \infty$), *ὑπάρχουν δύο θέσεις καὶ δύο μόνον, διὰ τὰς ὁποίας ἡ διαφορὰ δύναται νὰ λάβῃ δοθεῖσαν τιμὴν μεταξὺ 0 καὶ ΑΒ.*

Εἰδικὴ περίπτωσις. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΧΥ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ προβολὴ αβ = ΑΒ. Ἀπὸ τῆς θέσεως Γ, ἑπομένως, καὶ εἴτε πρὸς τὰ δεξιὰ εἴτε πρὸς τ' ἀριστερὰ αὐτῆς, ἡ τιμὴ τῆς διαφορᾶς θ' αὐξάνῃ ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι ΑΒ.

2α Περίπτωσις. *Τὰ σημεῖα Α καὶ Β εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ΧΥ* (Σχ. 169).



Σχ. 169.

Ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, θεωροῦντες τὸ συμμετρικὸν Β' τοῦ σημείου Β πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΧΥ.

(η) Εἰς τὸ σημεῖον Δ, τὸ τοιοῦτον, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΧΥ νὰ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΔΒ, ἀντιστοιχεῖ ἡ μεγίστη διαφορὰ ΑΒ'.

(θ) Ἀπὸ τοῦ Δ μέχρι Υ ($\rightarrow \infty$), ἡ διαφορὰ ἐλαττοῦται μέχρι τῆς τιμῆς τῆς προβολῆς αβ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΧΥ.

(ι) Εἰς τὴν τομὴν Ε τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ τῆς ΧΥ, ἡ τιμὴ τῆς διαφορᾶς μηδενίζεται (Σχ. 169).

(κ) Ἀπὸ τοῦ Δ μέχρι τοῦ Ε, ἡ διαφορὰ ἐλαττοῦται ἀπὸ τῆς μεγίστης αὐτῆς τιμῆς ΑΒ' μέχρι τοῦ μηδενός.

(λ) Ἀπὸ τοῦ Ε μέχρι Χ ($\rightarrow \infty$), ἡ διαφορὰ ΖΑ — ΖΒ εἶναι ἀρνητική. Θεωροῦντες πάλιν τὴν ἀπόλυτον αὐτῆς τιμήν, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι, πέραν τῆς θέσεως Ε, ἡ διαφορὰ αὐξάνει μέχρι τῆς ὁριακῆς αὐτῆς τιμῆς αβ, προβολῆς τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΧΥ.

260. ***Ἐφαρμογή.*** Γνωρίζομεν ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων εἶναι σταθερά, εἶναι μία *ὑπερβολή*.

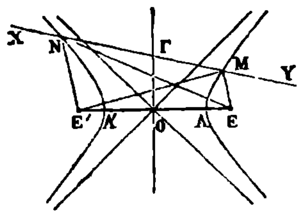
Ἔστωσαν Ε, Ε' τὰ σταθερὰ σημεῖα (Σχ. 170), 2α = ΑΑ' < ΕΕ' ἡ σταθερὰ διαφορά.

1) Ἡ *ὑπερβολὴ εἶναι κυρτὴ καμπύλη,* ἐπειδὴ τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνει αὐτὴν εἰς δύο τὸ πολὺ σημεῖα. Πράγματι, κατὰ τὴν § 259, *Παρατήρησις 2α,* δὲν ὑπάρχουν ἐπ' αὐτῆς τῆς εὐθείας παρὰ μόνον δύο, τὸ

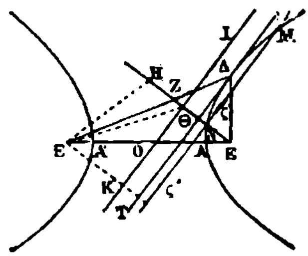
πολύ, σημεῖα τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ Ε καὶ Ε΄ νὰ εἶναι 2α.

2) Πᾶσα εὐθεῖα ΧΥ, ἥτις ἀφίνει τὰ Ε καὶ Ε΄ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της, τέμνει τὴν καμπύλην εἰς δύο σημεῖα· ἐπειδὴ ὑπάρχουν δύο σημεῖα ἐπ' αὐτῆς Μ, Ν διὰ τὰ ὁποῖα αἱ διαφοραὶ ΜΕ΄— ΜΕ καὶ ΝΕ΄— ΝΕ ἔχουν τὰς αὐτὰς ἀπολύτως ἀλλ' ἀντιθέτους τιμὰς (§ 258, ζ).

3) *Μία εὐθεῖα, διερχομένη μεταξὺ τῶν σημείων Ε καὶ Ε΄, δύναται νὰ τέμνῃ τὴν ὑπερβολὴν εἰς δύο σημεῖα νὰ ἐφάπτεται αὐτῆς ἢ καὶ νὰ μὴ τὴν συναντᾷ.*



Σχ. 170.



Σχ. 171.

Ἔστω ΜΝ (Σχ. 171) μία τοιαύτη εὐθεῖα. Θεωρήσωμεν τὸ συμμετρικὸν Θ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΝ καὶ τὰς προβολὰς ζ, ζ΄ τῶν ἑστιῶν Ε, Ε΄ ἐπὶ τῆς ἰδίας εὐθείας.

Ὅταν τὸ μῆκος ΑΑ΄ ἢ 2α περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ζζ΄ καὶ Ε΄Θ, ὑπάρχουν δύο σημεῖα τομῆς, ἀνήκοντα εἰς τὸν αὐτὸν κλάδον τῆς καμπύλης.

Ἐπὶ πάσης παραλλήλου πρὸς τὴν ΜΝ, ἡ προβολὴ τοῦ τμήματος ΕΕ΄ εἶναι πάντοτε ἴση πρὸς ζζ΄. Ἔστω Ζ τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου Ε πρὸς εὐθεῖαν ΔΤ, παράλληλον τῆς ΜΝ. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΔΤ εἶναι τοιαύτη, ὥστε νὰ ἔχωμεν Ε΄Ζ = 2α, τότε τὰ δύο σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας καὶ τῆς καμπύλης συμπίπτουν εἰς ἓν καὶ αἱ δύο γραμμαὶ ἐφάπτονται.

Ἡ εὐθεῖα, τέλος, ΙΚ, παράλληλος πρὸς τὴν ΜΝ καὶ διὰ τὴν ὁποίαν τὸ συμμετρικὸν Η τῆς ἑστίας Ζ πρὸς αὐτὴν ἔχει ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ἄλλης ἑστίας

$$ΗΕ' < 2α,$$

δὲν ἔχει κοινὰ σημεῖα μετὰ τῆς καμπύλης.

4) *Ἔστω εὐθεῖα ΟΔ (Σχ.172) διερχομένη διὰ τοῦ μέσου Ο τοῦ τμήματος ΕΕ΄. Ἐὰν ἡ προβολὴ ΔΔ΄ τοῦ τμήματος τούτου ἐπ' αὐτὴν εἶναι ἴση πρὸς τὸ μῆκος 2α, ἡ εὐθεῖα συναντᾷ τὴν καμπύλην εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Ο.*

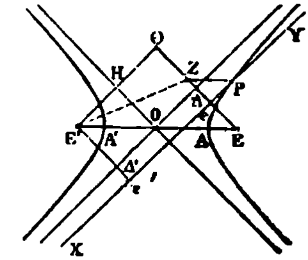
Πράγματι, διὰ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, αἱ ἀποστάσεις ἑνὸς σημείου της Ο ἀπὸ τῶν Ε καὶ Ε΄, ἀρχικῶς ἴσαι, ἔχουν διαφορὰν αὐξανομένην, ἐφ' ὅσον τὸ σημεῖον ἀπομακρύνεται τοῦ Ο κατὰ τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην φορὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας. Γίνεται δὲ ἡ διαφορὰ αὕτη ἴση πρὸς τὸ μῆκος ΔΔ΄ διὰ τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Ο.

Αἱ εὐθεῖαι ΟΔ, ΟΗ, συμμετρικαὶ ἀλλήλων πρὸς τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΕ΄ εἰς τὸ μέσον της Ο, *εἶναι αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς καμπύλης*. Αὐ

νάμεθα νὰ τὰς θεωρήσωμεν ὡς ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης, τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα ἐπαφῆς εὑρίσκονται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Ο. Ἐπειδή, ἂν Θ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ε πρὸς μίαν τῶν εὐθειῶν αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν

$$ΘΕ' = ΔΔ' = 2α \quad (3)$$

5) *Πᾶσα εὐθεῖα ΧΥ, μὴ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ προβολὴ εε' τοῦ τμήματος ΕΕ' εἶναι ἴση πρὸς 2α, τέμνει τὴν καμπύλην εἰς ἓν μόνον σημεῖον.*



Σχ. 172.

Ἔστω πράγματι $2α = εε' = Ε'Θ$. Τὰ σημεῖα Θ καὶ Ζ εἶναι διάφορα ἀλλήλων, ἀφοῦ εἶναι τὰ συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ε πρὸς τὰς δύο παραλλήλους εὐθείας ΟΔ καὶ ΧΥ. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

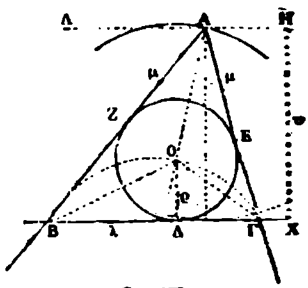
$$Ε'Ζ > ΘΕ' = ΔΔ' = 2α,$$

καὶ ἑπομένως, κατὰ τὴν *Παρατήρησιν 1*, τῆς § 259 θὰ ὑπάρχῃ ἓν καὶ μόνον σημεῖον Ρ ἐπὶ τῆς ΧΥ καὶ εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν τοιοῦτον, ὥστε

$$ΡΕ' - ΡΕ = εε' = 2α.$$

261. Μολονότι ἡ εὐθεῖα ΧΥ ἔχει ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς καμπύλης, δὲν εἶναι ἐφαπτομένη αὐτῆς. Ἐπειδή, ἐκ τῆς φύσεως τῶν μεταβολῶν τῆς διαφορᾶς, εὐκόλως ἀναγνωρίζομεν ὅτι τὸ σημεῖον Ρ δὲν προκύπτει ἐκ τῆς συμπτώσεως δύο κοινῶν σημείων τῆς καμπύλης καὶ τῆς εὐθείας ΧΥ (§ 259, Παρ. 1). *Δύναται*, οὕτω, *μία εὐθεῖα νὰ ἔχῃ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον (εἰς τὸ πεπερασμένον) μετὰ κυρτῆς καὶ μὴ κλειστῆς καμπύλης χωρὶς κατ' ἀνάγκην νὰ εἶναι ἐφαπτομένη αὐτῆς.*

Σημείωσις. Ἡ ὡραία αὕτη σπουδὴ ὀφείλεται εἰς τὸν Régis Pialat. († 1894).



Σχ. 173

Οἱ διάφοροι τρόποι κατὰ τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἓν πρόβλημα.

262. Ἡ ἐκφώνησις ἑνὸς ὡρισμένου προβλήματος δύναται νὰ λάβῃ διαφόρους μορφάς, ἀναλόγως δὲ ἑκάστης ἡ εὕρεσις τῆς λύσεως αὐτοῦ ἀποβαίνει, πολλάκις, δυσκολωτέρα ἢ εὐκολωτέρα.

Διὰ τὸν λόγον αὐτόν, ὠφέλιμος ἐνίοτε ἀποδεικνύεται ἡ μετατροπὴ τῆς ἐκφωνήσεως ἑνὸς δοθέντος προβλήματος, ὥστε νὰ καθίσταται, ἐνδεχομένως, ἡ εὕρεσις τῆς λύσεώς του μᾶλλον ἄμεσος ἢ ὀλιγώτερον κοπιώδης. Ἰδοὺ ἓν παράδειγμα.

1) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεως ΒΓ, τῆς γωνίας εἰς τὴν κορυφὴν Α καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

2) Δίδονται περιφέρεια ἀκτῖνος ρ καὶ δύο ἐφαπτόμεναι ΑΒ, ΑΓ αὐτῆς. Νὰ ἀχθῇ τρίτη ἐφαπτομένη ΔΧ, ὥστε τὸ τμῆμα ΒΓ, τὸ ὁριζόμενον ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν δύο πρώτων, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

3) Αἱ πλευραὶ μιᾶς σταθερᾶς γωνίας Α ἐφάπτονται δοθείσης περιφερείας ἀκτῖνος ρ. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ θέσις τῆς γωνίας αὐτῆς, ὥστε αἱ πλευραί της νὰ ἀποτέμνουν ἐπὶ σταθερᾶς ἐφαπτομένης ΔΧ τμῆμα ΒΓ δοθέντος μήκους λ;

Ὅπως εἶναι φανερόν, καὶ αἱ τρεῖς ἀνωτέρω ἐκφωνήσεις θέτουν τὸ ἴδιον πρόβλημα· ποικίλλει ὅμως ἡ εὐκολία τῆς λύσεως πρὸς τὴν ὁποίαν ὁδηγεῖ ἑκάστη.

1η Λύσις. Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον. Ἡ γωνία ΒΟΓ εἶναι ἴση πρὸς $A + \frac{B+\Gamma}{2} = A + \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ + \frac{A}{2}$ καὶ τὸ πρόβλημα συνίσταται εἰς τὴν κατασκευὴν τριγώνου ΒΟΓ, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὰ ἡ βάσις ΒΓ, ἡ γωνία εἰς τὴν κορυφὴν ΒΟΓ καὶ τὸ ὕψος ρ.

2α Λύσις. Ἔστωσαν Ε, Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων ΑΓ, ΑΒ. Τὸ μῆκος $AE = \mu$ δύναται νὰ θεωρηθῇ γνωστόν, ἐφ' ὅσον ἐδόθησαν ἡ γωνία Α καὶ ἡ ἀκτὶς ρ. Ἡ περίμετρος 2τ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma = 2(\mu + \lambda)$, ἐπειδὴ $BZ + \Gamma E = \lambda$, ἡ δὲ ἐπιφάνειά του ἴση πρὸς $\tau\rho = (\mu + \lambda)\,\rho = E$. Ἀλλὰ ἡ ἐπιφάνεια Ε ἰσοῦται ἐπίσης πρὸς $\frac{\lambda \upsilon}{2}$· ἄρα $\upsilon = \frac{2\rho(\mu + \lambda)}{\lambda}$ καὶ τὸ μῆκος τοῦτο κατασκευάζεται εὐκόλως, ὡς τετάρτη ἀνάλογος γνωστῶν μηκῶν.

Τὸ πρόβλημα οὕτω ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν τριγώνου ἐκ τῆς βάσεως ΒΓ, τοῦ ὕψους ἐπ' αὐτὴν καὶ τῆς γωνίας Α.

3η Λύσις. Κατασκευάζομεν τὸ μῆκος $\upsilon = \frac{2\rho(\mu + \lambda)}{\lambda}$ καὶ φέρομεν παράλληλον ΗΛ πρὸς τὴν σταθερὰν ἐφαπτομένην ΔΧ εἰς ἀπόστασιν υ ἀπ' αὐτῆς. Ἡ τομὴ τῆς εὐθείας αὐτῆς καὶ τῆς περιφερείας μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα τὸ μῆκος ΟΑ, εἶναι ἡ ζητουμένη θέσις τῆς κορυφῆς Α.

§ II. Ἡ μέθοδος τῆς ἐπεκτάσεως

263. Ἡ μέθοδος τῆς *ἐπεκτάσεως* συνίσταται εἰς τὴν ἐπέκτασιν ἰδιοτήτων ἑνὸς σχήματος εἰς ἓν ἄλλο τοῦ αὐτοῦ ἢ παρομοίου ([23]) εἴδους, ἀλλὰ τοῦ ὁποίου τὸ πρῶτον σχῆμα εἶναι μία εἰδικὴ περίπτωσις.

Ἐπίσης, καὶ ἰδιαιτέρως, ἡ μετάβασις ἀπὸ ἰδιοτήτων ἑνὸς ἐπιπέδου σχήματος εἰς ἰδιότητας ἑνὸς σχήματος τοῦ χώρου παρουσιάζοντος ὡρισμένας ἀναλογίας πρὸς τὸ πρῶτον.

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν δύο περιπτώσεις:

1) *Μετάβασις ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου σχήματος εἰς ἓν ἄλλο ἐπίσης ἐπίπεδον καὶ γενικώτερον τοῦ πρώτου.* Ὡς λ.χ., ἡ ἐπέκτασις τοῦ θεωρήματος τοῦ Μενελάου διὰ τὸ τρίγωνον εἰς ἓν τυχὸν ἐπίπεδον πολύγωνον (§§ 180, 181).

---

23. Σημ. μετ. Θεωρουμένης τῆς ὁμοιότητος αὐτῆς πολλάκις εὗρεῖαν καὶ προσωπικὴν ἀκόμη τοῦ ἐρευνῶντος ἔννοιαν.

2) *Μετάβασις ἀπὸ ἐπιπέδου σχήματος εἰς σχῆμα τοῦ χώρου*, ὡς ἡ ἐπέκτασις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος εἰς ἓν στρεβλὸν πολύγωνον (§ 181, α).

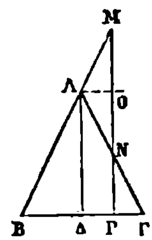
264. *Χρῆσις τῆς μεθόδου*. Ἡ ἐπέκτασις εἶναι μέθοδος λίαν γόνιμος πρὸς ἀνεύρεσιν ἐκ διαισθήσεως νέων θεωρημάτων. Ἀπαιτεῖται, ἐν τούτοις, ποιά τις ὀξύνοια τοῦ ἐρευνητοῦ καὶ μεγάλη πεῖρα διὰ τὴν γενίκευσιν ἐπὶ μέρους ἰδιοτήτων καὶ τὴν ἀπόδειξιν ἀκολούθως τῶν ὑποθέσεών του.

265. Ἡ *ἀναγωγὴ* [ἡ *εἰδίκευσις*] εἶναι ἀντίθετος τῆς *ἐπεκτάσεως* καὶ συνίσταται εἰς τὴν θεώρησιν ἑνὸς θεωρήματος, προβλήματος κλπ. ὡς εἰδικῆς περιπτώσεως ἑνὸς ἄλλου γενικωτέρου.

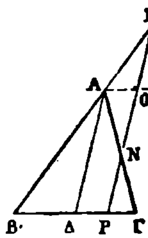
Ἰδοὺ μερικὰ παραδείγματα *ἐπεκτάσεως*.

Πρόβλημα

266. **Ἐπὶ τὴν βάσιν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ εἰς τυχὸν αὐτῆς σημεῖον Ρ ὑψοῦμεν κάθετον ΡΝΜ, τέμνουσαν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς τὰ Μ, Ν. Ὡς γνωστόν, τὸ ἄθροισμα ΡΜ + ΡΝ εἶναι σταθερόν. Ποίαν μορφὴν λαμβάνει τὸ θεώρημα αὐτὸ προκειμένου περὶ τυχόντος τριγώνου;**



Σχ. 174.



Σχ. 175.

Διὰ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, συμβαίνει (Σχ. 174):

$$ΡΜ + ΡΝ = 2.ΡΟ = 2.ΑΔ.$$

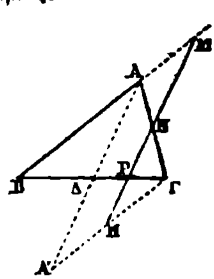
Διὰ τυχὸν τρίγωνον (Σχ. 175), θὰ πρέπει ἡ εὐθεῖα ΡΝΜ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμεσον ΑΔ. Ἐπειδή, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων τοῦ σχήματος ἔχομεν ἀμέσως:

$$\frac{ΡΝ}{ΔΑ} = \frac{ΓΡ}{ΓΔ} = \frac{2.ΓΡ}{α}, \quad \frac{ΡΜ}{ΔΑ} = \frac{ΒΡ}{ΒΔ} = \frac{2.ΒΡ}{α},$$

$$ΡΝ + ΡΜ = 2ΑΔ = \text{σταθερὸν μῆκος}.$$

Οὕτω λαμβάνομεν τὸ ἑπόμενον:

Θεώρημα



Σχ. 176.

Ἐὰν διὰ τυχόντος σημείου Ρ τῆς βάσεως τριγώνου ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ἐπ' αὐτὴν διάμεσον, τέμνουσα τὰς ἄλλας πλευρὰς εἰς Μ καὶ Ν, τὸ ἄθροισμα ΡΜ+ΡΝ θὰ εἶναι σταθερόν.

Ἄλλη ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν ΓΗΑ', παράλληλον τῆς ΑΒ καὶ μέχρι τῆς συναντήσεώς της Α' μετὰ τῆς διαμέσου ΑΔ, καθὼς καὶ τὴν ΝΡΗ.

Θὰ ἔχωμεν:

ΡΝ=ΡΗ, ΡΜ+ΡΝ=ΜΗ=ΑΑ'=2ΑΔ=σταθερὰ ποσότης.

267. *Ἀντιστρόφως*, ἐὰν ἡ ἀπ' εὐθείας ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ μᾶς παρουσίαζε δυσκολίας, θὰ ἦτο δυνατόν, ἐκ τῆς

ἀποδείξεως τῆς προτάσεως διὰ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, νὰ ὁδηγούμεθα εἰς τὴν κατ' ἀναλογίαν ἀπόδειξιν αὐτῆς διὰ τὸ τυχὸν τρίγωνον.

Πρόβλημα

268 Νὰ γενικευθῇ τὸ γνωστὸν θεώρημα: Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐκ τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς εἶναι σταθερόν.

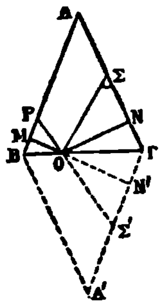
1η *Ἐπέκτασις*. Διὰ τῆς συμμετρίας ἢ διπλασιασμοῦ ὁδηγούμεθα ἀμέσως εἰς τὴν ἑπομένην γενίκευσιν.

Ἐκ τυχόντος σημείου Ο τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου φέρομεν εὐθείας ΟΡ, ΟΣ, συναντώσας τὰς ἴσας πλευρὰς ὑπὸ τὴν αὐτὴν σταθερὰν γωνίαν. Τὸ ἄθροισμα ΟΡ + ΟΣ εἶναι σταθερόν.

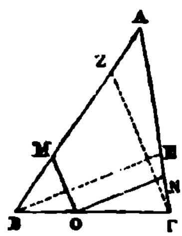
Πράγματι, ΟΡ + ΟΣ = ΟΡ + ΟΣ' = ΡΣ' καὶ τὸ τμῆμα αὐτὸ εἶναι ὡρισμένου μήκους, ὡς περιεχόμενον μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΑΒ, Α'Γ καὶ τέμνον αὐτὰς ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν.

Πόρισμα. Αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς ἴσας πλευρὰς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, αἱ ἀγόμεναι ἐκ τυχόντος σημείου τῆς βάσεως, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

Εἰς τὴν εἰδικὴν αὐτὴν περίπτωσιν τὸ ἄθροισμα εἶναι ΑΓ = ΑΒ (§ 19).



Σχ. 177.



Σχ. 178.

269. 2α *Ἐπέκτασις*. Ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν ἰδιότητα ἀνάλογον εἰς τὸ σκαληνὸν τρίγωνον, δηλ. καταλλήλους διευθύνσεις τῶν εὐθειῶν ΟΜ, ΟΝ (Σχ. 178), ὥστε τὸ ἄθροισμα ΟΜ + ΟΝ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν μῆκος λ.

Πρὸς τοῦτο βοηθούμεθα ὑπὸ τοῦ γνωστοῦ ἤδη προβλήματος τῆς § 44. Ἐὰν λάβωμεν ΒΕ = ΓΖ = λ καὶ φέρωμεν παραλλήλους ΟΜ, ΟΝ πρὸς τὰς εὐθείας ΒΕ, ΓΖ, θὰ ἔχωμεν

$$ΟΜ + ΟΝ = λ.$$

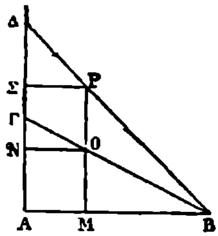
270. 3η *Ἐπέκτασις*. Ἂς ἀναχωρήσωμεν ἀπὸ τοῦ πορίσματος τῆς § 268 καὶ ἂς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὰς ἓν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, ΑΒ = 2ΑΓ (Σχ. 179).

Ἐὰν λάβωμεν ΑΔ = ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΒΑΔ θὰ εἶναι ἰσο-

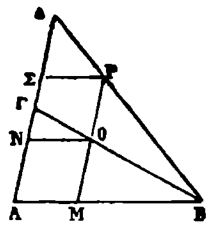
σκελὲς καὶ τὸ ἄθροισμα ΡΜ + ΡΣ σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς ΑΒ = 2ΑΓ. Ἀλλ' εἶναι ΡΜ = 2ΜΟ καὶ ΡΣ = ΟΝ· ἑπομένως, 2ΜΟ + ΟΝ = ΑΒ ἢ

$$ΟΜ + \frac{1}{2}ΟΝ = \frac{ΑΒ}{2} = ΑΓ.$$

Γράφοντες x καὶ y ἀντὶ ΟΜ καὶ ΟΝ καὶ γενικεύοντες, ἀγόμεθα εἰς τὸ ἑπόμενον θεώρημα (Σχ. 180).



Σχ. 179.



Σχ. 180

271. ***Θεώρημα.*** Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, αἱ παράλληλοι x, y πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ἀγόμεναι ἐκ τυχόντος σημείου τῆς ΒΓ καὶ περατούμεναι εἰς τὰς πλευρὰς αὐτάς, πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ ἀριθμοὺς ἀναλόγους τῶν μηκῶν τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

Δηλ. ἂν $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{\mu}{\nu}$, θὰ εἶναι

$$\nu x + \mu y = σταθ.$$

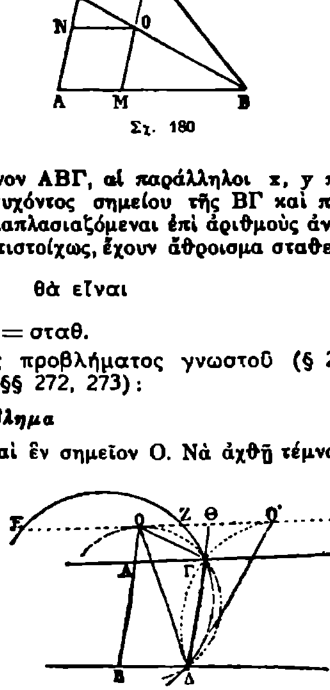
Ἐφαρμογή. Ἡ ἐπέκτασις ἑνὸς προβλήματος γνωστοῦ (§ 216), μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὰ δύο ἑπόμενα (§§ 272, 273):

Πρόβλημα

272. Δίδονται δύο παράλληλοι καὶ ἓν σημεῖον Ο. Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΓΔ, παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν ΑΒ, εἰς τρόπον, ὥστε ἡ γωνία ΓΟΔ νὰ εἶναι ἡ μεγίστη.

Θεωρήσωμεν τὸ ἀντίθετον πρόβλημα :

Δοθείσης τῆς εὐθείας ΓΔ, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ Ο παραλλήλου (ε) πρὸς τὰς δοθείσας, σημεῖον ἀπὸ τοῦ ὁποίου τὸ τμῆμα ΓΔ νὰ φαίνεται ὑπὸ τὴν μεγίστην γωνίαν.



Σχ. 181.

Τοῦτο εἶναι τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο ἐκ τῶν δύο σημείων Ο, Ο' ἐπαφῆς μετὰ τῆς (ε) τῶν περιφερειῶν τῶν διερχομένων διὰ τῶν Γ, Δ καὶ ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας αὐτῆς.

Πράγματι, ὅταν ἓν σημεῖον Μ κινεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) καὶ ἀπὸ τῆς θέσεως Ε λ. χ. πρὸς τὰ δεξιά, ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας ΓΜΔ συνεχῶς ἐλαττοῦται καὶ γίνεται ἐλαχίστη, ἄρα ἡ γωνία ΓΜΔ μεγίστη, εἰς τὴν θέσιν Μ ≡ Ο. Ἀπὸ τοῦ Ο μέχρι τοῦ Θ ἡ γωνία

αὐτὴ ἐλαττοῦται καὶ γίνεται μηδὲν διὰ $M \equiv \Theta$ καὶ κατόπιν αὐξάνει πάλιν μέχρι τῆς θέσεως $M = O'$, ὁπότε λαμβάνει τὴν δευτέραν μεγίστην τιμήν της. Ἀπὸ τῆς θέσεως O' καὶ πέραν, ἡ γωνία ἐλαττοῦται συνεχῶς μέχρι μηδενισμοῦ διὰ $O'M \to \infty$.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς γωνίας ΓΟΔ, ἐπιλύομεν (τριγωνομετρικῶς) τὰ τρίγωνα ΟΘΓ, ΟΔΘ, τῶν ὁποίων γνωρίζομεν δύο πλευρὰς καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν Θ, καὶ κατόπιν τὸ τρίγωνον ΓΟΔ, τοῦ ὁποίου θὰ εἶναι γνωσταὶ τότε καὶ αἱ τρεῖς πλευραί.

273. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἀλλ' ὅπου *αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ἀντικατεστάθησαν ὑπὸ δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν.*

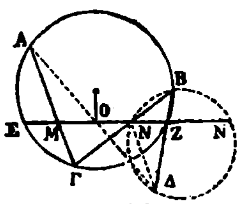
1. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ κέντρου, ἤ
2. Τέμνει τὴν μίαν τῶν περιφερειῶν ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν.

Θεωροῦντες πάλιν τὸ ἀντίθετον πρόβλημα, εὐκόλως ἀναγνωρίζομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΔ ὁρίζεται κατὰ θέσιν καὶ ὅτι τὸ σημεῖον Ο εὑρίσκεται ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου πρὸς τὰς δοθείσας.

Παρατήρησις. Ἕνεκα τοῦ πλήθους τῶν ἐνδιαφερουσῶν περιπτώσεων τὰς ὁποίας παρουσιάζει τὸ δεύτερον πρόβλημα, θὰ ἀναπτύξωμεν αὐτὸ εὐρύτερον εἰς τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τῶν *μεγίστων καὶ ἐλαχίστων* (§ 341).

Πρόβλημα

274. Γενίκευσις τοῦ προβλήματος τῆς § 102: Δίδονται περιφέρεια (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α, Β ἐπ' αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας τρίτον σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε αἱ χορδαὶ ΓΑ, ΓΒ νὰ ἀποτέμνουν ἐπὶ δοθείσης διαμέτρου ΕΖ τμῆμα ΜΝ ἔχον ὡς μέσον τὸ κέντρον τῆς περιφερείας.



Σχ. 182.

1. Ἂς ἀντικαταστήσωμεν τὴν σταθερὰν διάμετρον καὶ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας διὰ τυχούσης σταθερᾶς χορδῆς ΕΖ καὶ τοῦ μέσου της Ο.

Ἐργαζόμενοι κατ' ἀναλογίαν καταλήγομεν ἀμέσως εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν:

Προεκτείνομεν τὸ τμῆμα ΑΟ εἰς ἴσον μῆκος ΟΔ καὶ γράφομεν τὸ τόξον (Β, Δ, φ), ὅπου $\varphi = 180^\circ - \widehat{A\Gamma B}$. Ἂν Ν τὸ κοινὸν σημεῖον τοῦ τόξου τούτου καὶ τῆς δοθείσης χορδῆς, ἡ εὐθεῖα ΒΝ τέμνει τὴν περιφέρειαν (Ο) εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον Γ. Ἐπειδὴ ἡ ΔΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΜ, κλπ.

275. ***Πρόβλημα.*** Περαιτέρω ἐπέκτασις: Νὰ ὁρισθῇ τὸ σημεῖον Γ εἰς τρόπον, ὥστε τὰ τμήματα ΟΜ, ΟΝ ἐπὶ τῆς χορδῆς ΕΖ νὰ ἔχουν λόγον δοθέντα $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἀρκεῖ τὸ τμῆμα ΟΑ, τῆς προηγουμένης κατασκευῆς, νὰ ἔχῃ πρὸς τὸ ΟΔ λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.

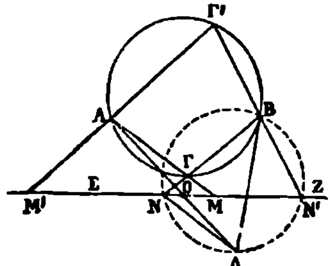
Παρατήρησις. Προσεκτικὴ μελέτη τῶν προηγουμένων προβλημάτων ἀφίνει νὰ διαφανῇ ἡ δυνατότης λύσεως τοῦ προβλήματος καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ χορδὴ καὶ τὸ μέσον της ἔχουν ἀντικατασταθῇ διὰ τυχούσης εὐθείας καὶ σημείου ἐπ' αὐτῆς. Οὕτω φθάνομεν εἰς τὸ πολὺ γενικώτερον πρόβλημα:

Πρόβλημα

276. Δίδονται περιφέρεια, δύο σημεῖα Α, Β αὐτῆς, τυχοῦσα εὐθεῖα καὶ σταθερὸν σημεῖον Ο ἐπὶ τῆς εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε αἱ χορδαὶ ΓΑ καὶ ΓΒ νὰ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς εὐθείας τμῆμα ΜΝ, διαιρούμενον ὑπὸ τοῦ σημείου Ο εἰς δύο ἄλλα τμήματα ἔχοντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.

Ὑποθέσωμεν, κατ' ἀνάλυσιν, $\frac{OM}{ON} = \frac{\mu}{\nu}$. Ἔστω Δ ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ΑΟ καὶ τῆς ἐκ τοῦ Ν παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΓ· ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ἔχομεν

$$\frac{AO}{O\Delta} = \frac{OM}{ON} = \frac{\mu}{\nu}.$$



Σχ. 183.

Ἀφ' ἑτέρου, ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΜ καὶ ΝΔ, ἡ γωνία ΒΝΔ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς Γ· ἡ δὲ τελευταία αὕτη εἶναι γνωστή, ὡς μετρουμένη ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ τόξου ΑΓ'Β. Ὁδηγούμεθα οὕτω εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν: Ἐπὶ τῆς ΑΟ λαμβάνομεν τμῆμα ΟΔ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{AO}{O\Delta} = \frac{\mu}{\nu}$ καὶ ἐπὶ τῆς ΒΔ γράφομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν παραπληρωματικὴν τῆς Γ.

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ σημεῖον Ν' δίδει δευτέραν λύσιν Γ'. Φέροντες πράγματι τὰς Γ'ΑΜ' καὶ Γ'ΒΝ', θὰ ἔχωμεν

$$\frac{OM'}{ON'} = \frac{\mu}{\nu}.$$

2) Θὰ ἠδυνάμεθα ἐπίσης νὰ ὁρίσωμεν τὸ σημεῖον Γ, ὥστε τὸ τμῆμα ΜΝ νὰ εἶχεν δοθὲν μῆκος λ. Ἡ ἐργασία θὰ ἦτο ἀνάλογος τῆς εἰς τὴν § 101 γενομένης.

Ἐπέκτασις εἰς σχήματα τοῦ χώρου

277. Ἐπέκτασις τοῦ θεωρήματος τοῦ σχετικοῦ πρὸς τὴν κάθετον εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου (§ 266).

Θὰ ἀναφέρωμεν τὰ θεωρήματα μόνον εἰς τὰ ὁποῖα ἀγόμεθα.

Θεώρημα. Εἰς τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς βάσεως κανονικῆς πυραμίδος ὑψοῦμεν κάθετον συναντῶσαν τὰ ἐπίπεδα τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της εἰς τὰ σημεῖα Μ, Ν, ... Κ, Λ. Τὸ ἄθροισμα ΡΜ + ΡΝ + ... + ΡΚ + ΡΛ εἶναι σταθερόν.

Ἐὰν ἡ βάσις ἔχῃ ν πλευράς, τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ ν - πλάσιον τοῦ ὕψους τῆς πυραμίδος.

Ἐὰν ἡ πυραμὶς δὲν εἶναι κανονικὴ ἀλλ' ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, ἡ εὐθεῖα ΡΜΝ... θὰ πρέπει νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὴν κορυφὴν μετὰ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

278. *Ἐφαρμογαί.* Ἐπέκτασις τοῦ θεωρήματος διὰ τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὰς ἀγομένας ἐκ τυχόντος σημείου τῆς βάσεως αὐτοῦ (§ 268).

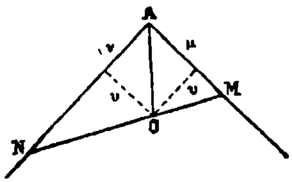
Θεώρημα. Αἱ κάθετοι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τυχόντος σημείου τῆς βάσεως κανονικῆς πυραμίδος ἐπὶ τὰς παραπλεύρους ἕδρας ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

Ἐὰν ἡ βάσις ἔχῃ ν πλευράς, τὸ ἄθροισμα εἶναι ν-πλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἀπὸ μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν.

Θεώρημα. Ἐκ τυχόντος σημείου Ο τῆς βάσεως κανονικῆς πυραμίδος φέρομεν εὐθείας ΟΜ, ΟΝ, ... ΟΠ, ΟΡ, τεμνούσας τὰς παραπλεύρους ἕδρας κατὰ σταθερὰν γωνίαν. Τὸ ἄθροισμα ΟΜ + ΟΝ + ... ΟΠ + ΟΡ εἶναι σταθερόν.

Θεώρημα

279. Διὰ σταθεροῦ σημείου Ο ἐπὶ τῆς διχοτόμου ὀρθῆς γωνίας Α φέρομεν μεταβλητὴν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς Μ καὶ Ν. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{\text{ΑΜ}}+\frac{1}{\text{ΑΝ}}$, τῶν ἀντιστρόφων τῶν μηκῶν τῶν τμημάτων ΑΜ, ΑΝ, εἶναι σταθερὰ ποσότης.



Σχ. 184.

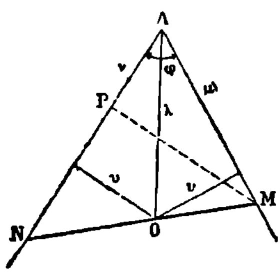
Ἔστωσαν μ, ν τὰ μήκη τῶν τμημάτων καὶ υ ἡ ἀπόστασις τοῦ Ο ἀπὸ ἑκάστης τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=\frac{\nu+\mu}{\mu\nu}$ εἶναι σταθερὰ ποσότης. Πράγματι, ἐκφράζοντες ὅτι τὸ ἐμβαδὸν $\frac{1}{2}\mu\nu$ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΝΑΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΟΜ καὶ ΑΟΝ, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$\mu\upsilon+\nu\upsilon=\mu\nu,$$

ἤ, διαιροῦντες κατὰ μέλη διὰ υ,

$$\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=\frac{1}{\upsilon},\ \text{σταθερὰ ποσότης.}$$



Σχ. 185.

1η Ἐπέκτασις

280. **Θεώρημα.** Τὸ αὐτὸ ζήτημα διὰ τυχοῦσαν γωνίαν ΝΑΜ.

Τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ΝΛΜ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ κατὰ δύο τρόπους:

$$\nu\upsilon+\mu\upsilon=\nu\,.\,\text{Ρ}.$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη διὰ μνυ, εὑρίσκομεν $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=\frac{1}{\upsilon}\cdot\frac{\text{ΜΡ}}{\mu}=$ ποσότης σταθερά, ἐπειδὴ ὁ λό-

γος $\frac{MP}{\mu}$ εἶναι σταθερὸς διὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν

$$\left[\frac{MP}{\mu} = \eta\mu\, \varphi\right].$$

281. *Παρατήρησις.* Ἡ σχέσις $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} =$ σταθ. προκύπτει ταχύτερον τριγωνομετρικῶς. Ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας αὐτῶν. Ὥστε

$$\mu\upsilon + \nu\upsilon = \mu\nu\, \eta\mu\, \varphi$$

καὶ ἐπομένως $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = \frac{\eta\mu\, \varphi}{\upsilon} =$ σταθερὰ ποσότης.

282. *Τιμὴ τῆς σταθερᾶς.* Ἂς ἐκφράσωμεν τὴν τιμὴν τῆς σταθερᾶς ποσότητος συναρτήσει τοῦ μήκους $AO = \lambda$ καὶ τῆς γωνίας φ. Ἔχομεν :

$$\upsilon = \lambda\, \eta\mu \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{\lambda\, \eta\mu \frac{\varphi}{2}},$$

καὶ ὁ τύπος $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = \frac{\eta\mu\, \varphi}{\upsilon}$ γίνεται :

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = \frac{\eta\mu\, \varphi}{\lambda\, \eta\mu \frac{\varphi}{2}} = \frac{2\, \eta\mu \frac{\varphi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\varphi}{2}}{\lambda\, \eta\mu \frac{\varphi}{2}}.$$

Ὥστε

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = \frac{2}{\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\varphi}{2}.$$

2α Ἐπέκτασις

283. *Θεώρημα.* Διὰ σημείου Ο ἐπὶ τῆς διὰ τῆς κορυφῆς Κ διαγωνίου κανονικοῦ ὀκταέδρου, φέρομεν τυχὸν ἐπίπεδον τέμνον τὰς ἀκμὰς τῆς στερεᾶς γωνίας Κ εἰς σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν μηκῶν τῶν ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ εἶναι σταθερὰ ποσότης.

Ἐπειδὴ αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ τῆς στερεᾶς γωνίας Κ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τὰς ἀκμὰς ἡ αὐτὴ καὶ διὰ τὰς τέσσαρας $= \upsilon$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{KA} + \frac{1}{K\Gamma} = \frac{1}{\upsilon}, \quad \frac{1}{KB} + \frac{1}{K\Delta} = \frac{1}{\upsilon}.$$

Ὥστε :

$$\frac{1}{KA} + \frac{1}{KB} + \frac{1}{K\Gamma} + \frac{1}{K\Delta} = \frac{2}{\upsilon}.$$

3η Ἐπέκτασις

284. *Θεώρημα.* Διὰ τοῦ σημείου τομῆς Ο τῶν διαγωνίων ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταέδρου φέρομεν ἐπίπεδον (Π) τέμνον πάσας τὰς ἀκμὰς τοῦ

στερεοῦ ([24]). Ὁρίζονται οὕτω ἐπὶ ἑκάστης ἀκμῆς δύο τμήματα μὲ ἀρχὰς τὰς ἐπὶ ταύτης κορυφὰς τοῦ ὀκταέδρου καὶ κοινὸν πέρας τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ἀκμῆς καὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π).

Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν μηκῶν τῶν οὕτω ὁριζομένων εἴκοσι τεσσάρων τμημάτων εἶναι ποσότης σταθερά.

Ὡς εἴδομεν προηγουμένως, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων διὰ τέσσαρα τμήματα μὲ κοινὴν ἀρχὴν τὴν κορυφὴν μιᾶς στερεᾶς γωνίας τοῦ σχήματος εἶναι $\frac{2}{\upsilon}$, ὅπου υ ἡ κοινὴ ἀπόστασις τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τὰς ἀκμάς. Διὰ ἀς ἕξ, ἑπομένως, κορυφὰς τὸ ἄθροισμα εἶναι $\frac{12}{\upsilon}$.

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς διὰ πᾶν ὀκτάεδρον, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων ἴσον ἀπέχει τῶν δώδεκα ἀκμῶν.

4η Ἐπέκτασις

285. *Θεώρημα.* Πᾶν ἐπίπεδον ἀγόμενον διὰ σταθεροῦ σημείου Ο κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας (ΣΟ) τῆς ἴσον ἀπεχούσης ἀπὸ τῶν ἀκμῶν, θεωρουμένων ἀνὰ δύο, μιᾶς πολυεδρικῆς στερεᾶς γωνίας Σ, τῆς ὁποίας τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς καὶ αἱ ἀπέναντι ἕδραι ἴσαι, ὁρίζει ἐπὶ τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τμήματα τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν μηκῶν εἶναι σταθερὸν ([25]).

Ἔστωσαν ΣΑ, ΣΑ′ δύο ἀπέναντι τμήματα καὶ a ἡ γωνία ΑΣΑ′ τῆς ὁποίας διχοτόμος εἶναι ἡ ΣΟ· ἂς παραστήσωμεν δὲ διὰ α τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ο ἀπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν αὐτῶν. Θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{1}{ΣΑ}+\frac{1}{ΣΑ'}=\frac{ημ\,a}{α} \qquad (\S\ 281)$$

ἐπίσης

$$\frac{1}{ΣΒ}+\frac{1}{ΣΒ'}=\frac{ημ\,b}{β} \qquad κλπ.$$

Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη ἑκάστης τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν εἶναι ποσότητες σταθεραί, ἀφοῦ αἱ ποσότητες $\frac{ημ\,a}{α}$, $\frac{ημ\,b}{β}$... εἶναι σταθεραὶ διὰ μίαν ὡρισμένην θέσιν τοῦ Ο, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα

$$\frac{1}{ΣΑ}+\frac{1}{ΣΑ'}+\frac{1}{ΣΒ}+\frac{1}{ΣΒ'}\cdots$$

εἶναι ἐπίσης σταθερὰ ποσότης.

Διὰ ἕξ λ. χ. ἀκμὰς θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{ΣΑ}+\frac{1}{ΣΒ}+\frac{1}{ΣΓ}+\frac{1}{ΣΑ}+\frac{1}{ΣΒ'}+\frac{1}{ΣΓ'}+\frac{ημ\,a}{α}+\frac{ημ\,b}{β}+\frac{ημ\,c}{γ}$$

Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ στερεὰ γωνία εἶναι κανονική, $a=b=c$, $α=β=γ$ καὶ ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς ποσότητος εἶναι $\frac{3\,ημ\,a}{α}$.

---

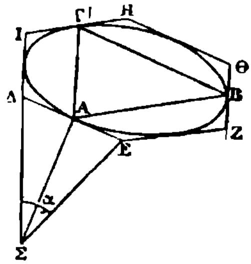
24. Σημ. μετ. Καὶ εἰς σημεῖα διάφορα τῶν κορυφῶν του.

25. » » Ὑποτίθεται ὅτι ὑπάρχει τοιαύτη εὐθεῖα (ΣΟ).

5η 'Επέκτασις

286. Θεώρημα. Διὰ σταθεροῦ σημείου Ο, κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἴσον ἀπεχούσης τῶν ἑδρῶν μιᾶς κανονικῆς στερεᾶς γωνίας Σ, φέρομεν τυχὸν ἐπίπεδον (Π) τέμνον τὰς ἀκμὰς εἰς Α, Β... Μ. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν μηκῶν ΣΑ,... ΣΜ εἶναι σταθερὰ ποσότης.

Τὸ θεώρημα εἶναι φανερὸν ἐὰν ἡ γωνία Σ ἔχῃ ἄρτιον πλῆθος ἀκμῶν (§ 285) καὶ μένει νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθειά του ὅταν τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τῆς Σ εἶναι *περιττὸς* ἀριθμός. Ἐπειδὴ δὲ ἡ δυσκολία τῆς ἀποδείξεως εἶναι ἡ αὐτή, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ περιττὸς αὐτὸς ἀριθμός, ἂς ἐργασθῶμεν ἐπὶ ἑνὸς κανονικοῦ τριέδρου.



Σχ. 188.

Ἂς περιγράψωμεν κῶνον ἐκ περιστροφῆς εἰς τὴν δοθεῖσαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν καὶ δι' ἑκάστης ἀκμῆς καὶ ἑκάστης γενετείρας, εἰς ἴσας γωνιακὰς ἀποστάσεις ἀπὸ δύο διαδοχικῶν ἀκμῶν κειμένης, ἂς φέρωμεν τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς ἐπιφανείας. Σχηματίζομεν οὕτω μίαν κανονικὴν ἑξαεδρικὴν στερεὰν γωνίαν καὶ τῆς ὁποίας ἡ τομὴ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἶναι ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ περιγεγραμμένον εἰς ἔλλειψιν (ἐν γένει). Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ δοθέντος τριέδρου.

Ὑποθέσωμεν μίαν τῶν ἑδρῶν τῆς ἑξαεδρικῆς γωνίας κατακεκλιμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὴν θέσιν ΔΣΕ. Αἱ ΣΔ καὶ ΣΕ εἶναι αἱ νέαι θέσεις δύο διαδοχικῶν ἐκ τῶν θεωρηθεισῶν γενετειρῶν, ἡ δὲ ΣΑ ἡ θέσις τῆς ἀκμῆς τοῦ τριέδρου. Ἐπειδὴ ἡ ΣΑ θὰ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΔΣΕ θὰ ἔχωμεν κατὰ τὴν § 282:

$$\frac{1}{\Sigma\Delta}+\frac{1}{\Sigma E}=\frac{2}{\Sigma A}\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha}{2}.$$

Ἀναλόγως, εὑρίσκομεν :

$$\frac{1}{\Sigma Z}+\frac{1}{\Sigma\Theta}=\frac{2}{\Sigma B}\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{\Sigma H}+\frac{1}{\Sigma I}=\frac{2}{\Sigma\Gamma}\cdot\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha}{2},$$

ὅπου α ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν γωνιῶν ΔΣΕ, ΖΣΘ, ΗΣΙ. Ἑπομένως :

$$\left(\frac{2}{\Sigma A}+\frac{2}{\Sigma B}+\frac{2}{\Sigma\Gamma}\right)\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\Sigma\Delta}+\frac{1}{\Sigma E}+\frac{1}{\Sigma Z}+\frac{1}{\Sigma\Theta}+$$

$$+\frac{1}{\Sigma H}+\frac{1}{\Sigma I}=\frac{1}{c}=\text{ποσότης σταθερὰ κατὰ τὴν § 285, καὶ}$$

$$\frac{1}{\Sigma A}+\frac{1}{\Sigma B}+\frac{1}{\Sigma\Gamma}=\frac{1}{2c\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha}{2}}$$

ἥτις εἶναι ἐπίσης σταθερὰ ποσότης. Ὥστε...

Ἐφαρμογή

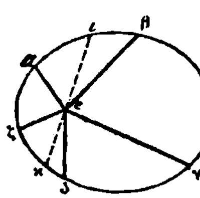
287. Θεώρημα. Διὰ τῆς μιᾶς τῶν ἑστιῶν ἐλλείψεως φέρομεν ἕνα ὡρισμένον πλῆθος ἐπιβατικῶν ἀκτίνων, πέντε λ. χ., καὶ εἰς ἴσας διαδοχικὰς γωνίας $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots \varphi_5 = \frac{2\pi}{5}$ μεταξύ των.

Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν μηκῶν τῶν ἀκτίνων τούτων εἶναι ποσότης σταθερά, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις των εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐλλείψεως.

Θεωρήσωμεν κανονικὴν πεντάεδρον στερεὰν γωνίαν Σ καὶ τὸν περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον. Ἔστω δὲ (Π) τυχὸν ἐπίπεδον τέμνον τὰς ἀκμὰς τῆς γωνίας εἰς σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ζ. Ὡς εἴδομεν (§ 286), θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{\Sigma A} + \frac{1}{\Sigma B} + \frac{1}{\Sigma \Gamma} + \frac{1}{\Sigma \Delta} + \frac{1}{\Sigma Z} = c = \text{σταθ.}$$

Ἡ προβολὴ τῆς τομῆς ἐπὶ ἐπίπεδον (Ρ) κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦ κώνου θὰ εἶναι ἔλλειψις (ἐν γένει), αβγδε, μὲ ἑστίαν τὴν προβολὴν τῆς κορυφῆς Σ (G. n° 855) καὶ προβολὰς τῶν τμημάτων ΣΑ, ΣΒ ... ΣΕ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν της, τὰς ἑστιακὰς ἀκτῖνας εα, εβ ... εζ. Αἱ ἀκτῖνες αὗται θὰ σχηματίζουν μεταξύ των ἴσας διαδοχικὰς γωνίας, ἀντιστοίχους τῶν προβολῶν ἐπὶ τὸ (Ρ) τῶν ἴσων ἑδρῶν τῆς γωνίας Σ, τὰ δὲ μήκη των θὰ εἶναι γινόμενα τῶν μηκῶν ΣΑ, ΣΒ ... ΣΕ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς σταθερᾶς κλίσεως Φ ἑκάστης τῶν ἀκμῶν τῆς γωνίας Σ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κώνου:



Σχ. 187.

$$(\beta) \qquad \varepsilon\alpha = \Sigma A \,.\, \text{ημ}\, \Phi, \quad \varepsilon\beta = \Sigma B \,.\, \text{ημ}\, \Phi, \ldots \quad \varepsilon\zeta = \Sigma Z\, \text{ημ}\, \Phi.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰ τὴν σχέσιν (α) τὰς τιμὰς τῶν ΣΑ, ... ΣΖ ἐκ τῶν ἰσοτήτων (β), λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{1}{\varepsilon\alpha} + \frac{1}{\varepsilon\beta} + \ldots = \frac{\gamma}{\text{ημ}\,\Phi} = \text{σταθ.},$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὴν πρότασιν.

287 α. *Παρατήρησις.* 1) Τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς καὶ διὰ τυχοῦσαν κωνικὴν τομήν.

2) Ὡς ειδικὴν περίπτωσιν, θεωρήσωμεν μίαν ἑστιακὴν χορδὴν ιεκ· θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\frac{1}{\varepsilon\iota} + \frac{1}{\varepsilon\kappa} = \text{σταθ.},$$

κατὰ τὸ ἀκόλουθον θεώρημα τῆς *Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας :*

287 β. Θεώρημα. Εἰς πᾶσαν κωνικὴν τομήν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν τμημάτων, τῶν ὁριζομένων ἐπὶ ἑστιακῆς χορδῆς ὑπὸ τῆς ἑστίας, εἶναι σταθερόν.

Ἡ σταθερὰ εὐκόλως προσδιορίζεται ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ δύο

τμήματα ΑΕ' = α + γ καὶ Ε'Α' = α − γ τοῦ με άλου ἄξονος ΑΕΕ'Α'· τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των εἶναι

$$\frac{1}{\alpha-\gamma}+\frac{1}{\alpha+\gamma}=\frac{2\alpha}{\alpha^2-\gamma^2}=\frac{2\alpha}{\beta^2}$$

ὥστε :

$$\frac{1}{\varepsilon\iota}+\frac{1}{\varepsilon\kappa}=\frac{2\alpha}{\beta^2}.$$

288. ***Ἐπέκτασις ἐκ τοῦ τριγώνου εἰς τὸ τρίεδρον.*** Πλεῖσται ὅσαι ἰδιότητες τοῦ τριγώνου εἰς τὸ ἐπίπεδον δύνανται νὰ μᾶς ὁδηγήσουν εἰς ἀνεύρεσιν ἀναλόγων ἰδιοτήτων εἰς τὸ τρίεδρον. Ὡρισμέναι πάλιν ἰδιότητες τοῦ τριέδρου, ὡς αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὰς διέδρους γωνίας καὶ ἕδρας αὐτοῦ, ἔχουν τὰ ἀνάλογά των ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου.

Ἰδοὺ μερικὰ παραδείγματα.

Εἰς τὸ *τρίγωνον*, ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Τὰ τρία ὕψη τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.	Εἰς τὸ *τρίεδρον*, ἑκάστη ἕδρα εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Τὰ ἐπίπεδα διὰ τῶν ἀκμῶν, τὰ κάθετα ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἕδρας, διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.	Εἰς τὸ *σφαιρικὸν τρίγωνον*, ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Τὰ τόξα μεγίστων κύκλων, τὰ ἀγόμενα ἐκ τῶν κορυφῶν καθέτως ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευράς, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.
Αἱ τρεῖς διχοτόμοι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.	Τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς τρεῖς διέδρους τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.	Τὰ τόξα μεγίστων κύκλων, τὰ διχοτομοῦντα τὰς γωνίας σφαιρικοῦ τριγώνου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.
Εἰς πᾶν τρίγωνον δύναται νὰ ἐγγραφῇ καὶ περιγραφῇ περιφέρεια.	Εἰς πᾶν τρίεδρον δύναται νὰ ἐγγραφῇ καὶ περιγραφῇ κῶνος ἐκ περιστροφῆς.	Εἰς πᾶν σφαιρικὸν τρίγωνον δύναται νὰ ἐγγραφῇ καὶ περιγραφῇ περιφέρεια.

289. ***Ἐπέκτασις εἰς τὰς ἀριθμητικὰς σχέσεις.*** Εἰς ὡρισμένα θεωρήματα ἀναφέρονται ἀριθμητικαὶ σχέσεις δυνάμεναι νὰ μετασχηματισθοῦν κατ' ἐπέκτασιν καὶ νὰ ὁδηγήσουν οὕτω εἰς νέα θεωρήματα.

Θὰ διακρίνωμεν δύο κύρια εἴδη τοιούτων σχέσεων.

1ον Εἶδος. *Ἡ εἰς τὸ ἀρχικὸν θεώρημα σχέσις ἀναφέρεται εἰς ἄθροισμα ἢ διαφορὰν μηκῶν. Δυνάμεθα τότε νὰ μεταβῶμεν εἰς ἐπεκτεταμένον θεώρημα, πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον ὅρον τῆς ἀρχικῆς σχέσεως ἐπὶ σταθερὸν ἀριθμόν.*

Ἰδοὺ ἓν πολὺ ἁπλοῦν παράδειγμα.

Θεώρημα

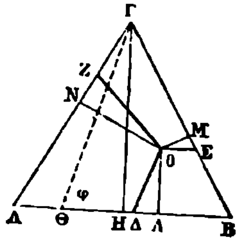
289 α. Ἐκ σημείου, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου κειμένου, φέρομεν τρία εὐθύγραμμα τμήματα περατούμενα εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ

τριγώνου καὶ τέμνοντα αὐτὰς κατὰ δοθεῖσαν γωνίαν φ. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν των εἶναι σταθερόν.

Ἔστωσαν ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ τὰ τμήματα ταῦτα καὶ ΟΛ, ΟΜ, ΟΝ ἄλλα κάθετα ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Γνωρίζομεν ὅτι

(1) $\quad ΟΛ + ΟΜ + ΟΝ = ΓΗ =$ ὕψος τοῦ τριγώνου.

Ἔστω ΓΘ εὐθεῖα διὰ τοῦ Γ, κεκλιμένη κατὰ τὴν γωνίαν φ πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΟΔΛ, ΟΕΜ, ΟΖΝ εἶναι ὅμοια πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ΓΗΘ, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας



Σχ. 188.

$$\frac{ΟΛ}{ΟΔ} = \frac{ΟΜ}{ΟΕ} = \frac{ΟΝ}{ΟΖ} = \frac{ΓΗ}{ΓΘ},$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται καὶ ἡ:

$$\frac{ΟΛ + ΟΜ + ΟΝ}{ΟΔ + ΟΕ + ΟΖ} = \frac{ΓΗ}{ΓΘ}.$$

Ἐπειδὴ εἰς αὐτὴν οἱ ἀριθμηταὶ εἶναι ἴσοι, θὰ εἶναι ἴσοι καὶ οἱ παρονομασταί, ἢ

$$ΟΔ + ΟΕ + ΟΖ = ΓΘ = \text{ποσότης σταθερά.}$$

289β. 1) Δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ἀποτέλεσμα ταχύτερον ἴσως ἐὰν καλέσωμεν ρ τὴν τιμὴν τῶν ἴσων λόγων $\frac{ΟΛ}{ΟΔ}, \frac{ΟΜ}{ΟΕ}, \frac{ΟΝ}{ΟΖ}$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (1) τὰ ΟΛ κλπ. διὰ τῶν ΟΔ . ρ, ΟΕ . ρ, ΟΖ . ρ. Εὑρίσκομεν

$$ΟΔ . ρ + ΟΕ . ρ + ΟΖ . ρ = ΓΗ$$

$$ΟΔ + ΟΕ + ΟΖ = \frac{ΓΗ}{ρ} = \text{στθ.}$$

2) Ὁ λόγος ρ εἶναι τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας φ.

3ον. Εἶδος. *Ἡ εἰς τὸ ἀρχικὸν θεώρημα σχέσις εἶναι λόγος ἢ γινόμενον μηκῶν. Δυνάμεθα τότε νὰ μεταβῶμεν εἰς ἐπεκτεταμένον θεώρημα, πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους ἢ παράγοντας τῆς ἀρχικῆς σχέσεως ἐπὶ σταθεροὺς καὶ διαφόρους, ἐν γένει, ἀριθμούς.*

Παράδειγμα:

Θεώρημα

290. Ἐκ τυχόντος σημείου Μ περιφερείας φέρομεν τέμνουσαν κατὰ δοθεῖσαν διεύθυνσιν ΧΥ. Ἡ εὐθεῖα αὕτη συναντᾷ σταθερὰν χορδὴν ΙΚ εἰς σημεῖον Α καὶ τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας εἰς τὰ Ι καὶ Κ κατὰ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος $\frac{ΜΑ^2}{ΜΒ . ΜΓ}$ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός.

Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι τὸ ἐπεκτεταμένον τοῦ τῆς § 25.

Ἔστωσαν ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ αἱ ἐκ τοῦ Μ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΗΙΚ· αἱ γωνίαι α, β, γ εἶναι σταθεραὶ διὰ τεμνούσας παραλλήλους πρὸς τὴν ΧΥ.

Ἂν τοὺς σταθεροὺς λόγους $\frac{ΜΔ}{ΜΑ}, \frac{ΜΕ}{ΜΒ}, \frac{ΜΖ}{ΜΓ}$ παραστήσωμεν διὰ τῶν α, β, γ ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας

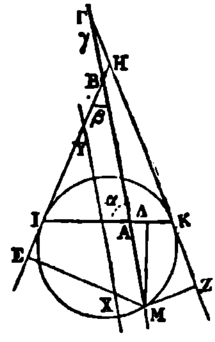
$ΜΔ=ΜΑ.α,\ ΜΕ=ΜΒ.β,\ ΜΖ=ΜΓ.γ.$ (1)

Ἀφ' ἑτέρου, εἶναι $ΜΔ^2=ΜΕ.ΜΖ$ (§ 25) ἤ, ἐκ τῶν (1);

$$\frac{ΜΑ^2 . α^2}{ΜΒ . β \times ΜΓ . γ}=1.$$

Ὥστε:

$$\frac{ΜΑ^2}{ΜΒ . ΜΓ}=\frac{βγ}{α^2}=\frac{ημ\, β . ημ\, γ}{ημ^2 α}=στθ.$$



Σχ. 189.

Ἐπέκτασις

290 α. Δυνάμεθα νὰ δώσωμεν μίαν νέαν ἐπέκτασιν εἰς τὸ θεώρημα τῆς § 25 καθὼς καὶ εἰς τὸ ἐπεκτεταμένον αὐτοῦ προηγούμενον.

1) *Εἰς πᾶσαν κωνικὴν τομήν, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ τυχόντος αὐτῆς σημείου ἀπὸ δύο σταθερῶν ἐφαπτομένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεώς του ἀπὸ τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν ἀριθμὸν σταθερόν.*

Αἱ ἀποστάσεις δύνανται νὰ μετρῶνται καὶ ἐπὶ εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς δοθείσας διευθύνσεις.

2) *Ἐκ τυχόντος σημείου Μ κωνικῆς τομῆς φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν καὶ τέμνουσαν σταθερὰν χορδὴν ΙΚ εἰς σημεῖον Α καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς εἰς τὰ Β καὶ Κ. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος $\frac{ΜΑ^2}{ΜΒ . ΜΓ}$ εἶναι ἀριθμὸς σταθερός.*

Παρατήρησις. Τὰ ἀνωτέρω δύο θεωρήματα εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις τοῦ θεωρήματος «*ὁ ἐπὶ τέσσαρας εὐθείας τόπος*» (*ad quatuor lineas*, βλ. §§ 2105 καὶ 2107) τοῦ *Πάππου*.

§ III. *Διαδοχικαὶ ἐπαγωγαὶ*

291. Εἰς τὴν *Μέθοδον δι' ἐπεκτάσεως* (§ 263) καὶ εἰς τοὺς *διαφόρους τρόπους τοῦ θεωρεῖν ἓν πρόβλημα*, δυνάμεθα νὰ ἐπισυνάψωμεν ἓν εἶδος σπουδῆς τῶν γεωμετρικῶν ζητημάτων, τοῦ ὁποίου ἡ κατανόησις γίνεται εὐκολώτερον διὰ παραδειγμάτων παρὰ ἐκ τῆς διατυπώσεως τῶν ἀρχῶν βάσει τῶν ὁποίων ἐργαζόμεθα κατ' αὐτό.

Εἰς τὸ εἶδος τοῦτο σπουδῆς ἡ ἐπεξεργασίας τῶν θεωρημάτων δίδεται τὸ ὄνομα *Διαδοχικαὶ ἐπαγωγαί*. Κατ' αὐτό:

Δοθέντος ἑνὸς θεωρήματος (προβλήματος κλπ.), ἐξετάζομεν εἰς αὐτὸ ὄχι μόνον τὰς διαφόρους ὄψεις ὑπὸ τας ὁποίας δύναταί τις νὰ τὸ θεωρήσῃ ([26]) *ἀλλὰ καί, τροποποιοῦντες ὡρισμένα δεδομένα ἢ στοιχεῖα τῆς ἀρχικῆς του*

---

26. Σημ. μετ. Δηλ. ὄχι μόνον «στατικῶς».

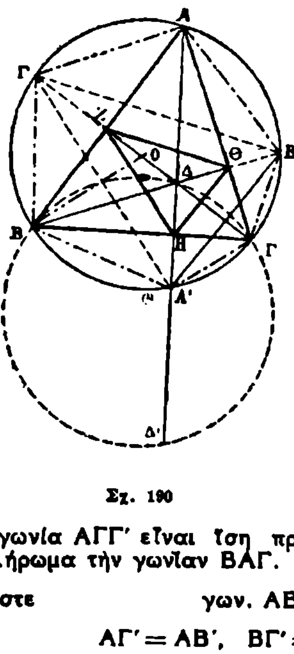
μορφῆς, ἐπεκτείνοντες κλπ., προσπαθοῦμεν νὰ ἀνεύρωμεν καὶ ἄλλας συνεπείας αὐτοῦ, δηλ. ἄλλα θεωρήματα, ἀπορρέοντα ἀμέσως ἢ ἐμμέσως ἐξ αὐτοῦ.

Εἰς τὸ ἔργον τοῦ Carnot *De la corrélation des figures de Géométrie*—καὶ τὸ ὁποῖον ἀργότερον ἀνέπτυξεν εἰς τὴν *Géométrie de Position*—εὑρίσκονται παραδείγματα πολὺ ἐνδιαφέροντα διαδοχικῶν ἐπαγωγῶν. Ἐκ τῆς προσεκτικῆς σπουδῆς ἑνὸς σχήματος προκύπτει πλῆθος προτάσεων καὶ τὰς ὁποίας ἀνευρίσκει τις εἰς τὰς διαφόρους συλλογὰς Γεωμετρικῶν ἀσκήσεων. Ἀλλά, διεσπαρμέναι ὡς ἐμφανίζονται καὶ ἀνεξαρτήτως αἱ μὲν τῶν δέ, σπανίως ἀφίνουν νὰ διαφαίνεται ἡ κοινὴ καταγωγή των ἐξ ἑνὸς ἀρχικοῦ θεωρήματος καὶ ἡ διὰ τῶν διαδοχικῶν ἐπαγωγῶν γένεσις αὐτῶν.

Πρόβλημα

292. Νὰ εὑρεθοῦν σχέσεις μεταξὺ τῶν πλευρῶν τριγώνου, τῶν ὑψῶν αὐτοῦ καὶ τῶν τμημάτων ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν. (Carnot, De la Corrélation des figures Géométriques, n° 142, σ. 101).

Προεκτείνομεν τὰ ὕψη μέχρι τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας (Ο) εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἔστω Δ τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ.



Σχ. 190

(α) *Ἕκαστον τῶν τεσσάρων σημείων Α, Β, Γ, Δ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τῶν τριῶν ἄλλων.*

Τὸ Α λ.χ. εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ΒΓΔ. Πράγματι, ἀφοῦ ἡ εὐθεῖα ΒΔΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΘΑ καὶ ἡ ΓΘΑ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔΘ, καθὼς καὶ ἡ ΒΖΑ ἐπὶ τὴν ΓΔΖ, τὸ δὲ σημεῖον Α θὰ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ΒΓΔ. Τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἀποτελοῦν οὕτω *ὀρθοκεντρικὴν ὁμάδα* (§ 292 ν).

(β) *Τὰ ἕξ τόξα, τὰ ὁριζόμενα ἐπὶ τῆς περιφερείας (Ο) ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ καὶ τῶν τομῶν της Α', Β', Γ' ὑπὸ τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσα ἀνὰ δύο.*

Πράγματι, αἱ γωνίαι ΑΒΓ', ΑΓΓ' ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, ἡ δὲ γωνία ΑΓΓ' εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΒ', ὡς ἔχουσαι κοινὸν συμπλήρωμα τὴν γωνίαν ΒΑΓ.

Ὥστε γων. ΑΒΓ' = ΑΒΒ'

καὶ ΑΓ' = ΑΒ', ΒΓ' = ΒΑ', ΓΑ' = ΓΒ'.

(γ) *Ἡ ἀπόστασις τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς εἶναι ἴση πρὸς τὸ τμῆμα, ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους, ἀπὸ τοῦ ποδὸς αὐτοῦ μέχρι τῆς περιφερείας.*

λ.χ. ΔΖ = ΖΓ', ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ΑΒΓ' καὶ ΑΒΒ'. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΒΔΓ, θὰ ἔχωμεν ἐπίσης ΑΗ = ΗΔ'.

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος καὶ ἀναφορικῶς πρὸς τὸ ἀρχικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, ἕπεται ἡ πρότασις:

(δ) *Ἡ περιφέρεια, ἡ διερχομένη διὰ δύο κορυφῶν Β, Γ τριγώνου καὶ τοῦ ὀρθοκέντρου Δ αὐτοῦ, ὁρίζει ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ὕψους ΑΗ σημεῖον Δ' εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Η ἴσην πρὸς τὸ ὕψος τοῦτο.*

Δηλ. τὸ Η εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΑΔ'.

Ἡ πρότασις αὕτη πάλιν δύναται νὰ θεωρηθῇ ἁπλῆ συνέπεια τοῦ ἑπομένου θεωρήματος:

(ε) *Ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τρίγωνον καὶ αἱ περιγεγραμμέναι εἰς τὰ τρίγωνα μὲ κοινὴν κορυφὴν τὸ ὀρθόκεντρον καὶ βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου, εἶναι ἴσαι.*

Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ) συμπίπτει πρὸς τὴν (Α'ΒΓ), τὸ δὲ τρίγωνον Α'ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΔΓ. Ὥστε (ΑΒΓ) = (Α'ΒΓ) = (ΒΔΓ) = (ΓΔΑ) = (ΑΔΒ).

(ζ) *Τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων, τῶν ὁριζομένων ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς ὑπὸ τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους καὶ τῆς ἀποστάσεως τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς.*

Ἐπειδὴ ΑΖ . ΖΒ = ΓΖ . ΖΓ' = ΓΖ . ΔΖ.

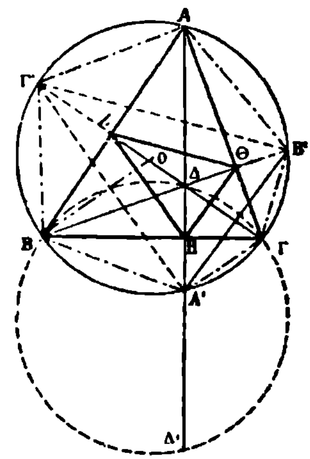
(η) *Τὰ γινόμενα τῶν τμημάτων ἐπὶ ἑκάστου ὕψους, τῶν ὁριζομένων διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου, εἶναι ἴσα.*

Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι:

ΑΔ . ΔΗ = ΒΔ . ΔΘ = ΓΔ . ΔΖ.

Ἕνεκα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν εἰς τὰ σημεῖα Θ καὶ Ζ, τὸ τετράπλευρον ΒΓΘΖ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΒΓ. Ἑπομένως:

ΒΔ . ΔΘ = ΓΔ . ΔΖ κλπ.



Σχ. 191

Δυνάμεθα νὰ κάμωμεν καὶ τὰς ἀκολούθους ἀκόμη παρατηρήσεις:

(θ) *Ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα δύο πόδας ὑψῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὴν κορυφὴν ἐξ ἧς τὸ τρίτον ὕψος.*

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Α'Γ'. Ἡ ἀκτὶς ΒΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν Α'Γ', ἀφοῦ ΒΑ' = ΒΓ'· αἱ δὲ εὐθεῖαι ΖΗ καὶ Γ'Α' εἶναι παράλληλοι, ἐπειδὴ τὸ Ζ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΔΓ' καὶ τὸ Η μέσον τοῦ ΔΑ'. Εἶναι λοιπὸν ἡ ἀκτὶς ΒΟ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΖΗ.

Ἐπανευρίσκομεν ἐπίσης τὸ γνωστὸν θεώρημα:

(ι) *Τὰ ὕψη εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΖΘΗ τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν.*

Ἡ ΓΓ' εἶναι, πράγματι, διχοτόμος τῆς γωνίας Α'Γ'Β', ὡς ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τόξων ΓΑ' καὶ ΓΒ' ἕπεται, καὶ ἡ ΓΖ διχοτόμος

τῆς γωνίας Ζ τῶν παραλλήλων ΗΖ, ΘΖ πρὸς τὰς Α'Γ' καὶ Β'Γ'.

(κ) *Τὸ Τρίγωνον ΖΘΗ, τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν, εἶναι τὸ ἐλαχίστης περιμέτρου, ἐκ τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.*

Ὑποθέτοντες ἀληθεῖς τὰς ἀρχὰς τὰς ὁποίας θ' ἀποδείξωμεν εἰς τὸ εἰδικὸν κεφάλαιον ἐπὶ τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων (§ 342), παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν αἱ κορυφαὶ Θ καὶ Η θεωρηθοῦν ὡς σταθεραί, τὸ ἐλάχιστον τῆς περιμέτρου ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς θέσεως τῆς κορυφῆς Ζ. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι ὁ δρόμος ΖΘ + ΖΗ γίνεται ἐλάχιστος ὅταν αἱ εὐθεῖαι ΖΘ, ΖΗ εἶναι ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τὴν ΑΒ (G., n° 177).

Ἀνάλογον συμπέρασμα ποριζόμεθα καὶ ἐὰν σταθεροποιήσωμεν τὰς κορυφὰς Ζ, Η ἢ Ζ, Θ. Θὰ πρέπει λοιπὸν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ἐλαχίστης περιμέτρου νὰ ἔχῃ τὰς πλευράς του ἴσον κεκλιμένας πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, πρᾶγμα ποὺ συμβαίνει διὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ [27].

Ἰδοὺ μερικαὶ νέαι ἰδιότητες: Γνωρίζομεν ὅτι ἡ *περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων* τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν, τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν, ὡς καὶ διὰ τῶν μέσων τῶν τμημάτων ΑΔ, ΒΔ, ΓΔ τῶν ὑψῶν· ἀφ' ἑτέρου, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Feuerbach (§ 228), ἡ περιφέρεια αὕτη ἐφάπτεται τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον, καθὼς καὶ ἑκάστης τῶν παρεγγεγραμμένων εἰς αὐτό. Ἀγόμεθα οὕτω εἰς τὸ ἑπόμενον θεώρημα τοῦ W. Hamilton:

(λ) *Τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΓΔΑ ἔχουν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν τῶν ἐννέα σημείων, ἐφαπτομένην τῶν δέκα ἓξ ἐγγεγραμμένων καὶ παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὰ τρίγωνα ταῦτα.*

292. (μ) *Παρατήρησις.* Ἡ προσεκτικὴ μελέτη τοῦ σχήματος τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τριῶν εὐθειῶν τεμνομένων ἀνὰ δύο καὶ τῶν τριῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου αὐτῶν μᾶς ἤγαγεν, ὡς εἴδομεν, εἰς πολυάριθμα θεωρήματα. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμενοι, δυνάμεθα νὰ σπουδάσωμεν τὸ σύστημα ἑνὸς τριγώνου καὶ τῶν διαμέσων του, τῶν διχοτόμων, ἐσωτερικῶν ἢ ἐξωτερικῶν αὐτοῦ, ἤ, γενικώτερον, τῶν εὐθειῶν τῶν ἑνουσῶν τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του μετὰ τῶν κορυφῶν.

Μέχρι τοῦδε, ἡ σπουδὴ τῶν τελευταίων τούτων σχημάτων ἀπέχει πολὺ τῆς ἀποδοτικότητος εἰς ἀποτελέσματα, ἐν συγκρίσει πρὸς τὸ παράδειγμα τῆς § 292, ἤ, τουλάχιστον, τὰ προβλήματα ταῦτα δὲν εὗρον ἀκόμη τὸν Carnot αὐτῶν. Καὶ θεωροῦμεν τοὺς ἑαυτούς μας εὐτυχεῖς ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ὅτι ὁ νέος κλάδος τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας, ἡ *Γεωμετρία τοῦ Τριγώνου* (§ 2260 κ.ἑ.), παρέχει βασίμους ἐλπίδας ὅτι, διὰ τῆς ἀναπτύξεώς του, θὰ προσθέσῃ ἓν νέον κεφάλαιον, ἐκ τῶν πλέον ἐνδιαφερόντων καὶ πλέον ἐκτεταμένων, εἰς τὰ τῆς κλασικῆς παραδόσεως τῆς Γεωμετρίας.

292. (ν) *Σημείωσις.* *Ὀρθόκεντρον* (δ). Τὸ ὄνομα τοῦτο ἐδόθη ὑπὸ τῶν ἄγγλων γεωμετρῶν (§ 664 α Σημ.) εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ὑψῶν ἑνὸς τριγώνου.

Ὀρθοκεντρικὴ ὁμὰς σημείων εἶναι τὸ σύνολον τεσσάρων σημείων, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τῶν τριῶν ἄλλων (§ 292 α). Διὰ τοῦ ὅρου αὐτοῦ ἡ πρότασις τῆς § 292 (λ) δέχεται τὴν διατύπωσιν:

---

27. Σημ. μετ. Τουλάχιστον δι' αὐτό.

Τὰ τέσσαρα τρίγωνα μιᾶς ὀρθοκεντρικῆς ὁμάδος ἔχουν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν τῶν ἐννέα σημείων. (Βλ. ἐπ. § 2183 (δ), 2).

Συγκυκλικὰ σημεῖα (η). Ὅρος τῶν ἄγγλων, πάλιν, γεωμετρῶν διὰ τέσσαρα σημεῖα ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. Ὁ Neuberg προέτεινε *ὁμοκυκλικά* ([28]).

Ὀρθικὸν τρίγωνον (ι), ἢ [σπανιώτερον] *ὀρθοκεντρικόν*, εἶναι τὸ τρίγωνον τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν ἑνὸς τριγώνου.

Τὸ θεώρημα τοῦ sir *William Hamilton* προετάθη τὸ 1861 εἰς τὰ N. A. des Math., σ. 216, δύναται δὲ νὰ ὁδηγήσῃ εἰς νέας προτάσεις. Βλέπε σχετικῶς: *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, τοῦ *Eugène Catalan* (6η ἔκδ., 1879 θεωρήματα CVIII ἕως CXII, σ. 178).

Ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς πάντα τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὀρθόκεντρον καὶ τὴν αὐτὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν (§ 1341, β). Ὁ *John Casey* ἀπέδειξεν ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ ἐφάπτεται 64 περιφερειῶν ἤ, διὰ μέσου αὐτῶν, 256 περιφερειῶν κ.ο.κ.

§ IV. Γενίκευσις

293. ***Ὑποθετικὴ γενίκευσις.*** Πολλὰ στοιχειώδη θεωρήματα δύνανται διὰ τῆς ἐπεκτάσεως ἢ γενικεύσεως νὰ μᾶς ὁδηγήσουν εἰς ἄλλα πολὺ γενικώτερα, ἀλλὰ τῶν ὁποίων αἱ προτάσεις εἴτε εἶναι ἐσφαλμέναι, εἴτε παρουσιάζουν δυσκολίας κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἀληθείας των. Εἰς πλείστας ὅμως περιπτώσεις, αἱ ὑποθέσεις μας ἀποδεικνύονται ὀρθαὶ καὶ καταλήγομεν εἰς συμπεράσματα πολὺ ἐνδιαφέροντα.

Ὁ τρόπος ἐργασίας, εἰς γενικὰς γραμμάς, εἶναι ὁ ἑξῆς:

Δοθέντων ἑνὸς θεωρήματος καὶ τῆς γενικωτέρας προτάσεως τὴν ὁποίαν πορίζόμεθα ἐξ αὐτοῦ, ὑποθέτομεν κατ' ἀρχὰς ὅτι εὑρισκόμεθα εἰς ἀδυναμίαν νὰ ἀποδείξωμεν αὐτὴν ἀπ' εὐθείας καὶ προσπαθοῦμεν νὰ τὴν ἐπαληθεύσωμεν εἰς μερικὰς εἰδικὰς περιπτώσεις. Ἡ ἐπιτυχία τῶν προσπαθειῶν μας τούτων ἀποτελεῖ ἔνδειξιν περὶ τοῦ ἀληθοῦς τῶν γενομένων ὑποθέσεών μας, κατόπιν τῆς ὁποίας εἶναι δικαιολογημένη πλέον ἡ καταβολὴ προσπαθειῶν ὅπως ἐπιτύχωμεν τὴν ἀπόδειξιν τῆς νέας προτάσεως.

Τὰς ἐπιφυλάξεις ταύτας εἶναι ἑπόμενον νὰ ἔχῃ ὁ ἐρευνητής, δεδομένου ὅτι αἱ γενικεύσεις εἰς τὰς ὁποίας ἄγεται δύνανται νὰ θεωρηθοῦν πάντοτε ἀπόρροιαι τῆς διαισθήσεως κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ἐπισφαλεῖς, μὲ ὁσονδήποτε γόνιμον καὶ ἰσχυρὰν διάνοιαν καὶ ἂν ὑποτεθῇ συνοδευομένη αὐτή.

Ἰδοὺ δύο σχετικὰ παραδείγματα.

Ἐκ τῆς προσεκτικῆς μελέτης τῶν ἰδιοτήτων ὡρισμένων ὁμάδων ἐκ τριῶν σημείων κειμένων ἐπ' εὐθείας γραμμῆς καθὼς καὶ τεσσάρων, πέντε ἢ ἓξ ὁμοκυκλικῶν σημείων, καταλήγομεν εἰς τὰς ἑπομένας ὑποθετικὰς προτάσεις:

1) *Ἐὰν τρία ἀνάλογα σημεῖα ἑνὸς δοθέντος σχήματος εὑρίσκωνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος ἀπειρίας ἄλλων σημείων μὲ τὰς αὐτὰς γεωμετρικὰς ἰδιότητας ὅπως τὰ πρῶτα.*

---

28. Σημ. μετ. Ἡ ὀνομασία αὐτὴ ἐπεκράτησεν νομίζομεν καὶ εἰς τὴν ἑλληνικὴν ὁρολογίαν.

2) *Ἐὰν τέσσαρα, πέντε ἢ ἓξ σημεῖα εἶναι ὁμοκυκλικά, ἡ περιφέρεια εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος ἀπειρίας σημείων ἀναλόγων πρὸς τα πρῶτα.*

Ὀνομάζομεν *ἀνάλογα σημεῖα* ἑνὸς δοθέντος σχήματος, τὰ σημεῖα αὐτοῦ τὰ λαμβανόμενα διὰ τῶν αὐτῶν κατασκευῶν καὶ ἔχοντα τὰς αὐτὰς ἰδιότητας. Λ. χ., εἰς τὸ *θεώρημα τοῦ Simson* (§ 22), αἱ προβολαὶ ἑνὸς σημείου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἶναι τρία σημεῖα ἀνάλογα. Τοὐναντίον, τὰ τρία σημεῖα ἅτινα ἐθεωρήθησαν ἐπὶ τῆς *εὐθείας τοῦ Euler* (§§ 111?, 1262) δὲν εἶναι ἀνάλογα, β σει τουλάχιστον τοῦ συνήθους ὁρισμοῦ των. Ἐπειδὴ ταῦτα εἶναι τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τὸ σημεῖον τομῆς Θ τῶν διαμέσων καὶ τὸ ὀρθόκεντρον Η τοῦ τριγώνου. Θὰ ὑποδείξωμεν ἐν τούτοις ἀργότερον (§ 1242 (O), 3) μίαν κοινὴν ἰδιότητα τῶν σημείων αὐτῶν.

Θὰ διατυπώσωμεν καὶ θὰ ἀποδείξωμεν μερικὰς προτάσεις, προκυπτούσας δι' ἐπεκτάσεως ἢ γενικεύσεως ἐκ γνωστῶν θεωρημάτων.

Θεώρημα

293α. **Ἡ εὐθεῖα τοῦ d'Alembert, ἐφ' ἧς κεῖνται τρία κέντρα ὁμοιότητος τριῶν περιφερειῶν, εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων ὁμοιότητος, ἀναλόγων πρὸς τὰ πρῶτα, ἀπειρίας περιφερειῶν [Βλ. §§ 176, 1260].**

Θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν (ε) τῶν ἐξωτερικῶν κέντρων ὁμοιότητος τριῶν περιφερειῶν O, O_1, O_2 καὶ καλέσωμεν ρ, ρ_1, ρ_2 καὶ δ, δ_1, δ_2, τὰς ἀκτῖνας καὶ ἀποστάσεις τῶν κέντρων ἀπὸ τῆς εὐθείας (ε). Θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\frac{\delta}{\rho}=\frac{\delta_1}{\rho_1}=\frac{\delta_2}{\rho_2},$$

ἐξ ἧς γίνεται φανερὸν ὅτι, αἱ περιφέρειαι O_3, O_4 κλπ., διὰ τὰς ὁποίας θὰ συμβαίνῃ

$$\frac{\delta_3}{\rho_3}=\frac{\delta_4}{\rho_4}=\ldots=\frac{\delta}{\rho}$$

θὰ ἔχουν ἐξωτερικὰ κέντρα ὁμοιότητος κείμενα ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε).

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ *ἀπόδειξις τοῦ Monge* (§ 176), ἐφαρμόζεται ἀπ' εὐθείας καὶ διὰ τὰς περιφερείας αὐτάς, ἐπειδὴ αἱ ἀντίστοιχοι σφαῖραι ἐφάπτονται τῶν ἑδρῶν τῆς αὐτῆς διέδρου.

2) Συμπεράσματα ἀνάλογα καὶ διὰ τοὺς τρεῖς ἄλλους ἄξονας ὁμοιότητος τῶν τριῶν περιφερειῶν.

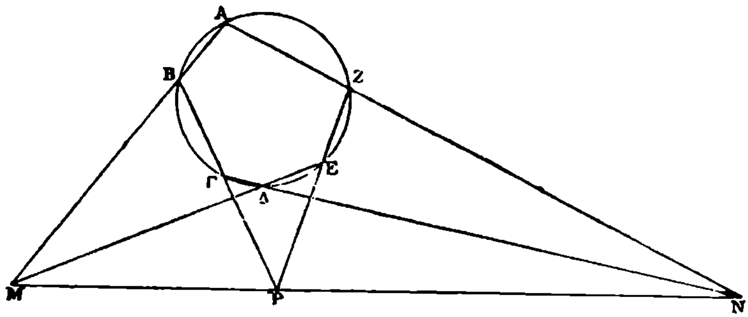
Θεώρημα

293β. **Ἡ εὐθεῖα τοῦ Pascal ἑνὸς ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν ἑξαγώνου εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἀπειρίας ἑξαγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν.**

Ἔστω (O) ἡ περιφέρεια καὶ (ε) ἡ εὐθεῖα· ἀρκεῖ νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν περιφέρειαν ἑξάγωνον διὰ τὸ ὁποῖον αἱ τομαὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε).

Λαμβάνομεν πρὸς τοῦτο δύο τυχόντα σημεῖα Μ, Ν ἐπὶ τῆς (ε) καὶ ἓν ἄλλο Α ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἓν δεύτερον τυχὸν σημεῖον Δ καὶ φέρωμεν τὰς ΜΑ, ΜΔΕ καὶ ΝΑ, ΝΔΓ εὐθείας, τὰ σημεῖα Α καὶ Δ μετὰ τῶν δευτέρων

σημείων τομῆς τῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν μετὰ τῆς περιφερείας (Ο), ὁρίζουν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ΒΓΡ, ΖΕΡ ὀφείλουν νὰ τέμνωνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΝ. Ὅταν τὸ σημεῖον Δ γράφῃ τὴν περιφέρειαν, τὸ σημεῖον Ρ γράφει τὴν εὐθεῖαν (ε).



Σχ. 192.

Θεώρημα

293γ. Ἡ εὐθεῖα τοῦ Simson ἑνὸς δοθέντος τριγώνου, ἡ σχετικὴ πρὸς σημεῖον Μ τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας, εἶναι εὐθεῖα τοῦ Simson δι' ἀπειρίαν τριγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν.

Εἶναι δηλ. ἡ εὐθεῖα αὐτὴ γεωμετρικὸς τόπος τῶν προβολῶν τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ἀπειρίας τριγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν.

Ἔστω ΧΥ ἡ εὐθεῖα καὶ Μ τυχὸν σημεῖον δοθείσης περιφερείας Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν καὶ ἔχον ὡς εὐθεῖαν Simson, σχετικην πρὸς τὸ Μ, τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΧΥ, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Συνδέομεν τὸ σημεῖον Μ μετὰ τυχόντος σημείου Ε τῆς ΧΥ καὶ φέρομεν κάθετον ΑΕΓ ἐπὶ τὴν ΜΕ· ἡ ΑΓ εἶναι μία πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Διὰ νὰ λάβωμεν τὰς δύο ἄλλας, περιγράφομεν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ τρίγωνον ΕΜΓ καὶ διὰ τοῦ σημείου Ζ, καθ' ὃ αὐτὴ τέμνει τὴν ΧΥ, φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΖΒ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 193.

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ *Θεώρημα τοῦ Carnot* (§§ 1234, 2464) ἀποτελεῖ μίαν ἐνδιαφέρουσαν ἐπέκτασιν τῆς ἀνωτέρω προτάσεως. Ἐπειδὴ αἱ ὀρθογωνίως προβάλλουσαι ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ δύνανται νὰ ἀντικατασταθοῦν διὰ ἰσοκλινῶν προβαλλουσῶν καὶ ἡ εὐθεῖα τοῦ Simson διὰ τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς κεῖνται τὰ ἴχνη τῶν τριῶν ἰσοκλινῶν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

2) Τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα δεικνύει ὅτι ὡρισμέναι στοιχειώδεις προτάσεις εἶναι ἐπιδεκτικαὶ ἀξιολόγων ἀναπτύξεων.

Θὰ δώσωμεν μερικὰ παραδείγματα ἐπὶ τοῦ δευτέρου εἴδους ὑποθετικῶν ἐπαγωγῶν (§ 293, δ κλπ.).

Σημείωσις. Ἵνα μία δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι *εὐθεῖα Simson* ἑνὸς τριγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν (O, P), θὰ πρέπει αὕτη νὰ συναντᾷ τὴν ὁμόκεντρον περιφέρειαν τῆς δοθείσης καὶ μὲ ἀκτῖνα τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος P αὐτῆς. Ἐπειδή, δοθέντος ἑνὸς τριγώνου, ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν Simson ὡς πρὸς τὰ διάφορα σημεῖα M τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας, εἶναι μία *ὑποκυκλοειδὴς μὲ τρία σημεῖα ἀνακάμψεως*, δηλ. ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν γράφει ἓν σταθερὸν σημεῖον περιφερείας μὲ ἀκτῖνα τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος P, κυλιομένης, ἄνευ ὀλισθήσεως, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς δοθείσης περιφερείας.

Ἡ καμπύλη αὕτη ὑπῆρξε ἀντικείμενον πολυαρίθμων μελετῶν. Βλέπε ἰδιαιτέρως: N. A., 1870, σελ. 202, 256, L. Painvin· J. M. S., 1884, σελ. 169 ἕως 178, G. de Longchamps· N. A. 1901, σελ. 168, Duporc, 1902, σελ. 206, Fréchet. Ἐπίσης τὸ *Traité des courbes remarquables* ὑπὸ Gomes Teixeira, τ. 2, σελ. 174 (1909).

Θεώρημα

293 δ. Ἐὰν τέσσαρα σημεῖα ΑΒΓΔ εἶναι ὁμοκυκλικά, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τρία ἐξ αὐτῶν Α, Β, Γ ὡς σταθερὰ καὶ τὴν περιφέρειαν ὡς γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων Δ, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ γωνία ΑΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΓ ἢ παραπληρωματική αὐτῆς.

Ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Θεώρημα

293 ε. Ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται διὰ ἀπειρίας σημείων ἀναλόγων πρὸς τὰ πρῶτα.

Πράγματι, ὑπάρχει ἀπειρία τριγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν περιφέρειαν (ΑΒΓ) καὶ ἐχόντων τὸ αὐτὸ ὀρθόκεντρον Η μετὰ τοῦ ΑΒΓ (§ 130, 2)· ἡ δὲ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων τῶν τριγώνων τούτων εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τοῦ ΑΒΓ, ἐπειδὴ ἡ ἀκτίς της εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος R τῆς (ΑΒΓ) καὶ τὸ κέντρον της τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΟΗ (§ 28, 1) καὶ 2).

Παρατήρησις. Τὰ ἀνωτέρω ὁδηγοῦν εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ ἑπομένου ὑποθετικοῦ θεωρήματος:

Θεώρημα

293 ζ. Ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ ἀξιοσημειώτων σημείων ἑνὸς δοθέντος τριγώνου καὶ τῆς ὁποίας τὸ κέντρον καὶ ἡ ἀκτὶς εἶναι ἀνεξάρτητα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, διέρχεται δι' ἀπειρίας ἄλλων σημείων ἀναλόγων πρὸς τὰ πρῶτα.

Ἰδοὺ μερικαὶ εἰδικαὶ περιπτώσεις:

1) *Ἡ περιφέρεια τῶν ὀκτὼ σημείων, ἡ περιφέρεια τῶν ἴσων ροπῶν, ἡ ἔχουσα διάμετρον ΟΘ, εἶναι κοινὴ ἀπειρίας τριγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν (Ο) καὶ ἐχόντων τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους Θ*·(§ 1185 β).

2) *Ἡ περιφέρεια τοῦ Brocard, ἡ ἔχουσα διάμετρον ΟΚ, εἶναι κοινὴ*

ἀπειρίας τριγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν O καὶ ἐχόντων τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ Lemoine K (§ 2242).

Παρατηρήσεις. 1) Αἱ περιφέρειαι τοῦ Brocard καὶ ὀκτὼ σημείων ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὰς θέσεις τῶν O, K καὶ Θ.

2) Κατ' ἀναλογίαν, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν καὶ τὴν ἀκόλουθον ὑποθετικὴν πρότασιν:

Θεώρημα

293η. *Ἡ ἐγγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τρίγωνον εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῶν πλευρῶν ἀπειρίας τριγώνων, ἀναλόγων πρὸς τὸ δοθέν, ἐὰν ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.*

Παραδείγματα:

1) *Ἐὰν ἓν τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν (O) καὶ περιγεγραμμένον εἰς ἄλλην (I), ἡ δευτέρα περιφέρεια εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῶν πλευρῶν ἀπειρίας τριγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν (O) καὶ περιγεγραμμένων εἰς τὴν (I).*

Τὸ θεώρημα, πράγματι, τοῦ Euler δίδει τὴν σχέσιν

$$d^2 = R(R - 2\rho),$$

ἥτις εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν πλευρῶν (§ 1182, α, β). Ὥστε...

2) *Δοθεῖσα περιφέρεια εἶναι ἡ περιβάλλουσα ἀπειρίας τριγώνων ἐχόντων τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ Gergonne N* (§ 1242 α). Βλ. ἐπ. (§ 293 ι).

Θεώρημα

293θ. *Ἡ ἐγγεγραμμένη περιφέρεια εἰς ἑξάγωνον* (E) *δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ περιβάλλουσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἀπειρίας περιγεγραμμένων εἰς αὐτὴν ἑξαγώνων ἐχόντων τὸ αὐτὸ σημεῖον Brianchon μετὰ τοῦ πρώτου.*

Κατὰ τὸ *θεώρημα τοῦ Brianchon* (G., n° 807), γνωρίζομεν ὅτι: *Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ἀπέναντι κορυφὰς ἑνὸς ἑξαγώνου περιγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου* (καὶ τὸ ὁποῖον καλεῖται *σημεῖον τοῦ Brianchon).* Τὰ δὲ τρία σημεῖα τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν ἑξαγώνου (E'), τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν χορδῶν ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου ἑξαγώνου, εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, *τῆς εὐθείας τοῦ Pascal.*

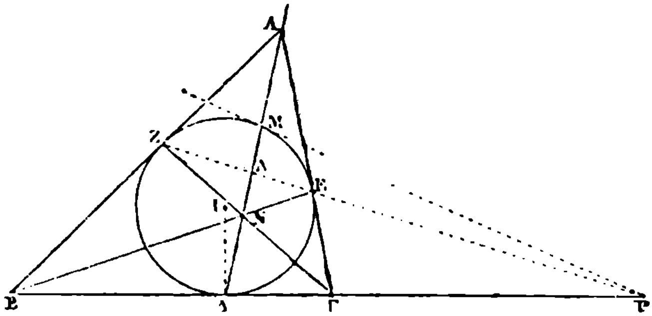
Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα αὕτη (ε) εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ σημείου Brianchon τοῦ ἑξαγώνου (E), γίνεται φανερὸν ὅτι, εἰς κάθε ἑξάγωνον τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὴν περιφέρειαν καὶ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν Pascal μετὰ τοῦ (E') (§ 293 β), ἀντιστοιχεῖ ἓν περιγεγραμμένον ἑξάγωνον ἔχον μετὰ τοῦ ἑξαγώνου (E) τὸ αὐτὸ σημεῖον Brianchon (τὸν πόλον τῆς (ε)).

Θεώρημα

293ι. *Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἀπειρίαν τριγώνων ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἐγγεγραμμένην περιφέρειαν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ* Gergonne N.

Τὸ *σημεῖον τοῦ Gergonne* ἑνὸς τριγώνου εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν τῶν ἑνουσῶν τὰς κορυφὰς μετὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου (§ 1242 α).

Διὰ τοῦ σημείου Ν φέρομεν εὐθεῖαν ΑΝΔ καὶ τὰς ἐφαπτομένας ΔΡ, ΜΡ τῆς δοθείσης περιφερείας (Ι). Ἔστω δὲ ΑΒΓ ἓν τῶν ζητουμένων τριγώνων. Τὸ σημεῖον Ρ εἶναι ὁ πόλος τῆς εὐθείας ΑΝΔ πρὸς τὴν περιφέρειαν (Ι) καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἤ, ἄλλως, ἡ εὐθεῖα ΑΝΔ εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ σημείου Ρ. Ἑπομένως, αἱ διαγώνιοι ΒΕ, ΓΖ τοῦ τετραπλεύρου ΒΓΕΖ τέμνονται ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης ΑΔ.



Σχ 194.

Ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ συνίσταται εἰς τὴν ἀγωγὴν εὐθείας ΡΕΛΖ, τεμνούσης τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς σημεῖα Ζ, Ε τοιαῦτα, ὥστε ἡ εὐθεῖα αὕτη, αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ Ζ καὶ Ε καὶ ἡ (δοθεῖσα) ἐφαπτομένη εἰς τὸ Δ νὰ ὁρίζουν τετράπλευρον ΒΓΕΖ ἔχον ὡς σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του τὸ δοθὲν σημεῖον Ν. Ἤ, τοιαύτης, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΔΝΑ νὰ τέμνῃ αὐτὴν εἰς σημεῖον Λ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Δ πρὸς τὰ Ν καὶ Α, ὁπότε καὶ τὸ τμῆμα ΔΜ θὰ διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν Λ καὶ Α.

Ἄς θέσωμεν: $ΔΜ = μ$, $ΔΝ = ν$, $ΔΛ = x$, $ΔΑ = y$.

Ἐπειδὴ αἱ δύο τετράδες σημείων Δ, Λ, Ν, Α, καὶ Δ, Μ, Λ, Α θὰ εἶναι ἁρμονικαί, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις

$$(ΔΛΝΑ) = -1, \quad (ΔΜΛΑ) = -1,$$

ἢ

$$\frac{ΔΝ}{ΝΛ} = \frac{ΔΑ}{ΛΑ}, \quad \frac{ΔΛ}{ΛΜ} = \frac{ΔΑ}{ΜΑ}$$

δυναμένας νὰ γραφοῦν καὶ

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{ν} + \frac{1}{y}, \quad \frac{2}{μ} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Ἐκ τῶν τελευταίων τούτων ἕπεται ὅτι τὰ τμήματα ΔΛ, ΔΑ ἔχουν ὡς μήκη

$$x = \frac{3μν}{2ν + μ}, \quad y = \frac{3μν}{4ν - μ},$$

εἶναι δηλαδὴ τέταρτα ἀνάλογα γνωστῶν ἄλλων μηκῶν καὶ ἐπομένως εὐκόλως κατασκευάσιμα. Ἀρκεῖ ἄλλωστε νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἓν μόνον ἐξ αὐτῶν.

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα λύεται καὶ κατὰ διαφόρους ἄλλους τρόπους (§ 1546 κ καὶ ἑπ.).

V I

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

---

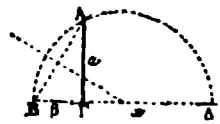
§ 1. *Κατασκευὴ τῶν τύπων*

294. *Χρῆσις τῆς Ἀλγέβρας.* Διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς ἀλγεβρικὰς μεθόδους πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς Γεωμετρίας, θεωροῦμεν ὡς ἀγνώστους ποσότητας ἓν ἢ περισσότερα ἐκ τῶν πρὸς προσδιορισμὸν μεγεθῶν· ἀκολούθως, καταστρώνομεν τόσας [ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων] ἐξισώσεις ὅσοι εἶναι οἱ ἄγνωστοι, λύομεν τὸ σύστημα αὐτῶν καὶ κατασκευάζομεν τὰ εὑρεθέντα μεγέθη.

294α. ***Βασικοὶ τύποι.*** Αἱ βασικαὶ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις πρὸς κατασκευὴν εἶναι αἱ ἀκόλουθοι :

(α) $\left\{ x = \dfrac{\alpha\beta}{\gamma} \quad \text{ἢ} \quad \dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{x}{\beta} \right\}$, τετάρτη ἀνάλογος.

(β) $\left\{ x = \dfrac{\alpha^2}{\beta} \quad \text{ἢ} \quad \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{x}{\alpha} \right\}$, τρίτη ἀνάλογος.



Σχ. 195.

Ἐκτὸς τῆς συνήθους κατασκευῆς τῆς τετάρτης ἀναλόγου, χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὸν ἑπόμενον τρόπον :

Λαμβάνομεν ΒΓ $=\beta$, ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ Γ τμῆμα ΓΑ $=\alpha$ καὶ γράφομεν περιφέρειαν διὰ τῶν Α καὶ Β ἔχουσαν τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς ΒΓ. Θὰ εἶναι $x=\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ (Σχ. 195).

(γ) $\left\{ x = \sqrt{\alpha\beta} \quad x^2 = \alpha\beta \right\}$, μέση ἀνάλογος.

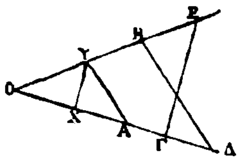
(δ) $\left\{ x = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad x^2 = \alpha^2+\beta^2 \right\}$ καὶ $\left\{ x = \sqrt{\alpha^2-\beta^2} \quad x^2 = \alpha^2-\beta^2 \right\}$ Ὑποτείνουσα καὶ κάθετοι πλευραὶ ὀρθογ. τριγώνου.

(ε) $x = \sqrt{\alpha^2 \pm \beta\gamma}$ $\Big\{$ Ἀντικαθιστῶμεν τὸ γινόμενον βγ διὰ τετραγώνου καὶ ἀναγόμεθα εἰς τοὺς τύπους (δ)

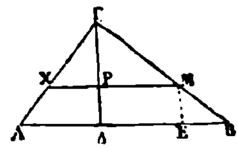
(ζ) $x=\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon}$. Θέτοντες $\frac{\alpha\beta}{\delta}=y$, ἀναγόμεθα εἰς $x=\frac{y\gamma}{\varepsilon}$.

Πρέπει νὰ κατασκευασθοῦν δηλ. δύο τέταρται ἀνάλογοι. Τὸ σχῆμα 196 δίδει μίαν ἀπ' εὐθείας κατασκευὴν τοῦ μήκους x:

Λαμβάνομεν $OA=\alpha$ $OB=\beta$, $O\Gamma=\gamma$, $O\Delta=\delta$, $OE=\varepsilon$ καὶ φέρομεν τὰς ΒΔ, ΓΕ. Διὰ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΑΥ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΒ καὶ διὰ τοῦ Υ τὴν ΥΧ παράλληλον πρὸς τὴν ΕΓ. Ἡ ΟΧ ἔχει τὸ ζητούμενον μῆκος x.



Σχ. 196.



Σχ. 197.

$$(\eta)\begin{cases} x=\alpha\sqrt{\frac{\mu}{\nu}} \\ \frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{\mu}{\nu}\end{cases}$$

$$(\theta)\begin{cases} x=\frac{\mu.\alpha^2}{\beta^2} \\ \frac{x}{\mu}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}\end{cases}$$

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας (Σχ. 197), λαμβάνομεν μήκη $\Gamma A=\alpha$, $\Gamma B=\beta$ καὶ φέρομεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης καὶ ἀπὸ τοῦ Δ λαμβάνομεν $\Delta E=\mu$, φέρομεν τὴν κάθετον ἐπ' αὐτὴν ΕΜ καὶ ἀπὸ τοῦ Μ παράλληλον ΜΧ πρὸς τὴν ΑΒ. Θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{PX}{PM}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

Διπλοῦν ῥιζικόν.

296 (ι). $$x=\sqrt{\alpha^2\pm\sqrt{\beta^4-\gamma^4}}$$

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\beta^4-\gamma^4=(\beta^2+\gamma^2)\ (\beta^2-\gamma^2)$$

καὶ νὰ θέσωμεν

$$\beta^2+\gamma^2=\mu^2,\ \beta^2-\gamma^2=\nu^2,$$

ὁπότε,

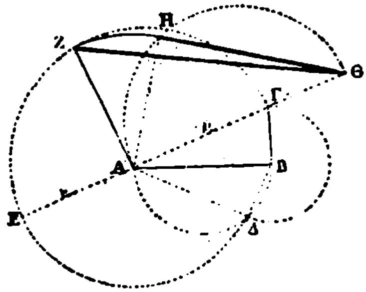
$$x=\sqrt{\alpha^2\pm\sqrt{\mu^2.\nu^2}}=\sqrt{\alpha^2\pm\mu\nu}.$$

Ἀναγόμεθα δηλ. εἰς τοὺς τύπους (ε). Ἐπίσης:

Ἔστω $AB = \beta$ (Σχ. 198). Ἐπὶ τῆς AB ὡς διαμέτρου γράφομε ἡμιπεριφέρειαν, ὑψοῦμεν ἐπὶ τὴν AB κάθετον εἰς τὸ σημεῖον B καὶ λαμβάνομεν $B\Gamma = B\Delta = \gamma$.

Θὰ ἔχωμεν

$$A\Gamma^2 = \mu^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad A\Delta^2 = \nu^2 = \beta^2 - \gamma^2.$$



Σχ. 198.

Λαμβάνομεν ἀκολούθως $AE = \nu$, ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν AZ μέχρι τῆς περιφερείας διαμέτρου EΓ, ὁπότε

$$AZ^2 = \mu\nu,$$

καὶ ἐπὶ τῆς AΓ λαμβάνομεν τμῆμα $A\Theta = \alpha$. Θὰ ἔχωμεν

$$Z\Theta^2 = \alpha^2 + \mu\nu,$$

τὸ δὲ σημεῖον H ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον AΘ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ A, $AH = AZ = \sqrt{\mu\nu}$, δίδει

$$\Theta H^2 = \alpha^2 - \mu\nu.$$

(κ) $$x = \sqrt{\alpha^2 \pm \sqrt{\beta^4 + \gamma^4}}.$$

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\beta^4 + \gamma^4 = \gamma^2 \left[\frac{\beta^4}{\gamma^2} + \gamma^2\right].$$

Ἐὰν θέσωμεν $\frac{\beta^2}{\gamma} = \delta$, $\delta^2 + \gamma^2 = \zeta^2$, θὰ εἶναι

$$\beta^4 + \gamma^4 = \gamma^2(\delta^2 + \gamma^2) = \gamma^2\zeta^2$$

ὁπότε

$$x = \sqrt{\alpha^2 \pm \gamma\zeta}.$$

Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ μήκους τούτου, λαμβάνομεν $A\Gamma = \gamma$, $\Gamma B = \beta$ (Σχ. 199) καὶ γράφομεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν ABΔA, ὁπότε:

$$\Gamma\Delta = \delta = \frac{\beta^2}{\gamma} \text{ (§ 294, β) } \quad \text{ἢ} \quad \delta^2 = \frac{\beta^4}{\gamma^2}.$$

Λαμβάνομεν $\Gamma E = \delta$:

$$AE^2 = \gamma^2 + \delta^2 = \zeta^2.$$

ἐπίσης ΑΖ = ΑΕ = ζ καὶ εἰς τὸ Α ὑψοῦμεν κάθετον ΑΘ ἐπὶ τὴν ΑΖ μέχρι τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΓΖ:

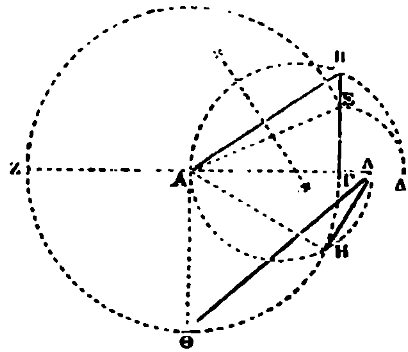
$$\mathrm{A}\Theta^2 = \mathrm{AZ} \times \mathrm{A}\Gamma = \zeta\gamma.$$

Ἐὰν ΑΛ = α, εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$\Theta\Lambda^2 = \alpha^2 + \zeta\gamma \quad \text{ἢ} \quad \Theta\Lambda = \sqrt{\alpha^2 + \sqrt{\beta^4 + \gamma^4}}$$

$$\mathrm{H}\Lambda^2 = \alpha^2 - \zeta\gamma \quad \text{ἢ} \quad \mathrm{H}\Lambda = \sqrt{\alpha^2 - \sqrt{\beta^4 + \gamma^4}},$$

ὅπου Η κοινὸν σημεῖον της περιφερείας (Α, ΑΘ) καὶ τῆς μὲ διάμετρον ΑΛ.



Σχ. 199.

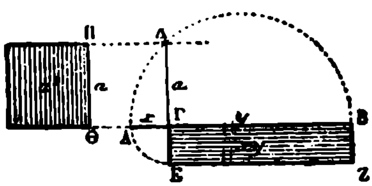
Πρόβλημα

296 (1). Νὰ κατασκευασθοῦν ἀπ' εὐθείας αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ μῆκος x.

$$x^2 \pm \pi\chi \pm \kappa^2 = 0,$$

ὅπου π καὶ κ δοθέντα μήκη.

Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ μορφαὶ τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ ἡ ἐξίσωσις αὔτη εἶναι αἱ ἀκόλουθοι τέσσαρες.



Σχ. 200.

(1) $x^2 - \pi\chi = -\kappa^2$

(2) $x^2 - \pi\chi = \kappa^2$

(3) $x^2 + \pi\chi = +\kappa^2$

(4) $x^2 + \pi\chi = -\kappa^2$.

Ἡ *πρώτη ἐξίσωσις* δύναται νὰ γραφῇ

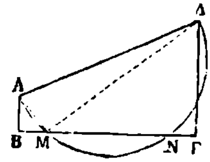
$$x(\pi - \chi) = \kappa^2.$$

Ἐπειδὴ $x + (\pi - \chi) = \pi$, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τό:

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ κ² καὶ τοῦ ἀθροίσματος δύο διαδοχικῶν πλευρῶν π.

Γνωρίζομεν ὅτι θὰ πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν ἡμιπεριφέρειαν μὲ διάμετρον ΑΒ = π, νὰ ὑψώσωμεν κάθετον ΘΠ = κ καὶ ἐκ τοῦ Π νὰ φέρωμεν παράλληλον ΠΔ μέχρι τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἡ ἐκ τοῦ Δ κάθετος ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ ὁρίζει δύο τμήματα ΑΓ, ΓΒ, ἅτινα εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1).

297. *Ἄλλη κατασκευή.* Ἐὰν ὁ γνωστὸς ὅρος $κ^2$ τῆς μορφῆς (1) ἔχῃ δοθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν γινομένου, $κ^2 = μν$, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς:



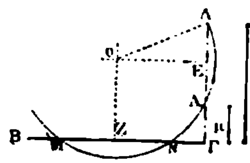
Σχ. 201.

Εἰς τὰ ἄκρα τμήματος ΒΓ = π ὑψοῦμεν καθέτους ΒΑ = μ, ΓΔ = ν καὶ θεωροῦμεν τὰ σημεῖα τομῆς Μ, Ν τῆς ΒΓ καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας μὲ διάμετρον ΑΔ. Γνωρίζομεν ὅτι, ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΜ, ΔΓΜ, θὰ ἔχωμεν

$$ΒΜ \,.\, ΜΓ = ΑΒ \,.\, ΓΔ = μ \,.\, ν, \qquad (\S\ 24)$$

δηλ. τὰ τμήματα ΒΜ, ΜΓ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1).

Παρατήρησις. Ἡ ἑπομένη κατασκευὴ εἶναι ἐπίσης, ὡς ἡ προηγουμένη, ἁπλῆ καὶ εὐκολώτερον δικαιολογεῖται.



Σχ. 202.

Εἰς τὸ ἄκρον Γ τοῦ τμήματος ΒΓ = π ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τὰ τμήματα

$$ΓΑ = μ, \quad ΓΔ = ν.$$

Εἰς τὰ μέσα τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ ὑψοῦμεν καθέτους τεμνομένας εἰς τὸ Ο καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Ο, ΟΔ). Θὰ ἔχωμεν

$$ΓΝ \,.\, ΓΜ = ΓΝ \,.\, ΝΒ = ΓΑ \,.\, ΓΔ = μ \,.\, ν,$$

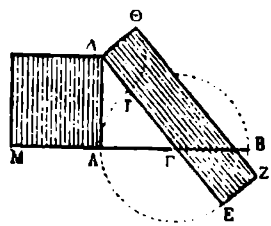
δηλ. τὰ μήκη ΓΝ, ΒΝ θὰ εἶναι αἱ ρίζαι πάλιν τῆς (1).

298. *Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις* δύναται νὰ γραφῇ

$$x(χ - π) = κ^2.$$

Ἐπειδὴ $x - (χ - π) = π$, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τό:

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ $κ^2$ καὶ τῆς διαφορᾶς δύο διαδοχικῶν πλευρῶν π.



Σχ 203

Γνωρίζομεν ὅτι θὰ πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν περιφέρειαν μὲ διάμετρον ΑΒ = π, νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην ΑΔ = κ καὶ τὴν τέμνουσαν ΔΙΓΕ. Ἡ εὐθεῖα ΔΕ καὶ τὸ ἐξωτερικὸν τῆς περιφερείας τμῆμα αὐτῆς ΔΙ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2).

299. *Δευτέρα κατασκευή.* Ἐὰν $κ^2 = μν$, ἐργαζόμεθα ὡς καὶ προηγουμένως:

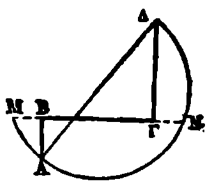
Είς τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος $ΒΓ = π$ (Σχ. 204) ὑψοῦμεν κάθετα τμήματα ἀντιθέτων φορῶν

$$ΒΑ = μ, \quad ΓΔ = ν$$

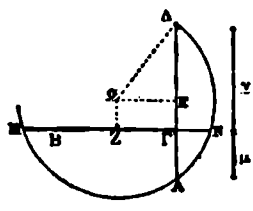
καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν ΜΑΝΔ μὲ διάμετρον ΑΔ. Θὰ ἔχωμεν (§ 24, *Παρατήρησις*):

$$ΜΒ \, . \, ΜΓ = ΑΒ \, . \, ΓΔ = μ \, . \, ν.$$

Παρατήρησις. Μὲ ἐλαφρὰν τροποποίησιν τῆς κατασκευῆς τῆς παρατηρήσεως τῆς § 297, ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον (Σχ. 205). Εἰς τὸ ἄκρον Γ τοῦ τμήματος $ΒΓ = π$ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τῆς



Σχ. 204.



Σχ. 205.

ὁποίας λαμβάνομεν $ΓΑ = μ$, $ΓΔ = ν$. Εἰς τὰ μέσα τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ φέρομεν καθέτους τεμνομένας εἰς τὸ Ο καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Ο,ΟΔ). Θὰ ἔχωμεν

$$ΓΜ \, . \, ΓΝ = ΓΑ \, . \, ΓΔ = μ \, . \, ν.$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4), ἡ πρώτη ἀνάγεται εἰς τὴν (2) καὶ ἡ δευτέρα δὲν ἔχει προφανῶς ῥίζας πραγματικάς.

Πρόβλημα

300. *Νὰ κατασκευασθοῦν ἀπ' εὐθείας αἱ ῥίζαι διτετραγώνου ἐξισώσεως.*

(5) $x^4 - α^2x^2 + β^4 = 0.$	Θέτομεν	$y^2 - \frac{α^2}{β}y + β^2 = 0$ (5′)
(6) $x^4 - α^2x^2 - β^4 = 0.$	$x^2 = βy$	$y^2 - \frac{α^2}{β}y - β^2 = 0$ (6′)
(7) $x^4 + α^2x^2 + β^4 = 0.$	καὶ αἱ ἐξισώσεις αὗται μετατρέπονται εἰς τὰς	Ῥίζαι φανταστικαί. (7′)
(8) $x^4 + α^2x^2 - β^4 = 0.$		$y^2 + \frac{α^2}{β}y - β^2 = 0$ (8′)

Μετὰ τὴν κατασκευὴν τῶν μηκῶν y, τὰ x κατασκευάζονται ὡς μέσα ἀνάλογα τῶν μηκῶν y καὶ $β$.

Παράδειγμα διὰ τὴν μορφὴν (5′). Διὰ τῶν Α καὶ Β (Σχ. 206), γράφομεν περιφέρειαν ΒΑΔ ἔχουσαν τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς ΒΓ. Θὰ ἔχωμεν

$$ΓΔ = \frac{α^2}{β}.$$

'Επὶ τῆς ΓΔ ἀκολούθως γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, λαμβάνομεν ΓΒ'$=\beta$ καὶ ἐκ τοῦ Β' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ. Τὰ μήκη ΓΕ, ΔΕ εἶναι αἱ ρίζαι (y) τῆς ἐξισώσεως (5'). 'Επειδὴ

$$\Gamma E \,.\, E\Delta = \beta^2$$

καὶ
$$\Gamma E + E\Delta = \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

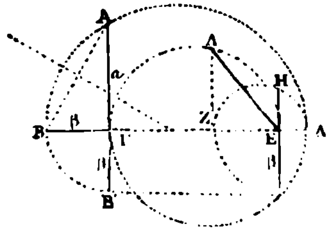
Πρὸς κατασκευὴν τῶν μηκῶν x, λαμβάνομεν ΕΖ $=\beta$, γράφομεν τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον ΖΔ καὶ ὑψοῦμεν κάθετον ΕΗ μέχρι αὐτῆς. Θὰ ἔχωμεν

$$EH^2 = \Delta E \,.\, \beta, \quad \text{δηλ.} \quad x^2 = HE^2$$

'Επίσης,

$$x^2 = E\Lambda^2,$$

ἀφοῦ
$$E\Lambda^2 = \beta \,.\, \Gamma E = \beta y.$$



Σχ. 206.

Αἱ τέσσαρες ρίζαι (x) εἶναι

$$\pm EH, \pm E\Lambda.$$

Παρατήρησις. Σπανίως κατασκευάζομεν ἀπ' εὐθείας τὰς ρίζας τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως, ἐνῶ εἶναι πολὺ χρήσιμος ἡ κατασκευὴ ἐκείνων τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως εἰς ὅλα τὰ ζητήματα τῆς Γεωμετρίας εἰς τὰ ὁποῖα ἀπαιτεῖται αὕτη.

§ II. *Χρῆσις τῆς ἀλγεβρικῆς μεθόδου*

Πρόβλημα

301. Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον τοιοῦτον, ὥστε δύο διαδοχικαὶ πλευραί του νὰ πληροῦν ἕνα τῶν ἀκολούθων ὅρων :

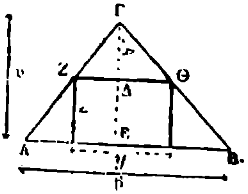
(α) *Τὸ ἄθροισμά των νὰ εἶναι δοθὲν μῆκος λ.*
(β) *'Η διαφορά των νὰ εἶναι δοθὲν μῆκος δ.*
(γ) *'Ο λόγος των ἴσος πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων μηκῶν μ, ν.*
(δ) *Τὸ γινόμενόν των, ἢ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, δοθὲν κ^2.*
(ε) *Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των δοθὲν τετράγωνον κ^2.*
(ζ) *'Η διαφορὰ τῶν τετραγώνων των δοθὲν τετράγωνον κ^2.*

'Εὰν παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς βάσεως τοῦ ζητουμένου ἑκάστοτε ὀρθογωνίου διὰ y καὶ τὸ τοῦ ὕψους διὰ z, οἱ ὅροι αὐτοὶ ἐκφράζονται ἀλγεβρικῶς διὰ τῶν σχέσεων :

(α)	$y + z = \lambda$	(δ)	$yz = \kappa^2$
(β)	$y - z = \delta$	(ε)	$y^2 + z^2 = \kappa^2$
(γ)	$\frac{y}{z} = \frac{\mu}{\nu}$	(ζ)	$y^2 - z^2 = \kappa^2$

'Αρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τοῦ σημείου Δ (Σχ. 207). Θέ-

τομεν πρὸς τοῦτο $ΓΔ = x$ καὶ ἐκφράζομεν τὰ μήκη y, z, συναρτήσει τῶν γνωστῶν $β$, $υ$ καὶ τοῦ ἀγνώστου x. Θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 207.

$$\frac{ΓΔ}{ΓΕ} = \frac{ΖΘ}{ΑΒ} \quad ἢ \quad \frac{x}{υ} = \frac{y}{β}.$$

ὅθεν

$$y = \frac{βx}{υ}. \qquad (1)$$

Ἐπίσης,

$$z = υ - x. \qquad (2)$$

Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ συνθήκη τὴν ὁποίαν ὀφείλουν νὰ πληροῦν τὰ μήκη y καὶ z, αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν. Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ ἐξετάσωμεν ἀπὸ κοινοῦ τὰς ἀναλόγους περιπτώσεις.

Πρόβλημα

302. Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν πλευρῶν αὐτοῦ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος $λ$.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐλύθη ἤδη (§§ 190 καὶ 256), διὰ τῆς χρήσεως τῶν γεωμετρικῶν τόπων. Ἰδοὺ ἡ ἀλγεβρικὴ του λύσις.

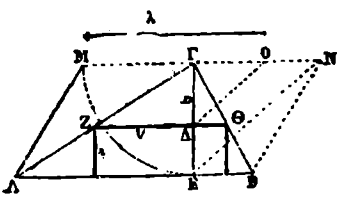
(α) Ἐπειδὴ $y + z = λ$, ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) τῆς προηγουμένης παραγράφου, λαμβάνομεν

$$\frac{βx}{υ} + υ - x = λ$$

ἢ

$$x = \frac{υ(λ - υ)}{β - υ},$$

τετάρτη ἀνάλογος τῶν μηκῶν $υ$, $λ - υ$, $β - υ$.



Σχ. 208

Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ μήκους x, λαμβάνομεν ἐπὶ τυχούσης εὐθείας διὰ τῆς κορυφῆς Γ (Σχ. 208) μήκη $ΓΜ = υ$, $ΜΝ = ΑΒ = β$, $ΜΟ = λ$, ὁπότε $ΓΝ = β - υ$, καὶ $ΓΟ = λ - υ$. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΝΕ καὶ ἐκ τοῦ Ο τὴν παράλληλον πρὸς αὐτὴν ΟΔ. Τὸ μῆκος ΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον x.

(β) Ἐπειδὴ $y - z = δ$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{βx}{υ} - (υ - x) = δ$$

ἢ

$$x = \frac{υ(δ + υ)}{β + υ},$$

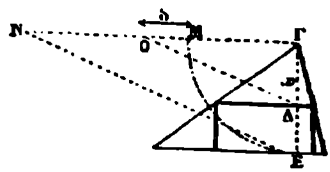
τετάρτη ἀνάλογος πάλιν τῶν μηκῶν $υ$, $δ + υ$, $β + υ$.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ μήκους x, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς τυχού-

σης εὐθείας διὰ τοῦ Γ μήκη ΓΜ $= \upsilon$, ΜΝ $= \beta$, ΜΟ $= \delta$. Φέρομεν τὴν ΝΕ καὶ ἐκ τοῦ Ο παράλληλον πρὸς αὐτὴν ΟΔ. Ἐπειδὴ

$$\frac{\text{ΝΓ}}{\text{ΟΓ}} = \frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΓΔ}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\upsilon + \beta}{\upsilon + \delta} = \frac{\upsilon}{x},$$

τὸ μῆκος ΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον x.



Σχ. 209.

Ἡ διερεύνησις τῶν λύσεων τῶν προβλημάττων (α) καὶ (β) εἶναι πολὺ ἐνδιαφέρουσα.

Πρόβλημα

308. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον τοιοῦτον, ὥστε:

1) *Ὁ λόγος δύο διαδοχικῶν πλευρῶν νὰ εἶναι δοθεὶς* $\frac{\mu}{\nu}$.

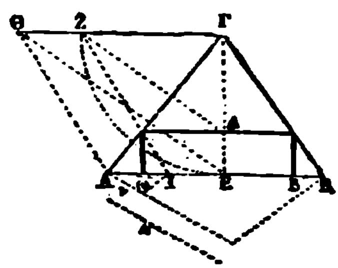
2) *Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν πλευρῶν νὰ εἶναι δοθὲν* κ^2.

(γ) Θὰ ἔχωμεν $\frac{y}{z} = \frac{\mu}{\nu}$ ἢ $\dfrac{\frac{\beta x}{\upsilon}}{\upsilon - x} = \frac{\mu}{\nu}$, ὅθεν

$$x = \frac{\mu\upsilon^2}{\mu\upsilon + \nu\beta} = \frac{\nu^2}{\upsilon + \frac{\nu}{\mu}\beta}$$

ἢ $$x = \frac{\upsilon^2}{\upsilon + \omega},$$

ἐὰν θέσωμεν $\frac{\nu}{\mu}\beta = \omega$.



Σχ. 210.

Μετὰ τὴν κατασκευὴν (κατὰ τὸ σχῆμα) τῆς τετάρτης ἀναλόγου $\omega =$ ΑΙ, ἐπειδὴ καὶ τὸ μῆκος

$$x = \frac{\upsilon \cdot \upsilon}{\upsilon + \kappa},$$

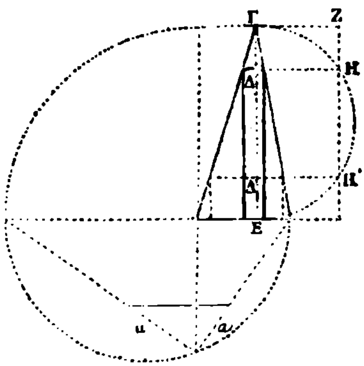
εἶναι ἐπίσης τετάρτη ἀνάλογος, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ΓΖ $= \upsilon$, ΖΘ $= \omega$ καὶ νὰ φέρωμεν τὴν ΘΕ. Ἡ ἐκ τοῦ Ρ παράλληλος πρὸς αὐτὴν ΖΔ ὁρίζει τὸ μῆκος ΓΔ $= x$.

303α. Παρατηρήσεις. 1) Ἐὰν $\frac{\mu}{\nu} = 1$, τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τετράγωνον καὶ $x = \frac{\upsilon^2}{\upsilon + \beta}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ λάβωμεν $ZΘ = \beta$ καὶ θὰ συνεχίσωμεν ὡς ἀνωτέρω.

2) Τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἤδη γραφικῶς διὰ δύο μεθόδων: διὰ τῆς *χρήσεως τῶν γεωμετρικῶν τόπων* (§ 99 γ) καὶ διὰ τῆς *ὁμοιότητος* (§ 209). Δι' ἄλλων ἐπίσης μεθόδων ἐλύθη καὶ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα τῆς ἐγγραφῆς ὀρθογωνίου δοθέντος ἐμβαδοῦ (§ 202).

(δ) Θὰ πρέπει νὰ συμβαίνῃ

$$yz = \kappa^2 \quad ἢ \quad \frac{\beta x}{\upsilon} \cdot (\upsilon - x) = \kappa^2, \qquad ὅθεν \quad x(\upsilon - x) = \frac{\upsilon}{\beta}\kappa^2.$$



Σχ. 211.

Δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν πρῶτον τύπον τῆς § 296 (λ)· πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν πρῶτον τετράγωνον μὲ ἐμβαδὸν

$$\mu^2 = \frac{\upsilon}{\beta}\alpha^2$$

(πρόβλημα η, § 293) καὶ γράφομεν

$$x(\upsilon - x) = \mu^2.$$

Ἐπὶ τοῦ ὕψους υ ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, λαμβάνομεν $ΓZ = \mu$ καὶ φέρομεν τὴν ZHH' παράλληλον πρὸς τὴν ΓE. Τὰ μήκη ΓΔ, ΓΔ' εἶναι αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (δ).

Τὸ μῆκος μ δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ $\frac{\upsilon}{2}$. Διὰ τὴν ὁριακὴν αὐτὴν τιμήν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι

$$\frac{\upsilon}{\beta}\alpha^2 = \frac{\upsilon^2}{4}.$$

Τὸ μεγαλύτερον ὀρθογώνιον ἀντιστοιχεῖ εἰς $x = \frac{\upsilon}{2}$.

3) Καταλήγομεν οὕτω εἰς ἓν θεώρημα, τὸ ὁποῖον θὰ μᾶς δοθῇ εὐκαιρία νὰ ἀποδείξωμεν κατὰ διαφόρους τρόπους:

303β. Θεώρημα. Τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον ἐκ τῶν ἐγγραφομένων εἰς τρίγωνον ἔχει ἄνω βάσιν τὴν συνδέουσαν εὐθεῖαν τὰ μέσα δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Πρόβλημα

304. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν πλευρῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν τετράγωνον κ^2.

Τὸ πρῶτον μέρος τοῦ προβλήματος ἐλύθη ἤδη γραφικῶς (§ 193)· ἰδοὺ ἡ ἀλγεβρικὴ λύσις καὶ τῶν δύο μερῶν.

(ε) Θὰ ἔχωμεν

$$y^2 + z^2 = \kappa^2 \quad \text{ἢ} \quad \left(\frac{\beta x}{\upsilon}\right)^2 + (\upsilon - x)^2 = \kappa^2$$

ὅθεν

$$x^2 - \frac{2\upsilon^3}{\beta^2 + \upsilon^2}\, x = \frac{\kappa^2\upsilon^2 - \upsilon^4}{\beta^2 + \upsilon^2}.$$

Ἀντὶ νὰ κατασκευάσωμεν ἀπ' εὐθείας τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως ταύτης, λύομεν αὐτήν· εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{\upsilon^3}{\beta^2 + \upsilon^2} \pm \sqrt{\frac{\upsilon^2(\kappa^2\beta^2 + \kappa^2\upsilon^2 - \beta^2\upsilon^2)}{(\beta^2 + \upsilon^2)^2}}.$$

Ἡ ἀρκετὰ περίπλοκος αὕτη παράστασις κατασκευάζεται ἐπίσης εὐκόλως ὡς καὶ αἱ προηγούμεναι, ἂν καὶ ἀπαιτεῖ περισσοτέρας βοηθητικὰς μετατροπάς.

Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ὑπορίζου δύναται νὰ γραφῇ:

$$\upsilon^4\left[\frac{\kappa^2\beta^2}{\upsilon^2} + \kappa^2 - \beta^2\right].$$

Ὁ πρῶτος ὅρος τῆς παρενθέσεως εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς τετάρτης ἀναλόγου $\frac{\kappa\beta}{\upsilon}$. Εἰς τοῦτο προσθέτομεν τὸ τετράγωνον κ^2 καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ β^2.

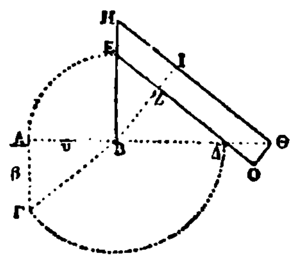
Ἔστω μ^2 ἡ τιμὴ τῆς ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν παραστάσεως. Θὰ ἔχωμεν:

$$x = \frac{\upsilon^3}{\beta^2 + \upsilon^2} \pm \sqrt{\frac{\upsilon^4\mu^2}{(\beta^2 + \upsilon^2)^2}} = \frac{\upsilon^2}{\beta^2 + \upsilon^2}(\upsilon \pm \mu).$$

ἢ

$$\frac{x}{\upsilon \pm \mu} = \frac{\upsilon^2}{\upsilon^2 + \beta^2}.$$

Ἀγόμεθα οὕτω εἰς πρόβλημα ἀντίστροφον τοῦ (η)· ζητοῦμεν δηλ. μῆκος x ἔχον λόγον πρὸς ἄλλο $(\upsilon \pm \mu)$ ἴσον πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων τετραγώνων υ^2 καὶ $\upsilon^2 + \beta^2$. (Βλ. θ, § 294).



Σχ. 212.

Διὰ τὴν κατασκευήν του, λαμβάνομεν (Σχ. 212) ΑΒ $= \upsilon$, ΑΓ $= \beta$, ὁπότε ΓΒ$^2 = \beta^2 + \upsilon^2$. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας λαμβάνομεν ἀκολούθως τμήματα

$$\text{ΒΔ} = \text{ΒΓ}, \quad \text{ΒΕ} = \text{ΒΑ} = \upsilon$$

καὶ φέρομεν τὴν κάθετον ΒΖ ἐπὶ τὴν ΕΔ. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\text{ΖΕ}}{\text{ΖΔ}} = \frac{\upsilon^2}{\upsilon^2 + \beta^2}.$$

Ἐκ τοῦ Ζ λαμβάνομεν τμῆμα ΖΟ ἴσον πρὸς ἓν τῶν δύο μηκῶν $\upsilon \pm \mu$ λ. χ. πρὸς τὸ $\upsilon + \mu$, φέρομεν τὴν ΟΘ παράλληλον τῆς ΒΖ καὶ τὴν ΘΗ παράλληλον τῆς ΟΕ. Ἐπειδὴ

$$\frac{\text{ΗΙ}}{\text{ΙΘ} \text{ ἢ } \upsilon + \mu} = \frac{\upsilon^2}{\upsilon^2 + \beta^2}$$

ἕπεται ὅτι τὸ μῆκος ΗΙ εἶναι μία τῶν ριζῶν τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως.

(ζ) Διὰ τὴν διαφοράν, θὰ ἔχωμεν

$$y^2 - z^2 = \kappa^2 \quad \text{ἢ} \quad \left(\frac{\beta x}{\upsilon}\right)^2 - (\upsilon - x)^2 = \kappa^2$$

ἢ
$$x^2 + \frac{2\upsilon^3}{\beta^2 - \upsilon^2} \cdot x = \frac{\upsilon^2(\kappa^2 + \upsilon^2)}{\beta^2 - \upsilon^2},$$

καὶ ἐργαζόμεθα ὁμοίως.

Χρήσιμοι σχέσεις

305. *Κύριαι σχέσεις.* Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους, εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ θεωρήσωμεν μέγα ἀριθμὸν ζητημάτων, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ ἐπεξεργασθῶμεν ὅπως τὸ προηγούμενον. Καλοῦντες x καὶ y δύο τμήματα μιᾶς εὐθείας τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ χαράξωμεν (τὰς δύο διαστάσεις λ. χ. ἕως ὀρθογωνίου πρὸς κατασκευὴν κλπ.), ἀγόμεθα εἰς τὰς ἓξ ἀκολούθους σχέσεις:

(α) $x + y = \lambda$
(β) $x - y = \delta$ } Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν μεταβλητῶν ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος.

(γ) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\mu}{\nu}$ } Ὁ λόγος τῶν μεταβλητῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον δοθέντων μηκῶν.

(δ) $xy = \kappa^2$ } Τὸ γινόμενον τῶν μεταβλητῶν ἔχει δοθεῖσαν τιμήν.

(ε) $x^2 + y^2 = \kappa^2$
(ζ) $x^2 - y^2 = \kappa^2$ } Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν μεταβλητῶν εἶναι δοθὲν τετράγωνον.

305 α. *Ἄλλαι σχέσεις.* Αἱ ἀνωτέρω εἶναι αἱ ἓξ στοιχειώδεις σχέσεις αἱ συνήθως ἀπαντῶσαι· δύνανται ὅμως νὰ ἐμφανισθοῦν κατὰ τὴν σπουδὴν ἑνὸς ζητήματος καὶ ἄλλαι, ὡς τῆς μορφῆς $\mu x \pm \nu y = \lambda$, $\mu x^2 \pm \nu y^2 = \kappa^2$, ὅπου μ, ν σταθεροὶ ἀριθμητικοὶ συντελεσταί, καὶ πλῆθος ἄλλων.

Ἐὰν μίαν τῶν ἓξ προηγουμένων σχέσεων ((α) .... (ζ)) ἐκλέξωμεν ὡς θεμελιώδη, δυνάμεθα, δι' ἑκάστης τῶν πέντε ἄλλων, νὰ θέσωμεν πέντε διάφορα προβλήματα:

Παράδειγμα. *Τὰ δύο τμήματα μιᾶς χορδῆς περιφερείας, ἀγομένης διὰ σταθεροῦ σημείου, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας εὑρισκομένου, ἔχουν γινόμενον σταθερόν. Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης ὁρμώμενοι, δυνάμεθα να θέσωμεν τὰ πέντε ἑπόμενα προβλήματα:*

Πρόβλημα

305 β. Διὰ σημείου Ρ ἐντὸς περιφερείας κειμένου νὰ ἀχθῇ χορδὴ ΑΡΒ τοιαύτη, ὥστε:

α) *Τὸ μῆκος της νὰ εἶναι δοθέν,* $x + y = \lambda$.

(β) *Ἡ διαφορὰ τῶν τμημάτων ΑΡ, ΡΒ νὰ εἶναι δοθὲν μῆκος,* $x - y = \delta$.

(γ) *Ὁ λόγος τῶν τμημάτων ΑΡ, ΡΒ δοθείς,* $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\mu}{\nu}$.

(ε) καὶ (ζ) *Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων ΡΑ καὶ ΡΒ νὰ εἶναι δοθὲν τετράγωνον,* $x^2 \pm y^2 = \kappa^2$.

306. *Γεωμετρικοὶ τόποι.* Διὰ νὰ ἔχωμεν μίαν σχέσιν μεταξὺ δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν γνω-

στοὺς γεωμ. τόπους. Ἰδοὺ μερικοὶ ἐξ αὐτῶν, ἐκ τῶν μᾶλλον ἁπλῶν καὶ συνήθους χρήσεως.

1. Ὅταν τὸ ὕψος καὶ ἡ βάσις ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσα, πᾶν ὀρθογώνιον ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸ ἔχει *περίμετρον* σταθερὰν (§ 257).

2. Τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς τετράγωνον ὀρθογώνια καὶ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ τετραγώνου, ἔχουν *περίμετρον* σταθερὰν (§ 19).

3. Τὸ *ἄθροισμα* τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν εἶναι σταθερὸν (§ 20).

4. Τὸ *ἄθροισμα* τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐλλείψεως εἶναι σταθερόν.

Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις αὐτὰς ἡ γενικὴ ἐξίσωσις εἶναι $x + y = \lambda$.

5. Εἰς τὰς περιπτώσεις 1 καὶ 2, ἡ *διαφορὰ* τῶν παρακειμένων πλευρῶν εἶναι σταθερὰ ὅταν τὸ ὀρθογώνιον εἶναι παρεγγεγραμμένον· ἐπίσης διὰ τὴν περίπτωσιν 3, ἐὰν τὸ σημεῖον ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς βάσεως, καθὼς καὶ διὰ τὴν ὑπερβολὴν (G. n° 647).

Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς θὰ ἔχωμεν $x - y = \delta$.

Ὁ *λόγος* $\frac{x}{y}$ εἶναι σταθερὸς ἐὰν θεωρῶμεν:

6. Τὰς ἀποστάσεις σημείου εὐθείας ἀπὸ δύο ἄλλων τεμνομένων ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης (§ 60).

7. Τὰς ἀποστάσεις σημείου περιφερείας ἀπὸ δύο σταθερῶν σημείων (§ 61).

8. Τὰς ἀποστάσεις σημείου ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς ἀπὸ μιᾶς ἑστίας καὶ τῆς ἀντιστοίχου διευθετούσης αὐτῆς. (G. n° 845, 850).

9. Τὰς ἀποστάσεις ἑνὸς σταθεροῦ σημείου ἀπὸ τὰ σημεῖα καθ' ἃ τυχοῦσα εὐθεῖα διὰ τοῦ σημείου τέμνει δύο παραλλήλους (§ 63).

10. Ἀνάλογον ζήτημα διὰ δύο περιφερείας, τοῦ σταθεροῦ σημείου ὄντος ἑνὸς τῶν κέντρων ὁμοιότητος τῶν περιφερειῶν (§ 65).

Τὸ *γινόμενον* xy εἶναι σταθερὸν ἐὰν θεωρῶμεν:

11. Τὰ δύο τμήματα χορδῆς διερχομένης διὰ σταθεροῦ σημείου ἐντὸς τῆς περιφερείας.

12. Ὁλόκληρον τὴν τέμνουσαν καὶ τὸ ἐξωτερικὸν τῆς περιφερείας μέρος αὐτῆς, ἐὰν τὸ σταθερὸν σημεῖον εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς περιφερείας.

13. Τὰς ἀκτῖνας ἀντιστροφῆς εἰς ὁμόλογα σημεῖα δύο ἀντιστρόφων σχημάτων (§§ 223, 224, 225).

14. Τὰς ἀποστάσεις ἑνὸς τυχόντος σημείου ὑπερβολῆς ἀπὸ τῶν ἀσυμπτώτων της (§§ 78, 79).

Τὸ *ἄθροισμα τῶν τετραγώνων* εἶναι σταθερόν:

15. Διὰ τὸν τόπον τῆς παραγράφου 69.

Διὰ τὰς ἀποστάσεις παντὸς σημείου ἐλλείψεως ἀπὸ δύο ἴσων συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς (§ 73, 2)).

16. Ἡ *διαφορὰ τῶν τετραγώνων* εἶναι σταθερὰ διὰ τὸν τόπον ὅστις ἐσπουδάσθη εἰς τὴν παράγραφον 71.

17. Διὰ τὰς ἀποστάσεις παντὸς σημείου ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς ἀπὸ τῶν ἀξόνων της (73, 1) καὶ 3)).

Παρατήρησις ἐπὶ τῆς ἐκλογῆς καταλλήλου μεθόδου ἀποδείξεως

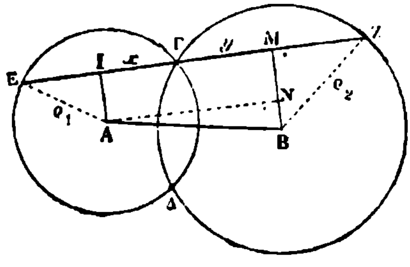
307. Ἡ ἀξία ἑκάστης ἀποδεικτικῆς μεθόδου εἶναι σχετική· τὸ πᾶν ἔγκειται εἰς τὴν ἱκανότητα τοῦ ἐρευνητοῦ ὅπως ἐκλέγῃ ἑκάστοτε τὴν κατάλληλον, ἀναλόγως τῆς φύσεως τοῦ σπουδαζομένου ζητήματος.

Συμφέρει λ. χ. νὰ καταφεύγῃ τις εἰς τὴν ἄλγεβραν, ἐὰν δύο ἄγνωστοι ποσότητες συνδέωνται πρὸς ἀλλήλας διὰ μιᾶς βασικῆς σχέσεως, ἀρκετὰ περιπλόκου· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, δύναται νὰ ἀνατρέξῃ εἰς τοὺς ειδικοὺς τρόπους ἢ εἰς τὴν τομὴν γεωμ. τόπων.

Ἰδοὺ ἓν παράδειγμα.

Πρόβλημα

308. Διὰ τοῦ σημείου τομῆς Γ δύο περιφερειῶν (Α) καὶ (Β), νὰ ἀχθῇ κοινὴ αὐτῶν τέμνουσα ΕΖ, ὥστε αἱ χορδαὶ ΓΕ, ΓΖ νὰ πληροῦν ὡρισμένους ὅρους.



Σχ. 213.

Ἔστω: $ΓI = x$, $ΓM = y$, $AE = \rho_1$, $BZ = \rho_2$.

Τὰ μήκη x, y συνδέονται πρὸς ἄλληλα διὰ σχέσεως· ἐπειδή, ἂν AN εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ, ἐκ τοῦ σχήματος λαμβάνομεν :

$$AB^2 = \delta^2 = AN^2 + BN^2 = AN^2 + (BM - AI)^2$$

καὶ $\quad AN = x + y. \quad BM = \sqrt{\rho_2^2 - y^2}\,, \quad AI = \sqrt{\rho_1^2 - x^2}.$

Ἄρα $\quad AB^2 = \delta^2 = (x + y)^2 + \left(\sqrt{\rho_2^2 - y^2} - \sqrt{\rho_1^2 - x^2}\right)^2.$

Παρατηρήσεις. 1ον. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἀρκετὰ περίπλοκος διὰ συνήθη χρῆσιν, ἂν καὶ εὑρίσκεται ἓν παράδειγμα χρησιμοποιήσεώς της εἰς τὴν ἄλγεβραν τοῦ Briot.

Τὸ πρόβλημα : $x + y = \lambda$ θὰ λυθῇ ἀργότερον (§ 878), καθὼς καὶ τά: $x \cdot y = \kappa^2$, $x - y = \delta$ (§ 1427 καὶ 880). Τό: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\mu}{\nu}$ ἐλύθη ἤδη εἰς τὴν παράγραφον 96.

2ον. Χρήσιμος εἶναι ἐπίσης ἡ μελέτη τοῦ ἑπομένου παραδείγματος (§ 309)· εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις, ἡ ἀπ' εὐθείας λύσις εἶναι καὶ ἡ ἁπλουστέρα, ἐνῷ εἰς ἄλλας πάλιν ἡ ἀλγεβρικὴ ἀποδεικνύεται μᾶλλον πρόσφορος.

Πρόβλημα

309. Διὰ σημείου Α ἐντὸς ὀρθῆς γωνίας ΧΟΥ νὰ ἀχθῇ τέμνουσα, περατουμένη εἰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, εἰς τρόπον, ὥστε τὰ δύο τμήματα αὐτῆς x, y νὰ συνδέωνται διὰ δοθείσης σχέσεως.

Ἔστωσαν α καὶ β αἱ ἀποστάσεις τοῦ Α ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας· εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$x^2y^2 = \alpha^2x^2 + \beta^2y^2. \qquad (1)$$

Ἐκ τῶν περιπτώσεων τῆς παραγράφου 305, γνωρίζομεν τὰς λύσεις

$$(\gamma)\ \frac{x}{y} = \frac{\mu}{\nu}\ (\S\ 94) \quad \text{καὶ} \quad (\delta)\ xy = \kappa^2\ (\S\ 97).$$

Αἱ περιπτώσεις (γ), (δ), (ε), (ζ) ὁδηγοῦν εἰς διττετράγωνον ἐξίσωσιν, ἀλλ' αἱ (α) καὶ (β) εἰς ἐξίσωσιν πλήρη τετάρτου βαθμοῦ. Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εἶναι $\alpha = \beta$, αὕτη μετατρέπεται εἰς τὴν

$$x^2y^2 = \alpha^2(x^2 + y^2) \qquad (2)$$

ὁπότε δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὰ προβλήματα τῶν περιπτώσεων (α) καὶ (β)· ἀναγόμεθα πράγματι εἰς τὸ ἑπόμενον

309 α. Πρόβλημα τοῦ Πάππου. Διὰ σημείου Α, ἐπὶ τῆς διχοτόμου ὀρθῆς γωνίας ΧΟΥ, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΟΧ, ΟΥ τμῆμα $(x + y)$ αὐτῆς νὰ ἔχῃ μῆκος δοθὲν λ.

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (α) καὶ $x + y = \lambda$, δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δευτέρας:

$$x^2 + y^2 + 2xy = \lambda^2, \qquad (\alpha')$$

καὶ ἀπαλοιφῆς τοῦ ἀθροίσματος $x^2 + y^2$ μεταξὺ τῆς (α′) καὶ τῆς (2). Εὑρίσκομεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν πρὸς xy

$$x^2y^2 = \alpha^2(\lambda^2 - 2xy)$$

ἐξ ἧς

$$xy = -\alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^2(\alpha^2 + \lambda^2)}.$$

Γνωρίζομεν οὕτω τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν x καὶ y καὶ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ πρόβλημα ὡς ἤδη λελυμένον.

§ III. Προβλήματα ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης

Τὰ ἑπόμενα προβλήματα, τὰ σχετικὰ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην (§ 310—319), δίδονται ἕνεκα τῶν πολλῶν ἐφαρμογῶν αὐτῶν εἰς ζητήματα *μεγίστου* καὶ *ἐλαχίστου* (βλπ. § 359 καὶ ἑπμ.).

Πρόβλημα

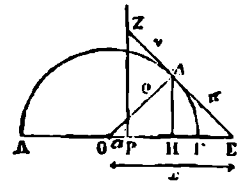
310. Δίδονται ἡμιπεριφέρεια ΑΔΓ καὶ κάθετος ΡΖ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΓ. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη ΕΔΖ, περατουμένη εἰς τὰς δύο αὐτὰς εὐθείας, εἰς τρόπον, ὥστε τὰ μήκη ΔΕ, ΔΖ νὰ ἔχουν δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἂς θέσωμεν: $\quad OP = \alpha, \quad OE = x.$

Θεωροῦντες τὸ μῆκος ΔΕ ὡς βοηθητικὸν ἄγνωστον, λαμβάνομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις

$$ΔE^2 = x^2 - ρ^2 \qquad (1)$$

$$ΔE^2 = x \, . \, HE \qquad (2)$$



Σχ. 214.

Ἀλλ' εἶναι

$$\frac{HE}{PE} = \frac{μ}{μ+ν} \quad ἢ \quad \frac{HE}{x-α} = \frac{μ}{μ+ν}$$

καὶ

$$HE = \frac{μ}{μ+ν}(x-α).$$

Ἑπομένως:

$$ΔE^2 = \frac{μ}{μ+ν}(x^2 - αx). \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (3) εὑρίσκομεν:

$$x^2 - ρ^2 = \frac{μ}{μ+ν}(x^2 - αx),$$

ἢ

$$νx^2 + μ \, . \, αx - (μ+ν)ρ^2 = 0. \qquad (4)$$

Ὅθεν:

$$x = \frac{-αμ \pm \sqrt{α^2μ^2 + 4ν(μ+ν)ρ^2}}{2ν}; \qquad (5)$$

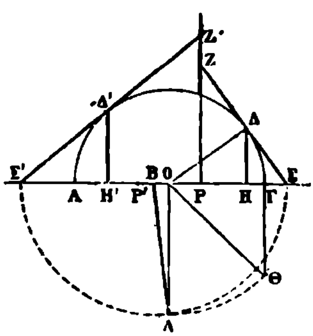
μήκη εὐκόλως κατασκευάσιμα.

Πρόβλημα

311. **Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη ΕΔΖ (Σχ. 215), περατουμένη ἐπὶ τῆς προεκτάσεως διαμέτρου ΑΓΕ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπ' αὐτὴν εὐθείας ΡΖ, τοιαύτη, ὥστε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Δ νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΕΖ.**

Διὰ ΔΕ = ΔΖ εἶναι μ = ν καὶ ὁ τύπος (5) τῆς προηγουμένης παραγράφου γίνεται

$$x = -\frac{α}{2} \pm \sqrt{\frac{α^2}{4} + 2ρ^2} \qquad (6)$$



Σχ. 215.

Καὶ ἀπ' εὐθείας ἄλλωστε θὰ εἴχομεν:

$$ΔE^2 = OE \, . \, HE = \frac{x(x-α)}{2}$$

καὶ

$$ΔE^2 = x^2 - ρ^2.$$

Ὅθεν

$$x^2 + αx - 2ρ^2 = 0$$

καὶ

$$x = -\frac{α}{2} \pm \sqrt{\frac{α^2}{4} + 2ρ^2}. \qquad (6)$$

Ἡ σχέσις $x^2 + αx - 2ρ^2 = 0$ γράφεται καὶ

$$x(x+α) = 2ρ^2. \qquad (7)$$

Κατασκευή. Κατὰ τὴν μορφὴν (7), τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίου ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ $2\rho^2$ καὶ τῆς διαφορᾶς α δύο πλευρῶν του· δυνάμεθα ὅμως νὰ κατασκευάσωμεν τὸ μῆκος x ἐπίσης εὐκόλως καὶ ἐκ τῆς μορφῆς (6).

Λαμβάνομεν $OB = -\frac{\alpha}{2}$ (ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν, ἀριστερὰ τοῦ O, τὸ ἥμισυ μῆκος τοῦ OP) καὶ ὑψοῦμεν κάθετον ΓΘ ἴσην πρὸς $ΓO = \rho$:

$$O\Theta^2 = 2\rho^2.$$

Μεταφέρομεν τὸ μῆκος OΘ ἐπὶ τῆς OΛ, καθέτου ἐπὶ τὴν διάμετρον. Ἐπειδὴ

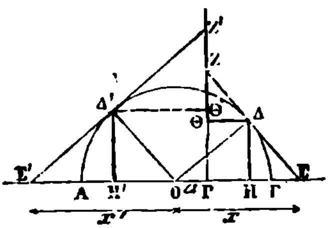
$$B\Lambda^2 = \frac{\alpha^2}{4} + 4\rho^2,$$

τὸ μῆκος BΛ παριστᾷ τὸ ριζικόν. Ἀκολούθως, γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν μὲ κέντρον B καὶ ἀκτῖνα BΛ, τέμνουσαν τὴν ἀρχικὴν διάμετρον εἰς τὰ σημεῖα E καὶ E′. Θὰ ἔχωμεν

$$OE = -OB + B\Lambda = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + 2\rho^2}$$

$$OE' = -OB - B\Lambda = -\frac{\alpha^2}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + 2\rho^2}.$$

312. Ὑπολογισμὸς τῶν PH, ΔH καὶ PH′, Δ′H′.



Σχ. 216

1) $PH = \frac{1}{2} PE = \frac{1}{2}(x - \alpha) = \frac{x}{2} - \frac{2\alpha}{4}$,

$$\Delta\Theta \quad ἢ \quad PH = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\rho^2} - 2\alpha}{4} = \frac{-3\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\rho^2}}{4} \quad (1)$$

2) $\Delta H^2 = OH \, . \, HE = \left[\alpha + \frac{x - \alpha}{2}\right]\left[\frac{x - \alpha}{2}\right] = \frac{x^2 - \alpha^2}{4}$,

ἢ

$$\Delta H^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\rho^2}}{2}\right)^2 - \alpha^2\right] =$$

$$= \frac{-\alpha^2 + 4\rho^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2 + 8\rho^2}}{8} \quad (2$$

3) Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ μήκους Δ'Θ' εἶναι

$$Δ'Θ' = \frac{3α + \sqrt{α^2 + 8ρ^2}}{4} \qquad (3)$$

ἐκ τῆς ὁποίας

$$Δ'Η'^2 = \frac{-α^2 + 4ρ^2 + α\sqrt{α^2 + 8ρ^2}}{8}. \qquad (4)$$

313. Διερεύνησις. Θὰ διερευνήσωμεν τὸ πρόβλημα διὰ τιμὰς τοῦ $α = ΟΡ$ θετικὰς μόνον καὶ εἰς τὸ διάστημα $0 < α < \infty$· ἐπειδὴ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τοῦ α εἶναι φανερὸν ὅτι δίδουν λύσεις συμμετρικὰς πρὸς τὴν κάθετον διάμετρον ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν.

1) $α = 0.$

δηλ. ἡ κάθετος ΡΖ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου.

Ὁ τύπος (6) ἢ $x = -\frac{α}{2} \pm \sqrt{\frac{α^2}{4} + 2ρ^2}$

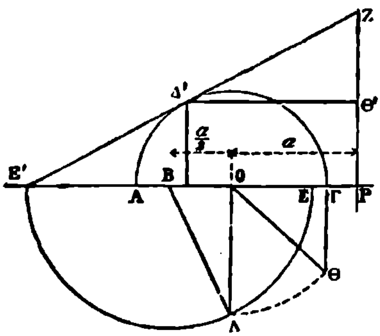
δίδει δύο ἴσας ρίζας, ἀφοῦ ἀνάγεται εἰς τὸν

$$x = \pm ρ\sqrt{2},$$

καὶ ὡς ἑπόμενον ἦτο, ἀφοῦ αἱ δύο ἐφαπτόμεναι γίνονται δύο τῶν πλευρῶν τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν τετραγώνου.

2) $0 < α < ρ.$

Αἱ δύο τιμαὶ τοῦ x εἶναι πραγματικαὶ καὶ μεγαλύτεραι ἀπολύτως τοῦ ρ· δυνάμεθα ἑπομένως νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας.



Σχ. 217.

3) $α = ρ.$

Ὁ τύπος δίδει

$$x = -\frac{ρ}{2} \pm \frac{3ρ}{2} = \begin{cases} +ρ \\ -2ρ \end{cases}$$

Τὸ σημεῖον Ε συμπίπτει πρὸς τὸ σημεῖον Γ. Τὸ σημεῖον Ε' ($x = -2ρ$) εἶναι κορυφὴ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ὁποίου Ε'Γ εἶναι τὸ ὕψος.

4) $α > ρ.$

Ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ τοῦ x, ἡ διδομένη διὰ τοῦ κατωτέρου σημείου τοῦ ριζικοῦ, εἶναι μεγαλυτέρα ἀπολύτως τοῦ 2ρ. Ἡ ἐφαπτομένη, ἑπομένως, Ε'Ζ' δύναται νὰ ἀχθῇ, ὄχι ὅμως καὶ ἡ ΕΖ, ἀφοῦ

$$ΟΕ = x > ρ.$$

314. Σύνοψις. *Ἀπὸ γεωμετρικῆς ἀπόψεως*, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ α, ὑπάρχει πάντοτε τουλάχιστον *μία ἐφαπτομένη* ἀπαντῶσα εἰς τὸ πρόβλημα. Ὑπάρχουν *δύο ἐφαπτόμεναι* ἐὰν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ α εἶναι μικροτέρα τοῦ ρ, καὶ μία μόνον, ἐὰν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ α εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ρ (Σχ. 217)· ἐπειδὴ τότε τὸ σημεῖον Ε εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ δὲν δυνάμεθα ἐξ αὐτοῦ νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην τῆς ἡμιπεριφερείας (Ο).

Πρόβλημα

315. Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη ΔΕΖ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΓ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς ΔΕ νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΔΖ (Σχ. 218).

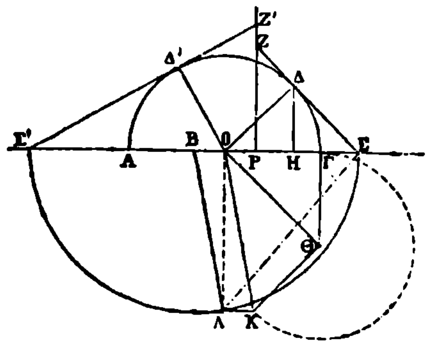
Δηλαδὴ $\mu = 2\nu$. Ὁ τύπος (5) τῆς παραγράφου 310 γίνεται

$$x = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}. \qquad (8)$$

Κατασκευή. Λαμβάνομεν $OB = -\alpha$, $\Gamma\Theta = \rho$, φέρομεν τὴν ΘΚ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΘ καὶ ἴσην πρὸς ρ. Θὰ εἶναι

$$OK^2 = 3\rho^2.$$

Μεταφέρομεν κατόπιν τὸ τμῆμα ΟΚ ἐπὶ τῆς ΟΛ, καθέτου ἐπὶ



Σχ. 218.

τὴν ΑΓ, καὶ μὲ κέτρον Β καὶ ἀκτῖνα ΒΛ γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν ΑΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ε΄ σημεῖα. Θὰ ἔχωμεν:

$$O\Lambda^2 = OK^2 = 3\rho^2.$$

$$B\Lambda = \sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2},$$

ἄρα καὶ

$$OE = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}$$

$$OE' = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}.$$

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ $-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}$ εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα ἀπολύτως τῆς ἀκτῖνος. Διὰ νὰ λάβωμεν τὴν ὁριακὴν τιμὴν τοῦ α, μέχρι τῆς ὁποίας τὸ μῆκος

$$OE = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}$$

παραμένει μεγαλύτερον τῆς ἀκτῖνος, θέτομεν

$$-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2} = \rho$$

ὁπότε $\alpha = \rho$.

Ὥστε, ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, διὰ $\alpha > \rho$ ὑπάρχει *μία μόνον ἐφαπτομένη*.

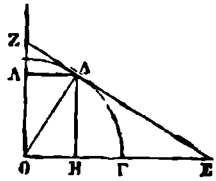
2) Διὰ $\alpha = \rho$, λαμβάνομεν

$$x = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 3\rho^2} = -\rho \pm 2\rho = \begin{cases} +\rho \\ -3\rho. \end{cases}$$

Ἡ τιμὴ $+\rho$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν κάθετον ΡΖ (Σχ. 220), ἐφαπτομένην τότε τῆς περιφερείας.

316. Εἰδικαὶ περιπτώσεις. 1η Περίπτωσις (Σχ. 219). Ἂς ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ δύο κάθετοι εὐθεῖαι ΟΕ, ΟΖ διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἂς ὑπολογίσωμεν τὰ μήκη ΟΗ, ΟΛ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος ρ. Χωρὶς νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὸν γενικὸν τόπον, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι

$$OE^2 = 3\rho^2 \qquad (\alpha)$$



Σχ. 219.

$$OZ^2 = \frac{3}{2}\rho^2. \qquad (\beta)$$

Ἀλλ' $OH = \frac{OE}{3}$ · ὥστε

$$OH^2 = \frac{1}{9}\,OE^2 = \frac{\rho^2}{3} \qquad (\gamma)$$

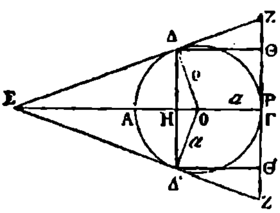
$$O\Lambda^2 = \frac{2}{3}\rho^2 = 2\,(OH)^2 \qquad (\delta)$$

316 α. 2α Περίπτωσις. (Σχ. 220).

$$\alpha = \rho.$$

Εἴδομεν ὅτι

$$x = \begin{cases} +\rho \\ -3\rho \end{cases} \qquad [315,\ 2)]$$

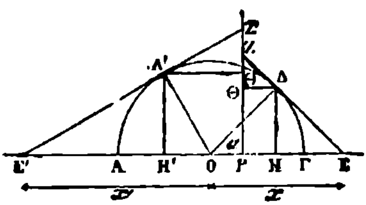


Σχ. 220.

Ἡ πρώτη τιμὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον Ρ καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἐφαπτομένη εἶναι ἡ ΡΖ. Ἡ δευτέρα τιμὴ -3ρ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ τὴν ἐφαπτομένην ΕΔΖ.

Θὰ ἔχωμεν οὕτω, εἰς ἀπολύτους τιμάς:

$$\Gamma H = \frac{4}{3}\rho \qquad (\varepsilon)$$



Σχ. 221

$$\Delta H = \frac{2}{3}\rho\sqrt{2} \qquad (\zeta)$$

$$PZ = \rho\sqrt{2}. \qquad (\eta)$$

317. **Ὑπολογισμὸς τῶν ΡΗ, ΔΗ ὅταν ΔΕ = 2ΔΖ.**

$$PH = \frac{-2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}}{3} \qquad (\theta)$$

$$\Delta H^2 = \frac{-2\alpha^2 + 6\rho^2 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}}{9} \qquad (\iota)$$

$$PH' = \frac{2\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}}{3} \qquad (\kappa)$$

$$\Delta' H'^2 = \frac{-2\alpha^2 + 6\rho^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}}{9} \qquad (\lambda)$$

$$PZ^2 = \frac{-2\alpha^2 + 6\rho^2 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}}{4} \qquad (\mu)$$

$$PZ'^2 = \frac{-2\alpha^2 + 6\rho^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}}{4}$$

317 α. Σημείωσις. 1) Διὰ ἀναπτύξεις κλπ. τῶν διαφόρων παραστάσεων, δύναταί τις ν' ἀνατρέξῃ εἰς τὴν 2αν καὶ 3ην ἔκδοσιν τῶν Ex. de G.

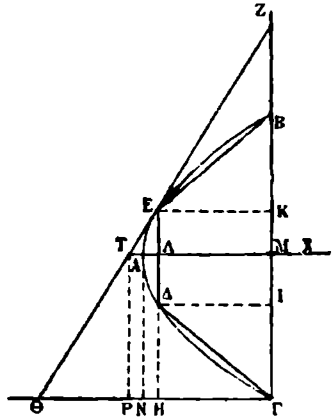
2) *Τὸ πρόβλημα τῆς ἐφαπτομένης* ἐλύσαμεν μόνον εἰς τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς αἱ δύο εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου (§ 214) ἢ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ τουλάχιστον ἡ μία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου (§ 310 ἕως 317). Ἐπειδή, εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν, αἱ δύο εὐθεῖαι ὁρίζουν ἐπὶ τῆς περιφερείας τέσσαρα διάφορα τόξα, τὸ δὲ πρόβλημα ὁδηγεῖ εἰς ἐξίσωσιν τετάρτου βαθμοῦ πλήρη καὶ τῆς ὁποίας ἡ κατασκευὴ τῶν ριζῶν εἶναι ἀδύνατος διὰ τοῦ γνώμονος καὶ τοῦ διαβήτου.

Τὰ τέσσαρα σημεῖα ἐπαφῆς, τῶν τεσσάρων ἐν γένει λύσεων, εἶναι τομαὶ τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ μιᾶς ὑπερβολῆς.

Τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τοῦ *ἀκτινοβόλου σημείου,* δι' οὗ διέρχονται αἱ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνες δοθείσης φωτεινῆς πηγῆς καὶ δι' ὡρισμένην θέσιν τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ, δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα. (N. A. 1869, σ. 232, 235).

Πρόβλημα

318. Παραβολικὸν τμῆμα ΑΒΓ ἔχει ὡς βάσιν χορδὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς καμπύλης. Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη ΖΕΘ τοιαύτη, ὥστε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε νὰ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΖΘ, τοῦ περατουμένου εἰς τὴν χορδὴν ΒΓ καὶ εἰς τὴν ἐκ τοῦ Γ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῆς καμπύλης.



Σχ. 222.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ

$$EZ = E\Theta.$$

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ κορυφὴ Α διαιρεῖ τὴν ὑφαπτομένην ΤΛ εἰς ἴσα τμήματα (G., nº 699)· ἃς λάβωμεν δι' ἀγνώστους $A\Lambda = x$ καὶ $\Lambda E = y$, ἔστω δὲ $AM = \alpha$ καὶ $MB = \beta$.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΘΡΤ, ΤΛΕ εὑρίσκομεν

$$\frac{\Theta P}{PT} = \frac{T\Lambda}{\Lambda E} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha - 3x}{\beta} = \frac{2x}{y}. \qquad (1)$$

ἐπειδή,

$$\Theta P = \Theta H - T\Lambda$$

καὶ

$$\Theta H \text{ ἢ } H\Gamma = AM - A\Lambda = \alpha - x, \quad T\Lambda = 2x, \quad \Theta P = \alpha - 3x.$$

Ἡ (1) γράφεται καὶ

$$\alpha y - 3xy = 2\beta x \text{ ἢ } 3xy + 2\beta x - \alpha y = 0, \qquad (2)$$

ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ ἐκείνης τῆς καμπύλης

$$\frac{y^2}{x} = \frac{\beta^2}{\alpha} \text{ ἢ } x = \frac{\alpha y^2}{\beta} \ (3) \qquad \text{(G., n}^{\circ}\text{ 708)}$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ x λαμβάνομεν

$$y = \frac{-\alpha\beta \pm \sqrt{\alpha^2\beta^2 + 3\alpha^2\beta^2}}{3\alpha}$$

ἢ

$$y = +\frac{\beta}{3}, \quad y = -\beta.$$

Ἡ θετικὴ ρίζα δίδει $x = \frac{\alpha}{9}$ ἢ $A\Lambda = \frac{AM}{9}$. Διὰ τοῦ οὕτω ὁριζομένου σημείου Λ φέρομεν τὴν χορδὴν ΕΛΔ παράλληλον τῆς ΒΓ.

Ἡ $y = -\beta$ δίδει $x = \alpha$ καὶ ἡ ἀντίστοιχος χορδὴ εἶναι ἡ ΒΓ. Ἡ λύσις αὕτη εἶναι ξένη πρὸς τὸ πρόβλημά μας.

318 α. Παρατηρήσεις. 1) Εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ *μεγίστων καὶ ἐλαχίστων* (§ 365), θὰ εἴδομεν ὅτι εἰς τὴν χορδὴν ΔΕ ἀντιστοιχεῖ τὸ *μέγιστον τραπέζιον* ΒΓΔΕ, ἐκ τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΒΑΓ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου τούτου εἶναι

$$(MB + \Lambda E)\,.\,\Lambda M = \left(\beta + \frac{\beta}{3}\right).\ \frac{8}{9}\alpha = \frac{32\,\alpha\beta}{27},$$

τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ παραβολικοῦ τμήματος

$$(BA\Gamma) = \frac{2}{3}AM\,.\,B\Gamma \qquad \text{(G. n}^{\text{os}}\text{ 707 καὶ 982)}$$

ἢ

$$\frac{2}{3}\alpha\,.\,2\beta = \frac{4\alpha\beta}{3} = \frac{36\alpha\beta}{27}.$$

Εἶναι λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου τραπεζίου τὰ $\frac{8}{9}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραβολικοῦ τμήματος.

2) Ἐὰν τὸ τμῆμα ἔχῃ βάσιν τυχοῦσαν χορδήν, θὰ πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τὴν συζυγῆ διάμετρον πρὸς τὴν δοθεῖσαν χορδήν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς ὡς πρὸς διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην παράλληλον πρὸς τὴν συζυγῆ διεύθυνσιν τῆς διαμέτρου, εἶναι τῆς ἰδίας μορφῆς μὲ τὴν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφήν, ἡ ἀναζήτησις τοῦ μεγίστου ἐγγεγραμμένου τραπεζίου γίνεται τελείως ὁμοίως ὡς καὶ προηγουμένως.

Ἡ *συζυγὴς διάμετρος* ἑνὸς συστήματος παραλλήλων χορδῶν κωνικῆς τομῆς εἶναι ἡ εὐθεῖα—τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν αὐτῶν.

Πλῆθος λύσεων ἑνὸς προβλήματος

319. Συμβαίνει πολλάκις, ἓν γεωμετρικὸν πρόβλημα νὰ ἔχῃ περισσοτέρας ἢ ὀλιγωτέρας λύσεις ἀπὸ τὰς ρίζας τῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως εἰς τὴν λύσιν τῆς ὁποίας ἀνάγεται ἡ λύσις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ. Καὶ τοῦτο, εἴτε ἐπειδὴ ὡρισμέναι λύσεις τοῦ προβλήματος, ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των, δὲν δύνανται νὰ ἀντιστοιχισθοῦν εἰς ρίζας μιᾶς ὡρισμένης ἐξισώσεως, εἴτε ἐπειδὴ ὡρισμέναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἀπαράδεκτοι ἀπὸ γεωμετρικῆς ἀπόψεως.

Παράδειγμα προβλήματος μὲ γεωμετρικὰς λύσεις περισσοτέρας τῶν ριζῶν τῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως εἰς ἥν, κατά τινα τρόπον, ἀνάγεται εἶναι τὸ κατωτέρω.

Πρόβλημα

320. Διὰ τοῦ μέσου κυκλικοῦ τόξου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς χορδῆς τοῦ δοθέντος τόξου καὶ τοῦ ἑτέρου τόξου τῆς περιφερείας, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

(Francœur, Cours de Mathématiques, tome I)

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ $MN = \lambda$.

Ἂς λάβωμεν τὸ μῆκος $OM = x$ ὡς ἄγνωστον. Ἂν $OA = \alpha$, εὐκόλως εὑρίσκομεν

$$OM \, . \, ON = O\Delta \, . \, OB = \alpha^2 \qquad (68,\ 2)\,)$$

ἢ

$$x\,(x + \lambda) = \alpha^2. \qquad (1)$$

Τὸ μῆκος x ὁρίζεται διὰ τῆς κατασκευῆς ὀρθογωνίου μὲ ἐμβαδὸν α^2 καὶ διαφορὰν πλευρῶν λ, ἢ διὰ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως (1):

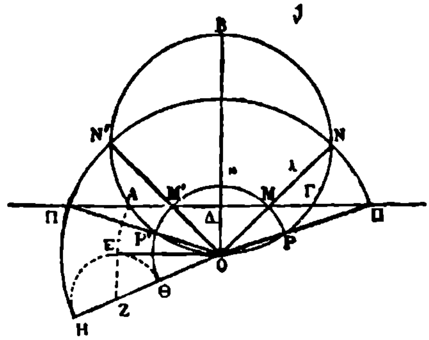
$$x = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \alpha^2}.$$

Κατασκευή. Ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῆς ΑΓ λαμβάνομεν

$$OE = OA = \alpha$$

καὶ ὑψοῦμεν κάθετον ΕΖ ἐπ' αὐτὴν ἴσην πρὸς $\frac{\lambda}{2}$. Θὰ ἔχωμεν

$$OZ = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \alpha^2}$$



Σχ. 223.

Μεταφέρομεν ἀκολούθως τὸ μῆκος ΖΕ ἐπὶ τῶν ΖΗ καὶ ΖΘ. Τὸ μῆκος ΟΘ εἶναι ἡ μία ρίζα καὶ τὸ ΟΗ ἡ ἄλλη.

Ὑπάρχουν ἐν τούτοις τέσσαρες λύσεις· ἐπειδὴ ἐκτὸς τῶν θέσεων ΟΜΝ καὶ ΟΡΠ τῆς τεμνούσης, λύσιν τοῦ προβλήματος παρέχουν καὶ αἱ θέσεις αὐτῆς ΟΜ'Ν' καὶ ΟΡ'Π', συμμετρικαὶ τῶν πρώτων πρὸς τὴν ΟΒ.

321. Παρατήρησις. Τὸ προηγούμενον πρόβλημα δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΝΓ *ἐκ τῆς βάσεως* ΑΓ, *τῆς ἀπέναντι γωνίας* Ν *καὶ τοῦ μήκους* λ *τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας* Ν.

Τὰ τρίγωνα ΑΝΓ, ΑΝ'Γ εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων πρὸς τὴν ΟΒ.

Τὰ τρίγωνα ΑΡΓ, ΑΡ'Γ εἶναι ξένα πρὸς τὰ ζητούμενα ἀλλὰ λύσεις τοῦ ἑπομένου, ἀναλόγου πρὸς τὸ πρῶτον, προβλήματος:

Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΡΓ *ἐκ τῆς βάσεως* ΑΓ, *τῆς ἀπέναντι γωνίας* Ρ (παραπληρωματικῆς τῆς Ν) *καὶ τοῦ μήκους* ΡΠ *τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας* Ρ.

321 α. Σημείωσις. Ἡ θεώρησις τοῦ ἀντιστρόφου προβλήματος (213) καὶ τοῦ ἀνωτέρω (320) δίδουν μίαν πολὺ ἁπλῆν λύσιν τοῦ *προβλήματος τοῦ Πάππου* (309) ἀλλ' ἔμμεσον. Ὑπάρχουν πολλαὶ ἄλλαι λύσεις κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ἀλγεβρικαί· μία τούτων ὀφείλεται εἰς τὸν ἴδιον τὸν *Πάππον*, ὁ δὲ *Νεύτων* ἔδωσε ἐπίσης λύσεις τοῦ προβλήματος.

Σχετικῶς δύναταί τις νὰ ἀνατρέξῃ εἰς τὰ ἑπόμενα ἄρθρα καὶ συγγράμματα:

Nouvelles Annales, 1847, σ. 458, σημείωμα τοῦ Abel Transon. Ὁ συγγραφεὺς ὑποδεικνύει ἓξ λύσεις, ἐκ τῶν ὁποίων μερικαὶ ἐφαρμόζονται δι' οἱανδήποτε δοθεῖσαν γωνίαν.

Εἰς τὰ *Examens et compositions de Mathématiques* τῶν Momenheim καὶ Franc K., εὑρίσκονται δέκα διάφοροι λύσεις ἀλλ' εἰς ὀρθὴν πᾶσαι γωνίαν ἀναφερόμεναι.

Δύο τῶν λύσεων τοῦ Νεύτωνος παραθέτει ὁ Desboves εἰς τὰ *Questions d'Algèbre* (2e edition, n° 231) αὐτοῦ καθὼς καὶ πολλὰς ἄλλας. Βλέπε ἐπίσης καὶ Exercices d'Algèbre, 5e édition, n° 1407, Compléments de Trigonométrie, 3e édition, n° 441 τῶν F.G.—M.

Εἰς τὸ *Cours d'Algèbre Élémentaire* τοῦ *Combette* (1893), ἐξετάζεται διὰ μακρῶν τὸ *Πρόβλημα τοῦ Πάππου* (σ. 486 - 501· n° 526).

Τὸ *Cours développé d'Algèbre élémentaire* ὑπὸ B. Lefebvre, S. J. (tome II, p. 214, problème XVII), δίδει διαφόρους λύσεις, ὡς καὶ τὸ ἱστορικὸν τοῦ προβλήματος (σ. 277). Βλέπε πρὸς τούτοις καὶ ἐπ. (§ 1538, *Σημείωσις*).

§ IV. Ἀριθμητικαὶ σχέσεις

322. Ἀναζήτησις σχέσεων. Διὰ νὰ ἀνεύρωμεν ἢ ἀποδείξωμεν ἀριθμητικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν διαφόρων στοιχείων ἑνὸς δοθέντος σχήματος, βοηθούμεθα κυρίως ὑπὸ τῶν ὁμοίων σχημάτων, τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἢ βασιζόμεθα ἐπὶ προγενεστέρως ἀποδειχθεισῶν σχέσεων.

Πρόβλημα

323. Διὰ δοθέντος σημείου Α ἄγεται τέμνουσα ΜΑΝ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας ΧΟΥ. Ποία ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰ μήκη ΟΜ, ΟΝ;

Ἀφοῦ τὸ σημεῖον Α εἶναι δεδομένον, εἶναι ὡρισμένα ἐπίσης καὶ τὰ παράλληλα πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας τμήματα ΑΒ = γ, ΑΓ = β.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΜ, ΝΟΜ δίδουν τὴν σχέσιν

$$\frac{AB}{ON}=\frac{BM}{OM} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\gamma}{ON}=\frac{OM-\beta}{OM}$$

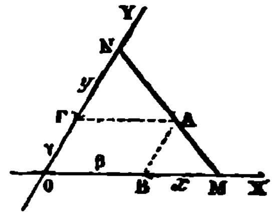
ἐξ ἧς,

$$OM\,.\,ON=\gamma\,.\,OM+\beta\,.\,ON,$$

ἢ

$$\frac{\beta}{OM}+\frac{\gamma}{ON}=1,$$

ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις.



Σχ. 224.

324. Παρατήρησις. Ἂν τὰς ἀποστάσεις τῶν Μ, Ν ἀπὸ τῶν γνωστῶν σημείων Β καὶ Γ καλέσωμεν x, y, ἀντιστοίχως, εὑρίσκομεν μίαν πολὺ ἁπλῆν σχέσιν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Ἐπειδὴ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΜ, ΝΓΑ λαμβάνομεν ἀμέσως

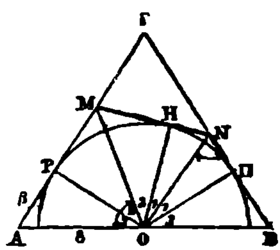
$$\frac{AB}{x}=\frac{y}{A\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\gamma}{x}=\frac{y}{\beta}.$$

Ὅθεν:

$$xy=\beta\gamma=\sigma\tau\theta.$$

Πρόβλημα

325. Μὲ κέντρον τὸ μέσον Ο τῆς βάσεως ΑΒ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ γράφομεν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ καὶ φέρομεν μεταβλητὴν ἐφαπτομένην ΜΗΝ. Νὰ εὑρεθῇ σχέσις μεταξὺ τῶν μηκῶν ΑΜ καὶ ΒΝ.



Σχ. 225.

Ἡ σύγκρισις τῶν τριγώνων ΑΟΜ καὶ ΒΟΝ ἀποδεικνύει αὐτὰ ἰσογώνια. Πράγματι,

$$\widehat{1}=\widehat{1},\quad \widehat{2}=\widehat{2},\quad \widehat{3}=\widehat{3}$$

καὶ

$$\widehat{1}+\widehat{2}+\widehat{\ }=\text{ὀρθὴ γωνία}.$$

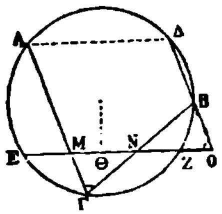
Ἀφ' ἑτέρου, ἡ γωνία Ν εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς $\widehat{1}$, ἥτις πάλιν εἶναι συμπληρωματικὴ τοῦ ἀθροίσματος $\widehat{2}+\widehat{3}$. Εἶναι ἐπομένως $\widehat{AOM}=\widehat{N}$ καί, ἐπειδὴ $\widehat{A}=\widehat{B}$, τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΜ, ΒΟΝ εἶναι ὅμοια.

Ὥστε:

$$\frac{AM}{AO}=\frac{OB}{BN} \quad \text{ἢ} \quad AM\,.\,BN=AO^2=\text{σταθ. ποσότης}.$$

Πρόβλημα

326. Ἐπὶ περιφερείας δίδονται δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ χορδὴ ΕΖ. Ἐκ τυχόντος σημείου Γ τῆς περιφερείας φέρομεν τὰς χορδὰς ΓΑ, ΓΒ τεμνούσας τὴν σταθερὰν χορδὴν εἰς τὰ Μ καὶ Ν. Νὰ εὑρεθῇ σχέσις συνδέουσα τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΕΜ, ΜΝ καὶ ΝΖ.



Σχ. 226.

Διὰ τοῦ σημείου Α ἂς φέρωμεν παράλληλον ΑΔ πρὸς τὴν ΕΖ, καθὼς καὶ τὴν ΔΒ, τέμνουσαν τὴν χορδὴν ΕΖ εἰς τὸ Ο.

Τὰ τρίγωνα ΜΓΝ, ΝΒΟ εἶναι ὅμοια. Πράγματι,

$$\widehat{M N \Gamma} = \widehat{B N O}$$

καὶ

$$\widehat{\Gamma} = \frac{1}{2} (\widehat{A \Delta B}), \quad \widehat{O} = \frac{1}{2} \left[\widehat{E A \Delta} - \widehat{B Z} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\widehat{E A \Delta B} - \widehat{\Delta Z} \right] = \frac{1}{2} \widehat{A \Delta B} = \widehat{\Gamma}.$$

Ἐπομένως,

$$\frac{MN}{\Gamma N} = \frac{NB}{NO} \quad \text{ἢ} \quad MN \,.\, NO = \Gamma N \,.\, NB.$$

Ἀλλὰ

$$\Gamma N \,.\, NB = NE \,.\, NZ,$$

ἄρα

$$EN \,.\, NZ = MN \,.\, NO,$$

ἐκ τῆς ὁποίας σχέσεως ἔπεται

$$\frac{EN}{MN} = \frac{NO}{NZ} \quad \text{ἢ} \quad \frac{EN - MN}{MN} = \frac{NO - NZ}{NZ},$$

δηλαδὴ

$$\frac{EM}{MN} = \frac{ZO}{NZ} \quad \text{καὶ} \quad \frac{EM \,.\, NZ}{MN} = ZO. \qquad (1)$$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ μῆκος ΖΟ εἶναι προφανῶς συνάρτησις μόνον τῆς θέσεως τῶν Α, Β καὶ τῆς χορδῆς ΕΖ καὶ κατὰ συνέπειαν σταθερόν, ἡ σχέσις (1) εἶναι ἡ ζητουμένη.

Θεώρημα τοῦ Euler

327. Μεταξὺ τῶν ἀκτίνων R καὶ ρ, τῆς περιγεγραμμένης καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τρίγωνον περιφερείας καὶ τῆς ἀποστάσεως d τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν αὐτῶν, ὑπάρχει ἡ σχέσις

$$d^2 = R\,(R - 2\rho).$$

Ἔστωσαν $OI = d$, $O\Delta = R$, $IK = \rho$.

Ἕνεκα τῶν διχοτόμων ΑΙΔ ΒΙΕ, ἔχομεν

$$\widehat{ΒΔ} = \widehat{ΓΔ}, \quad \widehat{ΑΕ} = \widehat{ΓΕ}$$

καὶ

$$\widehat{ΔΓΕ} = \widehat{ΔΒ} + \widehat{ΑΕ}\cdot$$

ἄρα

$$\widehat{ΔΒΕ} = \widehat{ΔΙΒ}.$$

Ὅθεν:

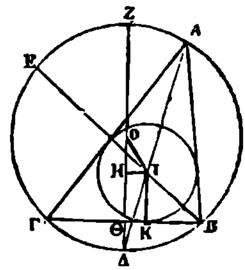
$$ΔΒ = ΔΙ.$$

Ἡ διάμετρος, ἐξ ἄλλου, ΔΟΖ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ· ἄρα

$$ΒΔ^2 = ΔΙ^2 = ΔΘ \,.\, ΔΖ$$

ἤ

$$ΔΙ^2 = 2R \,.\, ΔΘ.$$



Σχ. 227.

Ἐκ τοῦ σημείου Ι φέρομεν τὴν κάθετον ΙΗ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΔΖ· θὰ ἔχωμεν

$$ΔΙ^2 = ΙΟ^2 + ΟΔ^2 - 2ΟΔ \,.\, ΟΗ$$

ἤ, ἀφοῦ $ΔΙ^2 = 2R \,.\, ΔΘ$,

$$2R \,.\, ΔΘ = d^2 + R^2 - 2R\,(ΟΘ - ρ),$$

ἢ καὶ

$$d^2 + R^2 = 2R\,(ΔΘ + ΟΘ - ρ) = 2R\,(R - ρ) = 2R^2 - 2Rρ.$$

Δηλαδή:

$$d^2 = R\,(R - 2ρ).$$

Ἄλλη ἀπόδειξις:

$$\begin{aligned} d^2 &= R^2 + ΔΙ^2 - 2R \,.\, ΔΗ \\ &= R^2 + 2R \,.\, ΔΘ - 2R\, ΔΗ \\ &= R^2 - 2R\,(ΔΗ - ΔΘ) \\ &= R^2 - 2Rρ \\ &= R\,(R - 2ρ). \end{aligned}$$

327 α. Θεώρημα. Ἂν παραστήσωμεν διὰ $ρ_α$ τὴν ἀκτῖνα τῆς παρεγγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον καὶ εἰς τὴν γωνίαν Α περιφερείας καὶ διὰ $d_α$ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου αὐτῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀνάλογον σχέσιν

$$d^2_α = R\,(R + 2ρ_α). \qquad (2)$$

Σημείωσις. Τὸ *Θεώρημα τοῦ Euler* ἐδημοσιεύθη τὸ 1747. (Κατὰ τὸν Jacobi, *Journal de Crelle,* 1828). Βλ. N. A. de math., 1845, σ. 377 καὶ (§§ 1183, Σημ., 1185, β, 1)).

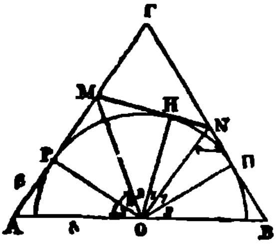
Ἐφαρμογαὶ τῶν ἀριθμητικῶν σχέσεων

328. Εἰς τὴν Ἀλγεβρικὴν Μέθοδον, ὁ ρόλος τῶν ἀριθμητικῶν σχέσεων εἶναι ἀνάλογος πρὸς ἐκεῖνον τῶν γεωμετρικῶν τόπων κατὰ τὴν γραφικὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων.

Ὁ λαμβανόμενος τύπος ἀποτελεῖ μίαν πρώτην ἐξίσωσιν μεταξὺ τῶν ἀγνώστων ποσοτήτων εἰς ἓν πρόβλημα. Ἰδοὺ μερικὰ παραδείγματα.

Πρόβλημα

329. Δίδονται δύο ἐφαπτόμεναι περιφερείας καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ τρίτη ἐφαπτομένη εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο πρώτων νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.



Σχ. 228.

Ἂς φέρωμεν τὴν διάμετρον τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΓ, τὴν ἑνοῦσαν τὸ κέντρον μετὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν δοθεισῶν ἐφαπτομένων. Ἔστω δὲ ΟΑ = δ, ΑΡ = ΒΠ = β, ΡΜ = x, ΝΠ = y.

Γνωρίζομεν ὅτι

$$MN = MP + N\Pi \quad \text{ἢ} \quad x + y = \lambda \qquad (1)$$

καὶ

$$AM \,.\, BN = \delta^2 \qquad (\S\ 325)$$

ἢ

$$(x + \beta)\,(y + \beta) = xy + \beta\,(x + y) + \beta^2 = \delta^2$$

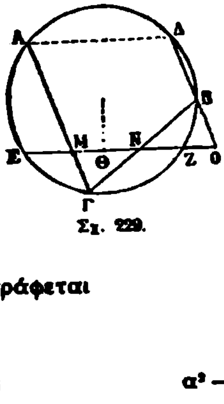
ἢ καί, λόγῳ τῆς (1),

$$xy = \delta^2 - \beta^2 - \beta\lambda. \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ὁρίζονται τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀγνώστων μηκῶν x, y, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ γνωστὸν ἤδη τῆς παραγράφου 296.

Πρόβλημα

330. Δίδονται περιφέρεια, χορδὴ ΕΖ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τρίτον σημεῖον Γ τῆς περιφερείας τοιοῦτον, ὥστε αἱ χορδαὶ ΓΑ, ΓΒ νὰ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς σταθερᾶς χορδῆς ΕΖ καὶ ἀπὸ τοῦ μέσου Θ αὐτῆς τμήματα ΘΜ, ΘΝ, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι δοθὲν κ^2.



Σχ. 229.

Ἂς θέσωμεν ΘΕ = ΘΖ = α, ΖΟ = β, ΜΘ = x καὶ ΘΝ = y.

Ἡ γνωστὴ σχέσις τῆς παραγράφου 326

$$\frac{ME\,.\,NZ}{MN} = ZO,$$

γράφεται

$$\frac{(\alpha - x)\,(\alpha - y)}{x + y} = \beta$$

ἢ

$$\alpha^2 - \alpha\,(x + y) + xy = \beta\,(x + y). \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δέ,

$$xy = \kappa^2, \qquad (2)$$

ἡ σχέσις (1) λαμβάνει καὶ τὴν μορφὴν

$$\alpha^2 - \alpha(x+y) + \kappa^2 = \beta(x+y),$$

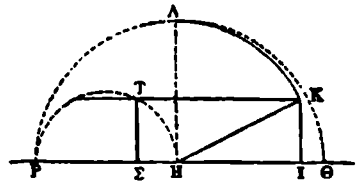
ἐξ ἧς

$$x+y = \frac{\alpha^2+\kappa^2}{\alpha+\beta}. \qquad (3)$$

Ἀνήχθημεν δηλ. πάλιν εἰς τὸ πρόβλημα τῆς παραγράφου 296.

Κατασκευή. Λαμβάνομεν (Σχ. 230), ΗΙ = ΘΖ = α, ΙΘ = ΖΟ = β καὶ φέρομεν τὴν κάθετον ΙΚ = κ. Θὰ ἔχωμεν

$$HK^2 = \alpha^2 + \kappa^2.$$



Σχ. 230.

Μεταφέρομεν ἀκολούθως τὸ τμῆμα ΗΚ ἐπὶ τοῦ ΗΛ, καθέτου ἐπὶ τὴν ΗΙ, καὶ γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Λ καὶ Θ καὶ ἔχουσαν τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς ΗΙ. Θὰ ἔχωμεν

$$PH = \frac{H\Lambda^2}{H\Theta} = \frac{\alpha^2+\kappa^2}{\alpha+\beta}$$

ἢ

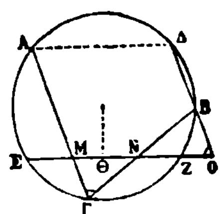
$$PH = x + y.$$

Ἐὰν τμήσωμεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΡΗ διὰ τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΗΙ, ΚΤ, τὰ τμήματα ΡΣ καὶ ΣΗ εἶναι τὰ ζητούμενα x καὶ y. Ἐπειδὴ

$$P\Sigma + \Sigma H = PH = \frac{\alpha^2 + {}^2}{\alpha+\beta} \quad \text{καὶ} \quad P\Sigma \, . \, \Sigma H = \Sigma T^2 = IK^2 = \kappa^2.$$

331. *Παρατήρησις*. Ἐπελύσαμεν ἤδη κατὰ πολὺ ἁπλοῦν τρόπον τὸ πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον ἐζητεῖτο ὅπως ΜΝ = λ ἢ ΜΘ = ΘΝ (§§ 101, 102, 275 καὶ 276, *Παρατήρησις*). Παρουσιάζει οὐχ' ἧττον ἐνδιαφέρον καὶ ἡ λύσις τὴν ὁποίαν θὰ λάβωμεν διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς σχέσεως τῆς παραγράφου 326:

$$\frac{ME \, . \, NZ}{MN} = ZO = \beta. \qquad (1)$$



Σχ 231.

1) *Ἔστω ὅτι ζητεῖται :* ΜΝ = λ.

Ἐκ τοῦ σχ. 231 λαμβάνομεν

$$ME + NZ = 2\alpha - MN = 2\alpha - \lambda \qquad (2)$$

καὶ ἐκ τῆς (1)

$$ME \, . \, NZ = (MN) \, . \, \beta = \lambda\beta. \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ὁρίζονται τὸ ἄθροισμα καὶ γινόμενον τῶν ἀγνώστων ποσοτήτων κλπ.

2) *Ἐὰν* $M\Theta = \Theta N$ ἢ $EM = NZ$,

ἡ σχέσις (1) γίνεται

$$\frac{ME^2}{2\alpha - 2ME} = \beta,$$

δηλ. δευτέρου βαθμοῦ ἐξίσωσις πρὸς τὸ ἄγνωστον μῆκος ME.

3) *Ἐὰν* $M\Theta - \Theta N = \delta$

ἢ $NZ - EM = \delta, \quad NZ = EM + \delta,$

θὰ εἶναι $MN = 2\alpha - EM - (EM + \delta) = 2\alpha - 2EM - \delta$

καὶ ἡ σχέσις (1) γίνεται

$$\frac{(ME)(ME + \delta)}{2\alpha - 2ME - \delta} = \beta,$$

ἥτις εἶναι πάλιν ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ πρὸς τὸ μῆκος ME.

4) Ἂν $\frac{M\Theta}{\Theta N} = \frac{\mu}{\nu}$ ἢ $M\Theta = \Theta N \cdot \frac{\mu}{\nu}$, λαμβάνομεν διαδοχικῶς:

$$MN = M\Theta + \Theta N = \Theta N \cdot \frac{\mu}{\nu} + \Theta N = \Theta N\left(\frac{\mu + \nu}{\nu}\right),$$

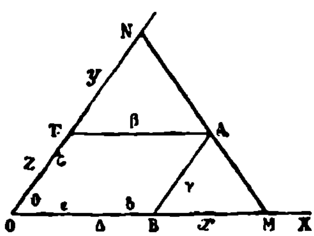
$$EM = \alpha - M\Theta = \alpha - \Theta N \cdot \frac{\mu}{\nu} = \frac{\nu\alpha - \mu \cdot \Theta N}{\nu},$$

καὶ ἡ σχέσις (1) δίδει τήν, δευτέρου βαθμοῦ πάντοτε, ἐξίσωσιν πρὸς τὸ ἄγνωστον μῆκος ΘΝ:

$$\frac{(\nu\alpha - \mu\Theta N)(\alpha - \Theta N)}{\Theta N(\mu + \nu)} = \beta.$$

Προβλήματα τοῦ Ἀπολλωνίου

332. Ἐπὶ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ δίδονται δύο σημεῖα σταθερὰ Δ καὶ Ζ. Νὰ ἀχθῇ διὰ σημείου δοθέντος Α τέμνουσα τὰς εὐθείας ΜΑΝ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ πληροῦται μία τῶν ἑπομένων συνθηκῶν.



Σχ. 232.

α΄. Πρόβλημα, *Περὶ λόγου ἀποτομῆς.*

Τὰ τμήματα ΔΜ, ΖΝ ὀφείλουν νὰ εὑρίσκωνται εἰς δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ πρὸς ἄλληλα.

Ἂς θέσωμεν

$MB = x, \quad N\Gamma = y$·

θὰ ἔχωμεν τὴν γενικὴν πρῶτον σχέσιν (§ 324),

$$xy = \beta\gamma \qquad (1)$$

καὶ τὴν ἐκ τῶν δεδομένων

$$\frac{\Delta M}{ZN} = \frac{\delta + x}{\zeta + y} = \frac{\mu}{\nu}$$

ἢ

$$\nu\delta + \nu x = \mu\zeta + \mu y. \qquad (2)$$

Τὸ πρόβλημα δύναται νὰ θεωρηθῇ λελυμένον ἀφοῦ αἱ ἐξισώσεις (2) καὶ (1) εἶναι πρώτου καὶ δευτέρου βαθμοῦ ἀντιστοίχως.

β'. Πρόβλημα, *Περὶ χωρίου ἀποτομῆς*.

Τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν ΔΜ, ΖΝ πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον κ^2.

Θὰ ἔχωμεν

$$(\delta+x)(\zeta+y)=\delta\zeta+\delta y+\zeta x+x\quad=\kappa^2$$

ἢ ἐκ τῆς (1)

$$\zeta x+\delta y=\kappa^2-\beta\gamma-\delta\zeta. \qquad (3)$$

Αἱ ἐξισώσεις (3) καὶ ( ) εἶναι πάλιν πρώτου καὶ δευτέρου βαθμοῦ ἀντιστοίχως πρὸς τὰ μήκη x, y.

333. *Ἄλλα προβλήματα*. Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ζητήσωμεν θέσεις τῆς τεμνούσης τοιαύτας, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

(γ) $$\Delta M+ZN=\lambda$$

ἢ $$\delta+x+\quad+y=\lambda,\quad x+y=\lambda-\delta-\zeta. \qquad (4)$$

Αἱ (1) καὶ (4) ὁρίζουν τὸ ἄθροισμα καὶ γινόμενον τῶν μηκῶν x, y.

(δ) $$\Delta M-ZN=\lambda,$$

ἢ $$\delta+x-(\zeta+y)=\lambda,\quad x-y=\lambda-\delta+\zeta. \qquad (5)$$

(ε) $$\frac{O\Delta\,.\,OM}{OZ\,.\,ON}=\frac{\mu}{\nu},$$

ἢ $$\frac{\varepsilon\,(x+\beta)}{\theta\,(y+\gamma)}=\frac{\mu}{\nu}, \qquad (6)$$

ἥτις εἶναι πρώτου βαθμοῦ πρὸς τὰ μήκη x, y.

334. *Σημείωσις*. Θεωροῦμεν χρήσιμον νὰ παραθέσωμεν κατωτέρω (§ 334 α) ἓν τρίτον περίφημον πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου, ἂν καὶ δὲν σχετίζεται ἀμέσως πρὸς τὰ δύο πρῶτα.

Διατηροῦμεν τὰς ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου δοθείσας ὀνομασίας.— Τὸ πρόβλημα (α) ὠνομάσθη *περὶ λόγου ἀποτομῆς*, ἐπειδὴ ὁ *λόγος* τῶν τμημάτων πρέπει νὰ εἶναι ὡρισμένος. Τὸ (β) εἶναι τὸ *περὶ χωρίου ἀποτομῆς*, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν τμημάτω εἶναι τετράγωνον ἢ μία ἐπιφάνεια. Τὸ τρίτον πρόβλημα (§ 334, α) ἐκλήθη *πρόβλημα τῆς διωρισμένης ἀποτομῆς*, ἐκ τοῦ ὅτι ὁ λόγος τῶν γινομένων εἶναι ὡρισμένος ἀριθμός.

Πρόβλημα τῆς διωρισμένης ἀποτομῆς

334 α. **Δοθέντων τεσσάρων σημείων ἐπ' εὐθείας γραμμῆς (ε), ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ πέμπτον, τοιοῦτον, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ δύο ἐκ τῶν δοθέντων σημείων νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων ἴσον πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων μηκῶν μ καὶ ν.**

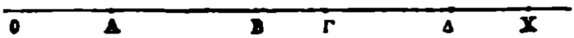
Ἔστωσαν Α, Β, Γ, Δ τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ Χ τὸ ζητούμενον. Θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν (ε) ὡς ἄξονα καὶ καλέσωμεν α, β ... x τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων αὐτῆς Α, Β ... Χ ἀπὸ τινος ἀρχῆς Ο. Ἡ σχέσις τῆς ἐκφωνήσεως

$$\frac{AX\,.\,BX}{\Gamma X\,.\,\Delta X}=\frac{\mu}{\nu},$$

γράφεται, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν ΑΧ διὰ $x - \alpha, \dots,$ ΔΧ διὰ $x - \delta$, ὑπὸ τὴν μορφὴν τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-\gamma)(x-\delta)} = \frac{\mu}{\nu},$$

ἥτις εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καὶ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ νὰ διερευνήσωμεν.



Σχ. [illegible].

Ὑπάρχουν δύο λύσεις, μία ἢ καμμία λύσις, ἀναλόγως τῆς σχετικῆς θέσεως τῶν Α, Β, Γ, Δ.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ἐξετάσωμεν τὸ πρόβλημα τῶν μεταβολῶν τοῦ λόγου $\frac{\mu}{\nu}$. Ἐὰν λόγου χάριν τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ ἔχουν κοινὸν μέρος, ὡς ὅταν τὸ σημεῖον Β εὑρίσκεται μεταξὺ Δ καὶ Γ, ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ δὲν ἔχει οὔτε μέγιστον, οὔτε ἐλάχιστον.

334 β. ***Σημείωσις.*** Ὁ Ἀπολλώνιος συνέγραψε τρία ἔργα: *Περὶ λόγου ἀποτομῆς (De Sectione rationi)*, *Περὶ χωρίου ἀποτομῆς (De Sectione spatii)* καὶ *Περὶ διωρισμένης ἀποτομῆς (De sectione determinata)*.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο περιεῖχε 81 προτάσεις.

Ὁ Halley μετέφρασε τὸ πρῶτον τῶν τριῶν τούτων ἔργων καὶ ἀπεκατέστησε τὸ κείμενον τοῦ δευτέρου κατὰ τὰς ὑποδείξεις τοῦ Πάππου. (Βλ. Chasles, *Aperçu historique*, σ. 24, 41 154 καὶ *Géométrie Supérieure*, n°s 281, 296 καὶ 298).

Τὰ τρία *προβλήματα τοῦ Ἀπολλωνίου* περιελάμβανον μέγα ἀριθμὸν προτάσεων, ἐπειδὴ οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἀπεδείκνυον ἀπ' εὐθείας ἑκάστην περίπτωσιν, ἑκάστην ποικιλίαν, ἕκαστον διάφορον σχῆμα ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ζητήματος. Αἱ ἀλγεβρικαὶ καὶ ἀναλυτικαὶ γενικεύσεις ἦσαν ἄγνωστοι καὶ ἀπῃτεῖτο ἰδιαιτέρα ἐπίπονος σπουδὴ ἑκάστης ἰδιομορφίας ἑνὸς ὡρισμένου προβλήματος ἢ θεωρήματος.

Τὸ πρόβλημα τῆς *διωρισμένης ἀποτομῆς* ἀνάγεται εἰς τὸ ἑπόμενον: Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς διακέντρου δύο περιφερειῶν σημεῖον διὰ τὸ ὁποῖον ὁ λόγος τῶν δυνάμεων αὐτοῦ πρὸς τὰς περιφερείας νὰ εἶναι δοθεὶς $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἐπειδὴ $(x-\alpha)(x-\beta)$ εἶναι ἡ δύναμις τοῦ ζητουμένου σημείου Χ πρὸς τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον ΑΒ.

VII

ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

335. Ὀνομάζεται *μεταβλητὴ* μία ποσότης ἐὰν δύναται νὰ διέλθῃ διαδοχικῶς διὰ διαφόρων καταστάσεων μεγέθους.

Δύο μεταβληταὶ λέγονται *συναρτήσεις* ἀλλήλων ἐὰν αἱ μεταβολαὶ τῆς μιᾶς συνεπάγωνται μεταβολὰς τῆς ἄλλης.

Ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι ἐκείνη εἰς τὴν ὁποίαν προσδίδομεν αὐθαιρέτους τιμάς· ἡ ἄλλη καλεῖται τότε ἡ *ἐξηρτημένη μεταβλητὴ* ἢ καὶ συνάρτησις τῆς πρώτης.

Ὅταν μία μεταβλητή, μεταβαλλομένη κατὰ συνεχῆ τρόπον καὶ κατ' ἀρχὰς αὐξανομένη, ἄρχεται ἐλαττουμένη, διέρχεται διά τινος τιμῆς, μεγαλυτέρας ἀπὸ τὰς ἀμέσως προηγουμένας καὶ ἀμέσως ἑπομένας αὐτῆς. Ἡ τιμὴ αὕτη καλεῖται *μέγιστον* τῆς συναρτήσεως. Τοὐναντίον, ἐὰν μετὰ προηγουμένην συνεχῆ ἐλάττωσιν, ἄρχεται αὐξανομένη, ἡ συνάρτησις διέρχεται διὰ τιμῆς μικροτέρας πασῶν τῶν ἀμέσως γειτονικῶν αὐτῆς· ἡ τιμὴ αὕτη καλεῖται *ἐλάχιστον* τῆς συναρτήσεως.

336. *Ἀλγεβρικὴ μέθοδος.* Ἡ γενικωτέρα καὶ μᾶλλον γόνιμος μέθοδος πρὸς προσδιορισμὸν τῶν *μεγίστων* καὶ *ἐλαχίστων* μιᾶς συναρτήσεως, συνίσταται εἰς τὸν χειρισμὸν τοῦ ζητήματος διὰ τῆς Ἀλγέβρας καὶ εἰς τὴν διερεύνησιν τῶν ἀποτελεσμάτων κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας. Εἶναι ὅμως προτιμότερον νὰ ἐπιφυλάξωμεν τὴν μέθοδον αὐτὴν διὰ τὰς ἀσκήσεις τῆς Ἀλγέβρας.

Χωρὶς νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς ἐξισώσεις, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κατὰ πολὺ ἁπλοῦν τρόπον τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα, τὰ ἀναφερόμενα εἰς μέγαν ἀριθμὸν γεωμετρικῶν ζητημάτων.

§ I. *Ὁριακὴ λύσις*

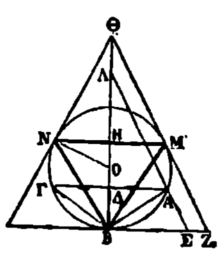
337. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ὁριακῆς λύσεως τὴν ὁποίαν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιδέχεται ἓν πρόβλημα, ἐπιλύομεν τοῦτο διὰ μίαν *ἰδιαιτέραν τιμὴν* (τῆς μεταβλητῆς τῆς καθοριζούσης τὴν λύσιν αὐτοῦ) καὶ ἐξετάζομεν ἀκολούθως διὰ ποίαν εἰδικὴν τιμὴν (τῆς ἐν λόγῳ μεταβλητῆς) ἢ θέσιν παύει τὸ πρόβλημα νὰ εἶναι δυνατὸν ἢ ἐπιλύσιμον.

Πρόβλημα

338. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ τὸ μέγιστον ἄθροισμα βάσεως καὶ ὕψους.

Ἂς ἐξετάσωμεν κατὰ πρῶτον ἐὰν τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται μέγιστον.

Διὰ τὸ τρίγωνον μὲ βάσιν ἀπείρως ἐγγὺς τῆς κορυφῆς B, τὸ ἄθροισμα βάσεως καὶ ὕψους εἶναι μηδέν. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο γίνεται 3R ὅταν ἡ βάσις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου· πέραν ὅμως τούτου ἐλαττοῦται, ἀφοῦ ἡ τιμή του γίνεται 2R διὰ βάσιν περιοριζομένην εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς διὰ τοῦ B διαμέτρου. Ἑπομένως [29], μεταξὺ τῶν δύο τούτων θέσεων τὸ ἄθροισμα λαμβάνει μίαν μεγίστην τιμήν.



Σχ. 234.

Κατασκευή. Διὰ μίαν ὡρισμένην τιμὴν λ τοῦ ἀθροίσματος, ἐκτελοῦμεν τὴν γνωστὴν ἤδη κατασκευὴν (§ 211). Λαμβάνομεν $BΛ = λ$, $BE = \frac{λ}{2}$ καὶ ὁρίζομεν τὰ κοινὰ σημεῖα, Α καὶ Α', τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας ΕΛ. Ταῦτα καθορίζουν δύο τρίγωνα ἀντίστοιχα τοῦ μήκους λ.

Τὸ μέγιστον ἑπομένως μῆκος λ δίδεται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΖΜΘ, *παραλλήλου πρὸς τὴν* ΛΕ.

Τὸ ἄθροισμα εἶναι $BH + MN = BΘ$.

Τιμὴ τοῦ μεγίστου. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΝΘ, ΒΖΘ, λαμβάνομεν:

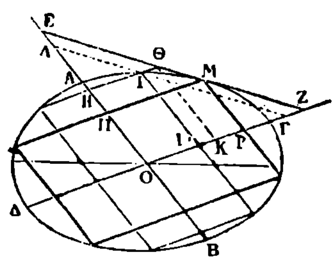
$$NΘ = 2 . NO = 2R, \quad \text{ἐπειδὴ } BΘ = 2 . BZ,$$

καὶ

$$OΘ = R\sqrt{5}, \quad BΘ = R(1 + \sqrt{5}).$$

Πρόβλημα

339. Εἰς κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τὸ μεγίστης περιμέτρου ὀρθογώνιον ἢ καί: Δοθείσης ἐλλείψεως, νὰ ἀχθοῦν δύο παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν διάμετρον, ἴσον ἀπέχουσαι αὐτῆς καὶ τοιαῦται, ὥστε τὸ εἰς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦν ἐγγεγραμμένον παραλληλόγραμμον νὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην περίμετρον.



Σχ. 235.

Γνωρίζομεν ὅτι αἱ πλευραὶ παραλληλογράμμου ἐγγεγραμμένου εἰς ἔλλειψιν εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς. Φέρομεν ἑπομένως τὴν διάμετρον ΔΓ, συζυγῆ τῆς δοθείσης ΑΒ, καὶ ἐφαπτομένην ΕΜΖ τοιαύτην, ὥστε $OE = OZ$. Τὸ σημεῖον Μ εἶναι ἡ ζητουμένη κορυφή.

Πράγματι, κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου (§ 19), ἔχομεν $MΠ + MP = ΘH + ΘK$·

ἄρα $MP + MΠ > II' + IH$ κλπ.

---

29. Σημ. μετ. Εἰς πολλὰ προβλήματα τοῦ κεφαλαίου τούτου, ὡρισμένα συμπεράσματα θὰ πρέπει νὰ θεωρῶνται δάνεια ἐκ τῆς σπουδῆς διὰ τῆς *Ἀναλύσεως* τῶν προβλημάτων αὐτῶν.

Παρατήρησις. Τὸ προηγούμενον ζήτημα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ ἑπομένου.

Πρόβλημα

340. **Δίδονται δύο εὐθεῖαι καὶ μία καμπύλη. Δι' ἑκάστου σημείου τῆς καμπύλης ἄγονται παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας καὶ τερματιζόμεναι εἰς αὐτάς. Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν τούτων.**

Ἂς λάβωμεν δύο ἴσα μήκη ΟΑ, ΟΒ ἐπὶ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν· ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΟΒ καὶ διὰ τὸ κοινὸν σημεῖον Δ τῆς βάσεώς του καὶ τῆς καμπύλης, εὑρίσκομεν

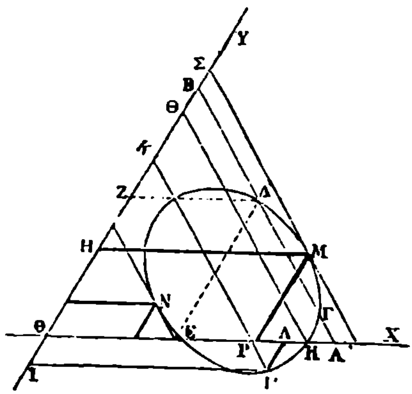
$$ΔΕ + ΔΖ = ΟΑ = ΟΒ.$$

Διὰ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ θὰ πρέπει νὰ φέρωμεν τάς, παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ, ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης. Τὸ σημεῖον Μ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον

$$ΜΡ + ΜΠ = ΟΣ,$$

καὶ τὸ Ν εἰς τὸ ἐλάχιστον.

Διὰ τὸ σημεῖον Ι' ἔχομεν



Σχ. 236.

$$ΙΙ' - Ι'Λ = ΟΚ.$$

Διὰ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς καμπύλης καὶ τῶν ἀξόνων, ὡς τὸ Η, τὸ ἓν τῶν μηκῶν εἶναι μηδέν.

Παρατήρησις. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα διὰ τὰ ἀκρότατα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐκ τῶν σημείων τῆς καμπύλης ἀγομένων καθέτων ἐπὶ τὰς εὐθείας ΟΧ, ΟΥ.

Πρόβλημα

341. Δίδονται περιφέρεια καὶ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ. Διὰ ποῖον σημεῖον Α τῆς περιφερείας ἡ γωνία ΓΑΔ γίνεται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη ;

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν γωνίαν ΓΑΔ δοθέντος μεγέθους φ, θὰ πρέπει νὰ γράψωμεν ἐπὶ τῆς ΓΔ κ. τόξον δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς φ. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἐκ τῶν τόξων τῶν διερχομένων διὰ τῶν Γ καὶ Δ, τὸ ἐφαπτόμενον τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ ἔχον τὴν μεγαλυτέραν ἀκτῖνα, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μικροτέραν ἐγγεγραμμένην γωνίαν, εἰς τὴν μεγαλυτέραν δέ, τὸ ἐφαπτόμενον τῆς δοθείσης καὶ ἔχον τὴν μικροτέραν ἀκτῖνα.

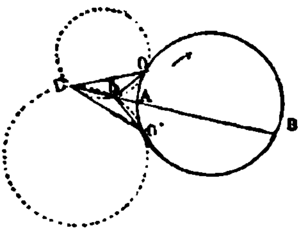
Ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ ἐξέτασις τῶν διαφόρων περιπτώσεων τοῦ γενικοῦ ζητήματος.

1) Τὸ τμῆμα ΓΔ εἶναι ἐξωτερικὸν καὶ ἡ προέκτασίς του τέμνει

τὴν περιφέρειαν ἐπὶ τῆς ὁποίας θὰ πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἡ κορυφή του (Σχ. 237).

Διὰ τῶν Γ καὶ Δ γράφομεν περιφερείας ΓΔΟ, ΓΔΟ', ἐφαπτομένας τῆς δοθείσης.

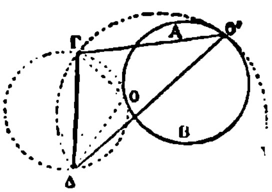
Εἰς τὸ σημεῖον Α, ἡ γωνία εἶναι μηδέν· ἀπὸ τοῦ Α μέχρι τοῦ Ο ἡ γωνία αὐξάνει καὶ γίνεται μεγίστη εἰς τὸ Ο, ἀπὸ τοῦ σημείου δὲ τούτου μέχρι τοῦ Β ἡ γωνία ἐλαττοῦται μέχρι νέου μηδενισμοῦ της εἰς τὸ Β. Ἀπὸ τοῦ σημείου Β πάλιν μέχρι τοῦ Ο', ἡ γωνία αὐξάνει, λαμβάνει μίαν δευτέραν μεγίστην τιμὴν εἰς τὸ Ο' καὶ κατόπιν ἄρχεται ἐλαττουμένη μέχρι μηδενισμοῦ εἰς τὸ Α.



Σχ. 237.

2) Ἐὰν ἡ προέκτασις τοῦ ΓΔ δὲν τέμνῃ τὴν περιφέρειαν (Σχ. 238), τὸ μέγιστον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ Ο· ἀπὸ τοῦ Ο μέχρι τοῦ Ο', ἡ γωνία ἐλαττοῦται, γίνεται ἐλαχίστη εἰς τὸ Ο' καὶ κατόπιν αὐξάνει πάλιν μέχρι τοῦ Ο.

3) Ἐὰν ἡ προέκτασις τῆς εὐθείας ΓΔ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ο' ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἐλάχιστον· ἀπὸ τοῦ σημείου αὐτοῦ μέχρι τοῦ σημείου Ο τῆς διὰ τῶν Γ, Δ περιφερείας, τῆς ἐφαπτομένης τῆς δοθείσης, ἡ γωνία αὐξάνει, γίνεται μεγίστη εἰς Ο καὶ κατόπιν ἐλαττοῦται πάλιν μέχρι τοῦ Ο'.



Σχ. 238.

4) Εἰς τὴν ἰδίαν περίπτωσιν, ἐὰν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ο τῆς ΓΔ καὶ τῆς περιφερείας εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ, τὸ μέγιστον τῆς γωνίας συμβαίνει εἰς τὸ Ο καὶ ἡ τιμή του εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι. Ἐλαττοῦται κατόπιν καὶ γίνεται ἐλαχίστη εἰς τὸ Ο', σημεῖον ἐσωτερικῆς ἐπαφῆς τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ τῆς διὰ τῶν Γ καὶ Δ γραφομένης.

5) Ἐὰν τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ΓΔ καὶ τῆς περιφερείας εὑρίσκωνται τὸ ἕν, Α, μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ καὶ τὸ ἄλλο, Β, ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΓΔ, ἡ γωνία εἶναι μηδὲν εἰς τὸ Β καὶ αὐξάνει ἀπὸ τοῦ σημείου αὐτοῦ μέχρι τοῦ Α,,ὅπου λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμήν της, δύο ὀρθαὶ γωνίαι. Ἐλαττοῦται κατόπιν καὶ μηδενίζεται πάλιν εἰς τὸ Β.

6) Ἐάν, τέλος, τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι ἐσωτερικὰ τοῦ τμήματος ΓΔ, ὑπάρχουν δύο ἐλάχιστα καί, εἰς τὰ Α καὶ Β, δύο μέγιστα, ἴσα πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας.

§ II. *Χρῆσις τῶν ἀρχῶν*

342. Ὅπως εἰς τὴν Ἄλγεβραν, οὕτω καὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν δυνάμεθα νὰ βασιζώμεθα, κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων τῶν γεωμετρικῶν συναρτήσεων, ἐπὶ μερικῶν *ἀρχῶν*.

Ἡ ἀπόδειξις ἢ τουλάχιστον ἡ δικαίωσις τῶν ἀρχῶν αὐτῶν δι' ὁδῶν καθαρῶν γεωμετρικῶν εἶναι εὔκολος· ἐπειδὴ ἀρκεῖ νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ μερικῶν ἁπλῶν καὶ γνωστῶν σχημάτων.

Πρώτη ἀρχὴ

343. **Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων (80) τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν, γίνεται μέγιστον ὅταν οἱ παράγοντες αὐτοὶ καταστοῦν ἴσοι μεταξύ των.**

Ἀρκεῖ πράγματι ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος ΒΓ τῶν δύο γραμμικῶν παραγόντων μ, ν νὰ γράψωμεν ἡμιπεριφέρειαν. Γνωρίζομεν ὅτι

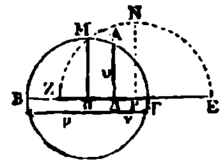
$$μν = υ^2$$

καὶ τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου αὐτοῦ λαμβάνεται διὰ παράγοντας μ = ΒΟ, ν = ΟΓ ἴσους. Ἐπειδὴ τότε

$$ΒΟ \, . \, ΟΓ = ΜΟ^2$$

καὶ

$$ΜΟ > ΑΔ.$$



Σχ. 239.

343 α. ***Σημείωσις.*** Θὰ πρέπει ὅπως οἱ δύο παράγοντες νὰ *δύνανται* νὰ καταστῶσιν ἴσοι, ὡς ὑπέδειξεν καὶ ἔδωσε καὶ παράδειγμα ὁ Burali-Forti εἰς τὸ *Enseignement Mathématique* (1910, σ. 512).

Ἡ αὐτὴ παρατήρησις ἰσχύει καὶ δι' ὅλας τὰς ἀναλόγους περιπτώσεις.

Δευτέρα ἀρχὴ

344. **Τὸ ἄθροισμα δύο παραγόντων, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι σταθερόν, γίνεται ἐλάχιστον ὅταν οἱ παράγοντες οὗτοι καταστοῦν ἴσοι μεταξύ των.**

Ἡ ἀρχὴ αὕτη εἶναι συνέπεια τῆς προηγουμένης. Ἔστω πράγματι $ΜΟ^2$ τὸ σταθερὸν γινόμενον καὶ ΒΓ ἢ 2ΜΟ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγόντων, ὅταν εἶναι ἴσοι. Ἐὰν εἶναι ἄνισοι, δυνάμεθα νὰ τοὺς θεωρήσωμεν ὡς τὰ μήκη τῶν δύο τμημάτων ΕΟ, ΟΖ τῆς διαμέτρου ἡμιπεριφερείας ΕΜΝΖ, διερχομένης διὰ τοῦ Μ· ἐπειδὴ θὰ εἶναι

$$ΕΟ \, . \, ΟΖ = ΟΜ^2.$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$$ΕΖ = 2ΡΝ, \quad ΡΝ \text{ δὲ } > ΟΜ\cdot$$

ἄρα

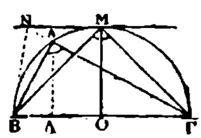
$$ΒΓ < ΕΖ.$$

Τρίτη ἀρχὴ

345. **Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων εἶναι σταθερόν, γίνεται μέγιστον ὅταν οἱ παράγοντες οὗτοι καταστοῦν ἴσοι μεταξύ των.**

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τοὺς δύο παράγοντας ΑΒ, ΑΓ ὡς τὰς καθέτους πλευρὰς ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν ΒΓ ἴσην πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς σταθερᾶς ποσότητος $κ^2$. Θὰ ἔχωμεν

$$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2 = ΜΒ^2 + ΜΓ^2$$



Σχ. 240.

80. Σημ. μετ. Θὰ ἦτο προτιμώτερον: Τὸ ὀρθογώνιον δύο (εὐθυγράμμων) τμημάτων.

καὶ $AB \cdot A\Gamma = B\Gamma \cdot A\Delta$.

'Αλλ' εἶναι $MB \cdot M\Gamma = B\Gamma \cdot MO$

καὶ $MO > A\Delta$,

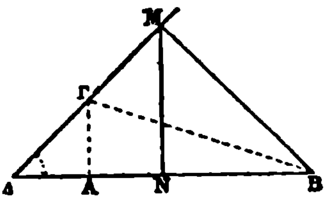
ἐὰν ὡς M ληφθῇ τὸ μέσον τοῦ τόξου BAΓ καὶ $MB = M\Gamma$. Εἶναι, κατὰ συνέπειαν, τὸ γινόμενον $MB \cdot M\Gamma$ μεγαλύτερον τοῦ $AB \cdot A\Gamma$.

'Εκ τῆς ἀνωτέρω ἀρχῆς ἕπεται ἡ ἑπομένη ἀντίστροφος αὐτῆς.

Τετάρτη ἀρχὴ

346. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο παραγόντων, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι σταθερόν, γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν οἱ παράγοντες καταστοῦν ἴσοι.

'Η ἀπ' εὐθείας ἀπόδειξις τῆς ἀρχῆς ταύτης εἶναι πολὺ ἁπλῆ: Διὰ τοῦ σημείου M (Σχ. 240) φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν BΓ, προεκτείνομεν τὴν ΓA μέχρι τοῦ N καὶ φέρομεν τὴν BN.



Σχ. 241.

Τὰ τρίγωνα BMΓ, BNΓ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἄρα

$$BM \cdot M\Gamma = BA \cdot N\Gamma.$$

'Αλλὰ

$$BM^2 + M\Gamma^2 = BA^2 + A\Gamma^2 \cdot$$

ὅθεν

$$BM^2 + M\Gamma^2 < BA^2 + N\Gamma^2,$$

ἀφοῦ $N\Gamma > A\Gamma$.

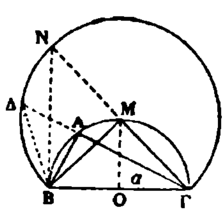
Παρατήρησις. 'Η ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι σταθερὸν λ, γίνεται ἐλαχίστη, ὅταν αἱ κάθετοι πλευραὶ καταστοῦν ἴσαι.

"Εστω BΓA ἓν ἐκ τῶν τριγώνων τούτων (Σχ. 241)· ἂν λάβωμεν $A\Delta = A\Gamma$, ἡ γωνία BΔΓ θὰ εἶναι 45° καὶ ὁ τόπος τοῦ σημείου Γ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΔM, σχηματίζουσα τὴν γωνίαν αὐτὴν μετὰ τοῦ τμήματος $B\Delta = \lambda$. 'Η δὲ ἐλαχίστη ὑποτείνουσα BΓ θὰ εἶναι προφανῶς ἡ ἐκ τοῦ σημείου B κάθετος BM ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔM.

Θὰ ἔχωμεν τότε

$$NM = NB,$$

ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς ὀρθογωνίου τριγώνου BNM.



Σχ. 241 β.

Πέμπτη ἀρχὴ

346 α. Τὸ ἄθροισμα δύο εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων εἶναι σταθερόν, γίνεται μέγιστον, ὅταν τὰ τμήματα καταστοῦν ἴσα.

"Εστω $AB^2 + A\Gamma^2 = \alpha^2$.

'Εὰν λάβωμεν $A\Delta = AB$, τὸ ἄθροισμα ΓΔ τῶν τμημάτων εἶναι χορδὴ κ. τόξου διερχομένου διὰ τῶν B καὶ Γ καὶ δεχομένου γωνίαν 45°. 'Επειδὴ τὸ κέντρον τοῦ τόξου τούτου εἶναι

τὸ μέσον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας ΒΑΓ, τὸ μέγιστον ἄθροισμα ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν διάμετρον ΓΜΝ, δηλ. ὅταν τὰ τμήματα ΜΒ καὶ ΜΓ εἶναι ἴσα.

Ἕκτη ἀρχή

346 β. **Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν εἶναι σταθερόν, γίνεται ἐλάχιστον ὅταν τὰ τμήματα καταστοῦν ἴσα.**

Ἔστω 2λ τὸ σταθερὸν μῆκος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τμημάτων· ἂν τὰ μήκη αὐτῶν παρασταθοῦν διὰ $\lambda + x$ καὶ $\lambda - x$, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των εἶναι $2(\lambda^2 + x^2)$. Τὸ ἐλάχιστον δὲ τῆς ποσότητος αὐτῆς λαμβάνεται διὰ $x = 0$, δηλ. ὅταν τὰ μήκη τῶν τμημάτων εἶναι ἴσα.

Ἑβδόμη ἀρχή

347. **Ἐὰν δύο μεταβληταὶ ποσότητες, πολλαπλασιασμέναι ἐπὶ σταθεροὺς συντελεστάς, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν, τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου αὐτῶν λαμβάνεται, ὅταν αἱ ποσότητες καταστοῦν ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν οἰκείων συντελεστῶν αὐτῶν.**

Ἔστω $$\alpha x + \beta y = \lambda. \qquad (1)$$

Τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου xy συμβαίνει ὅταν $\frac{x}{\beta} = \frac{y}{\alpha}$.

Ἂς θέσωμεν πράγματι $xy = \kappa^2$ καὶ ἂς ἀπαλείψωμεν μίαν τῶν ἀγνώστων ποσοτήτων, τὴν y λ.χ., μεταξὺ τῆς σχέσεως αὐτῆς καὶ τῆς (1). Εὑρίσκομεν

$$x = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha\beta\kappa^2}}{2\alpha}.$$

Ἡ ὑπόρριζος ποσότης μηδενίζεται διὰ

$$\kappa^2 = \frac{\lambda^2}{4\alpha\beta},$$

ὁπότε

$$x = \frac{\lambda}{2\alpha}, \quad y = \frac{\lambda}{2\beta}, \quad xy = \frac{\lambda^2}{4\alpha\beta}, \qquad (2)$$

καὶ

$$\frac{x}{y} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x}{\beta} = \frac{y}{\alpha}. \text{ [91]}$$

Ἐπαλήθευσις. Ἐὰν θέσωμεν

$$x = \frac{\lambda + \gamma}{2\alpha}, \quad y = \frac{\lambda - \gamma}{2\beta}, \qquad (\gamma \text{ παράμετρος})$$

ἡ σχέσις (1) πληροῦται, τὸ δὲ γινόμενον

$$xy = \frac{\lambda^2 - \gamma^2}{4\alpha\beta}.$$

---

91. Σημ. μετ. Ἡ ἀπόδειξις εἶναι συνέπεια ἐκ τῆς σπουδῆς ἑνὸς τριωνύμου β´ βαθμοῦ.

γίνεται προφανῶς μέγιστον διὰ $\gamma = 0$. Ὥστε:

$$\text{Μεγ. τοῦ } xy = \frac{\lambda^2}{4\alpha\beta},$$

κατὰ τὰ εὑρεθέντα (2).

Παρατήρησις. Διὰ τὰς ἐφαρμογὰς τὰς ὁποίας θὰ συναντήσωμεν ἀργότερον, θέτομεν $\lambda = 2S$ καὶ

$$x = \frac{S}{\beta}, \quad y = \frac{S}{\alpha}. \qquad (3)$$

Ὀγδόη ἀρχή

348. *Ἐὰν δύο μεταβληταὶ ποσότητες, πολλαπλασιασμέναι ἐπὶ σταθεροὺς συντελεστάς, ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν αἱ ποσότητες καταστοῦν ἀνάλογοι τῶν οἰκείων συντελεστῶν αὐτῶν.*

Ἔστω $$\alpha x + \beta y = \lambda. \qquad (1)$$

Τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος $x^2 + y^2$ συμβαίνει ὅταν

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}.$$

Ἂς θέσωμεν πράγματι $x^2 + y^2 = \kappa^2$ καὶ ἂς ἀπαλείψωμεν μίαν τῶν ἀγνώστων ποσοτήτων, τὴν y λ.χ., μεταξὺ τῆς σχέσεως αὐτῆς καὶ τῆς (1). Ἀναγόμεθα, ὅπως καὶ προηγουμένως, εἰς δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν πρὸς x, ἐκ μηδενισμοῦ τῆς διακρινούσης τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$\kappa^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad x = \frac{\alpha\lambda}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad y = \frac{\beta\lambda}{\alpha^2 + \beta^2},$$

καὶ ἑπομένως

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}, \quad x^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha^2 + \beta^2}. \qquad (2)$$

Ἐπαλήθευσις. Ἐὰν θέσωμεν:

$$x = \frac{\alpha\lambda + \beta\gamma}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad y = \frac{\beta\lambda - \alpha\gamma}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (\gamma \text{ παράμετρος})$$

ἡ σχέσις (1) πληροῦται, τὸ δὲ ἄθροισμα

$$x^2 + y^2 = \frac{\lambda^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

γίνεται προφανῶς ἐλάχιστον διὰ $\gamma = 0$. Ὥστε

$$\text{Ἐλαχ. τοῦ } x^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{x}{y} = \frac{\alpha}{\beta},$$

κατὰ τὰ εὑρεθέντα (2).

Παρατήρησις. Διὰ τὰς ἐφαρμογάς, θέτομεν $\lambda = 2S$ καὶ

$$x = \frac{2\alpha S}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad y = \frac{2\beta S}{\alpha^2 + \beta^2} \qquad (3)$$

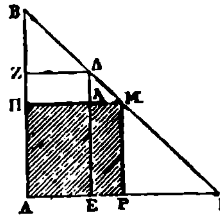
Πρόβλημα

349. Εἰς ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον.

1) Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν του εἶναι σταθερόν,

$$ΜΡ + ΜΠ = ΔΕ + ΔΖ.$$

Κατὰ τὴν πρώτην ἄρα ἀρχήν, τὸ γινόμενον ΜΡ . ΜΠ, ὅπερ ἐκφράζει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΜΡΑΠ, θὰ εἶναι μέγιστον ἐὰν ΜΡ = ΜΠ, δηλ. ὅταν τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης.



Σχ. 242.

2) Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι:

Τὰ ὀρθογώνια ΜΡΑΠ, ΔΕΑΖ ἔχουν κοινὸν μέρος· ἂς συγκρίνωμεν τὰ μὴ κοινὰ αὐτῶν μέρη ΜΡΕΛ καὶ ΔΛΠΖ.

Τὰ ὕψη ΜΛ, ΔΛ τῶν ὀρθογωνίων τούτων εἶναι ἴσα (ΜΔΛ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον), ἐνῷ

$$ΜΡ \text{ ἢ } ΜΠ > ΛΠ.$$

Ἄρα $$ΜΡΕΛ > ΔΛΠΖ$$

καὶ τὸ τετράγωνον ΜΡΑΠ εἶναι τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον.

Πρόβλημα

350. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον.

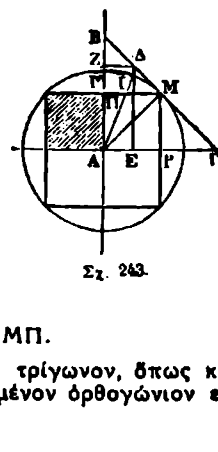
1) Κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην ΒΓ, ὥστε ΑΒ = ΑΓ. Τὸ μέσον Μ τῆς ὑποτεινούσης εἶναι καὶ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.

Θεωροῦντες τὸ τέταρτον τῆς ἐπιφανείας, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ἐπιφ. } ΑΡΜΠ > ΑΕΔΖ,$$

ὁπότε, κατὰ μείζονα λόγον,

$$ΑΡΜΠ > ΑΕΙΙ',$$



Σχ. 243.

2 Ἐπειδὴ

$$ΙΕ^2 + ΙΙ'^2 = R^2 = ΜΡ^2 + ΜΠ^2,$$

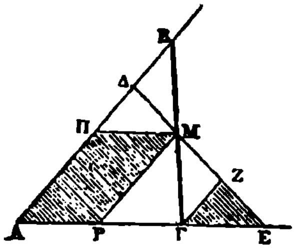
κατὰ τὴν τρίτην ἀρχήν, τὸ μέγιστον [τοῦ γινομένου ΜΡ . ΜΠ λαμβάνεται ὅταν ΜΡ = ΜΠ.

Παρατήρησις. Διὰ τὸ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως καὶ διὰ τὴν περιφέρειαν, τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον εἶναι τετράγωνον.

Πρόβλημα

351. Διὰ τῆς κορυφῆς Μ δοθέντος παραλληλογράμμου ΑΡΜΠ, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΒΜΓ τοιαύτη, ὥστε τὸ τρίγωνον ΒΑΓ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον.

Θεωρήσωμεν δύο τεμνούσας, μίαν τυχοῦσαν ΔΜΕ καὶ τὴν ἄλλην ΒΜΓ ἔχουσαν μέσον τὸ σημεῖον Μ. Λέγω ὅτι ἡ δευτέρα εὐθεῖα καθορίζει τὸ ζητούμενον τρίγωνον.



Σχ. 244

Φέρομεν πράγματι τὴν ΓΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΔ.

Ἐπειδὴ ΒΜ = ΜΓ, τὰ τρίγωνα ΜΒΔ καὶ ΜΓΖ εἶναι ἴσα καὶ

τριγ. ΑΒΓ = ΑΔΖΓ < τριγ. ΑΔΕ.

Ἄρα τριγ. ΑΒΓ < τριγ. ΑΔΕ.

351 α. Τὰ ἀνωτέρω διατυποῦνται καὶ ὡς ἑξῆς: Τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸ παραλληλόγραμμον τρίγωνον ΑΒΓ γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν τὸ μέσον τῆς βάσεώς του ΒΓ εἶναι κορυφὴ τοῦ παραλληλογράμμου.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ εἰς πᾶν πρόβλημα μεγίστου ἀντιστοιχεῖ ἓν πρόβλημα ἐλαχίστου καὶ ἀντιστρόφως, θὰ ἠδυνάμεθα ἐκ τῶν προτέρων νὰ συμπεράνωμεν ὅτι:

351 β. Θεώρημα. Τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ παραλληλόγραμμον ΑΡΜΠ γίνεται μέγιστον ὅταν ἡ κορυφή του Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς βάσεως ΒΓ.

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐδόθη ἤδη ὡς ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τῆς *ἀναγωγῆς τῶν τεταγμένων* (§ 201) καὶ συνάγεται ἐπίσης ἐξ ἑνὸς προβλήματος (203, δ, Παρ/σις), λυθέντος διὰ τῆς *ἀλγεβρικῆς μεθόδου*.

Ἐπειδὴ τὴν πρότασιν αὐτὴν θὰ χρησιμοποιήσωμεν πολὺ συχνά, θὰ ἀναφέρωμεν ἀκόμη μερικὰς παρατηρήσεις ἐπ' αὐτῆς.

Πρόβλημα

352. Εἰς τυχὸν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον.

Δύο τῶν κορυφῶν τοῦ ὀρθογωνίου ὀφείλουν νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου καὶ αἱ ἄλλαι δύο ἐπὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν του.

1) Σχῆμα (α). Διὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΓ, τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ δύνανται νὰ εἶναι ἄνισοι, τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον ὁρίζεται διὰ τοῦ μέσου Μ τῆς ὑποτεινούσης. Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι

$$(\text{ΑΡΜΠ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΓ}).$$

2) Σχῆμα (β). Κατὰ τὸ θεώρημα τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὴν ἀναγωγὴν τῶν τεταγμένων (§ 201), τὸ μέγιστον παραλληλόγραμμον ΑΛΜΠ ὁρίζεται διὰ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΓ. Δυνάμεθα ἄλλωστε καὶ ἀπ' εὐθείας νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὅτι

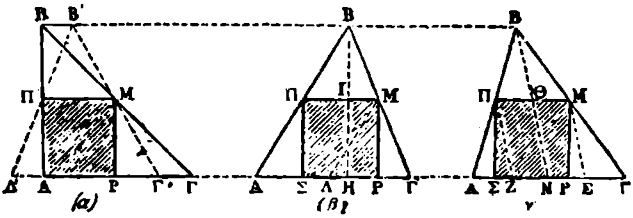
$$(\text{ΑΛΜΠ}) = \frac{1}{\ }(\text{ΑΒΓ}),$$

ὡς συνάγεται καὶ ἐκ τῆς προτάσεως τῆς § 201. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΡΜΠΣ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον αὐτό, ἕπεται ὅτι, *διὰ τὸ τυχὸν τρίγωνον*, τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον ἔχει ὡς δύο κορυφὰς τὰ μέσα δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς τοῦ τριγώνου.

Φέροντες τὸ ὕψος ΒΗ, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, σύμφωνα μὲ τὴν πρώτην περίπτωσιν, τὸ ὀρθογώνιον ΗΣΠΙ εἶναι τὸ μέγιστον διὰ τὸ τρίγωνον ΑΗΒ καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. Ἀναλόγως, τὸ ΗΡΜΙ εἶναι τὸ μέγιστον διὰ τὸ τρίγωνον ΗΓΒ καὶ ἴσον πρὸς ἥμισυ πάλιν αὐτοῦ· ἐπομένως, τὸ ὀρθογώνιον ΡΜΠΣ εἶναι τὸ μέγιστον διὰ τὸ ΑΒΓ καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.

3) Σχῆμα (γ). Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα καταλήγομεν καὶ δι' ἄλλης μεθόδου, πολὺ χρησίμου διὰ τὰ σχήματα τὰ ἐγγεγραμμένα



Σχ. 245.

εἰς καμπύλας μὲ εὐθυγράμμους διαμέτρους. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΒΝ (Σχ. (γ)) καὶ τὰς παραλλήλους ΜΕ καὶ ΠΖ. Ἕκαστον τῶν παραλληλογράμμων ΝΕΜΘ, ΖΝΘΠ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μεταξύ των, εἶναι τὸ μέγιστον διὰ τὸ ἀντίστοιχον τρίγωνον· καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΡΜΠΣ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΖΕΜΠ, ἕπεται ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι τὸ μέγιστον.

Παρατηρήσεις. 1) Θεωροῦντες διαδοχικῶς ὡς βάσει τῶν ὀρθογωνίων τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, λαμβάνομεν τρία μέγιστα ὀρθογώνια ἐγγεγραμμένα εἰς αὐτό. Ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα· ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.

2) Τὰ τρίγωνα τὰ περιγεγραμμένα εἰς τὸ ὀρθογώνιον (Σχ. α) καὶ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, ἔχουν ἐπίσης καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν, ἴσην πρὸς 2ΜΠ. Ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των καὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἐλάχιστον περιγεγραμμένον τρίγωνον (§ 351).

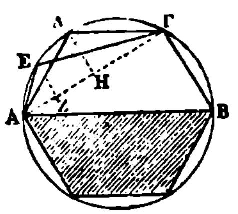
§ III. Μεταβλητὴ θεωρουμένη ὡς σταθερὰ

353. Κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου ἑνὸς μεταβλητοῦ μεγέθους εἶναι δυνατόν, ὅπως τοῦτο ἐμφανίζεται ὡς συνάρτησις περισσοτέρων τῆς μιᾶς ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν πρὸς στιγμὴν τὸ μέγεθος ὡς συνάρτησιν μιᾶς μόνον ἐκ τῶν μεταβλητῶν τούτων καὶ τὰς ἄλλας ὡς ἐχούσας σταθερὰς τιμὰς [ὡς παραμέτρους]. Ζητοῦμεν ἀκολούθως τὰ σχετικὰ πρὸς τὴν μεταβλητὴν ταύτην, μόνον, ἀκρότατα τοῦ μεγέθους καὶ προσπαθοῦμεν κατόπιν νὰ συναγάγωμεν συμπεράσματα ἐπὶ τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου αὐτοῦ θεωρουμένου πλέον ὡς συναρτήσεως τοῦ συνόλου τῶν μεταβλητῶν·

Πρόβλημα

354. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμικύκλιον τετράπλευρον, ἔχον ὡς μίαν πλευρὰν τὴν διάμετρον τοῦ ἡμικυκλίου καὶ ἐπιφάνειαν μεγίστην.

Ἔστω ΑΕΓΒ τυχὸν ἐκ τῶν τετραπλεύρων τούτων. Ἂν ὑποθέσωμεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΒΓ ὡς σταθεράν, αἱ μεταβολαὶ τῆς ἐπιφανείας του θὰ ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν θέσεων μόνον τῆς κορυφῆς Ε ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΕΔΓ.



Σχ. 248.

Τὸ μέγιστον ὅμως τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΕΓ λαμβάνεται διὰ θέσιν τοῦ Ε συμπίπτουσαν πρὸς τὸ μέσον Δ τοῦ τόξου ΑΓ, ἐπειδὴ τότε τὸ ὕψος ΕΖ γίνεται ἴσον πρὸς τὸ βέλος ΔΗ τοῦ τόξου τούτου καὶ

$$ΕΖ < ΔΗ.$$

Τὸ σχετικόν, ἑπομένως, *μέγιστον ἀπαιτεῖ ὅπως δύο τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου*, αἱ ΑΔ καὶ ΔΓ, *εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.*

Διὰ τὸν ἴδιον λόγον, θὰ πρέπει ὅπως ἡ κορυφὴ Γ εἶναι τὸ μέσον τοῦ $\overset{\frown}{ΔΓΒ}$· *τὸ μέγιστον κατὰ συνέπειαν τετράπλευρον θὰ πρέπει νὰ ἔχῃ τὰς τρεῖς μεταβλητὰς πλευράς του ἴσας.*

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ μεγιστον τετράπλευρον ΑΔΓΒ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου.

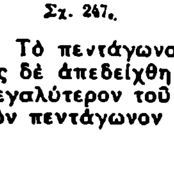
2) Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ σταθερὰ χορδὴ ΑΒ, τὸ μέγιστον τετράπλευρον ἔχει τὰς τρεῖς μεταβλητὰς πλευρὰς ἴσας.

3) Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι, ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς περιφέρειαν τριγώνων, τὸ ἰσόπλευρον εἶναι τὸ μέγιστον.

Θεώρημα

355. Ἐκ τῶν πολυγώνων, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν καὶ τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν, τὸ κανονικὸν εἶναι τὸ μεγίστης ἐπιφανείας.

Ἐπειδή, ἂν δύο διαδοχικαὶ τῶν πλευρῶν του, αἱ ΑΒ καὶ ΒΓ, δὲν ἦσαν ἴσαι, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυγώνου, λαμβάνοντες διὰ κορυφὴν Β αὐτοῦ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΓ. Εἶναι, ἑπομένως, ἴσαι δύο τυχοῦσαι διαδοχικαὶ πλευραὶ τοῦ μεγίστου πολυγώνου καὶ τοῦτο κανονικόν.



Σχ. 247.

Θεώρημα

356. Ἐκ δύο κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, τὸ ἔχον μεγαλύτερον πλῆθος πλευρῶν εἶναι τὸ μεγαλυτέρας ἐπιφανείας.

Ἔστω, πράγματι, τετράγωνον ΑΒΓΔ. Τὸ πεντάγωνον ΑΕΒΓΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου, ὡς δὲ ἀπεδείχθη προηγουμένως, τὸ κανονικὸν πεντάγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πενταγώνου τούτου. Εἶναι ἑπομένως τὸ κανονικὸν πεντάγωνον μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου κλπ.

Πρόβλημα

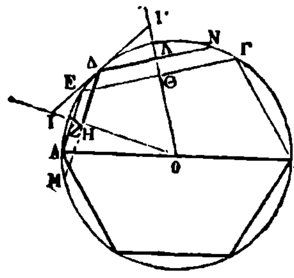
357. **Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμιπεριφέρειαν τετράπλευρον, ἔχον ὡς μίαν πλευρὰν τὴν διάμετρον τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ περίμετρον μεγίστην.**

Θεωροῦντες, ὡς καὶ προηγουμένως, τὴν πλευρὰν ΒΓ ὡς σταθεράν, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ μεταβολαὶ τῆς περιμέτρου τοῦ σχήματος ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ΑΕ + ΕΓ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ ἢ τοῦ ἡμίσεος αὐτοῦ ΕΖ + ΕΘ.

Ἂς φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΙΔΙ' εἰς τὸ μέσον Δ τοῦ τόξου ΑΝ. Γνωρίζομεν ὅτι, δι' ἕκαστον σημεῖον τῆς βάσεως ΙΙ' τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΙΟΙ', τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ εἶναι σταθερόν. Ἄρα

$$ΔΗ + ΔΛ > ΕΖ + ΕΘ,$$

ἀφοῦ τὸ σημεῖον Ε εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου ΙΟΙ' (§§ 339,340).



Σχ. 248.

Ἑπομένως $\quad ΔΜ + ΔΝ > ΑΕ + ΕΓ.$

Ἀλλὰ τὰ τόξα ΑΕΓ, ΜΔΝ εἶναι ἴσα· διὰ δύο τόξα, λοιπόν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν, τὸ ἄθροισμα τῶν χορδῶν των γίνεται μέγιστον ὅταν ταῦτα καταστοῦν ἴσα.

Καὶ κατὰ συνέπειαν, *τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ἔχει μεγίστην τὴν περίμετρον ὅταν αἱ τρεῖς μεταβληταὶ πλευραί του εἶναι ἴσαι,* δηλ. ὅταν τοῦτο εἶναι πάλιν τὸ ἥμισυ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου (§ 354).

Παρατήρησις. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι, ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς περιφέρειαν κανονικῶν πολυγώνων, τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν, τὸ μεγίστης περιμέτρου εἶναι τὸ κανονικόν.

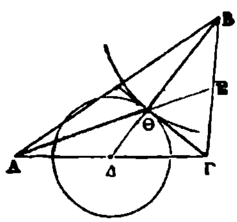
Πρόβλημα

358. **Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τριγώνου τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα Σ, τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου, νὰ εἶναι ἐλάχιστον.**

Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων ΘΑ καὶ ΘΓ εἶναι σταθερόν.

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων Θ εἶναι περιφέρεια, ἔχουσα ὡς κέντρον τὸ μέσον Δ τῆς πλευρᾶς ΑΓ· ἐπειδὴ ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέσου ἔχομεν

$$ΑΘ^2 + ΓΘ^2 = 2 . ΑΔ^2 + 2 . ΔΘ^2.$$



Σχ. 249.

Αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἀθροίσματος Σ ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σημείου Θ ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μικροτέρα ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Β ἀπὸ τῆς περιφερείας ἀντιστοιχεῖ εἰς θέσιν τοῦ σημείου Θ ἐπὶ τῆς διακέντρου ΒΔ, ἕπεται ὅτι, διὰ τὸ

ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος Σ, τὸ σημεῖον Θ θὰ πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διαμέσου ΒΔ.

Ὅμοιοι συλλογισμοὶ μᾶς πείθουν ὅτι τὸ σημεῖον Θ διὰ τὸ ἐλάχιστον Σ θὰ πρέπει νὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς διαμέσου ΑΕ. Ἤτοι, *τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου δίδει τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα Σ.*

Παρατήρησις. Δι' ἑνὸς εὐκόλου ὑπολογισμοῦ λαμβάνομεν:

$$ΘΑ^2 + ΘΒ^2 + ΘΓ^2 = \frac{ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΑ^2}{3}.$$

§ IV. *Χρῆσις τῆς ἐφαπτομένης*

359. Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ καὶ τυχούσης καμπύλης (σχ. 250), δυνάμεθα νὰ ζητήσωμεν τὸ *μέγιστον* ἢ *ἐλάχιστον* παραλληλόγραμμον, ἐκ τῶν σχηματιζομένων δι' ἀγωγῆς ἐκ τῶν διαφόρων σημείων τῆς καμπύλης εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὰς ΟΧ, ΟΥ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον ἐκ τῶν τριγώνων ΜΟΝ, τῶν ὁριζομένων ὑπὸ ἐφαπτομένης ΜΝ τῆς καμπύλης.

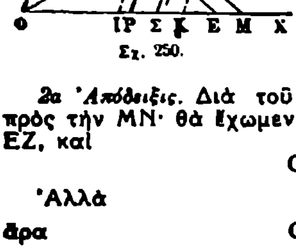
Εἰς πάσας τὰς δυνατὰς περιπτώσεις, τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον παρέχεται δι' ἐφαπτομένης ΜΓΝ, διαιρουμένης εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Γ.

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω ὑποδεικνυομένη λύσις εἶναι γενική· θὰ πρέπει ἐν τούτοις νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς ἀγωγῆς τῆς ἐν λόγῳ ἐφαπτομένης δὲν εἶναι πάντοτε ἐπιλύσιμον διὰ τοῦ γνώμονος καὶ διαβήτου (§ 317, β).

Πρόβλημα

360. **Δίδονται καμπύλη καὶ δύο εὐθεῖαι· ποῖον τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον παραλληλόγραμμον;**

Φέρομεν ἐφαπτομένην ΜΓΝ, ὥστε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Γ νὰ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΜΝ· τὸ παραλληλόγραμμον ΟΡΓΠ εἶναι τὸ μέγιστον. Πράγματι:



Σχ. 250.

1η Ἀπόδειξις. Διὰ πᾶν ἄλλο σημεῖον Θ, ἔχομεν

$$ΟΣΘΛ < ΟΚΗΛ·$$

ἀλλὰ εἶναι

$$ΟΚΗΛ < ΟΡΓΠ, \quad (§ 351)$$

ἄρα

$$ΟΣΘΛ < ΟΡΓΠ.$$

2α Ἀπόδειξις. Διὰ τοῦ σημείου Θ φέρομεν παράλληλον ΕΖ πρὸς τὴν ΜΝ· θὰ ἔχωμεν ΔΕ = ΔΖ, ἀφοῦ τὸ Δ εἶναι μέσον τῆς ΕΖ, καὶ

$$ΟΣΘΛ < ΟΙΔΙ'. \qquad (§ 351)$$

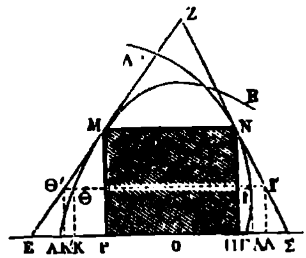
Ἀλλὰ $ΟΙΔΙ' < ΟΡΓΠ·$

ἄρα $ΟΣΘΛ < ΟΡΓΠ.$

Παρατήρησις. Αἱ ἀνωτέρω ἀποδείξεις ἰσχύουν ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι, ἡ καμπύλη εἰς τὴν γειτονιὰν τοῦ σημείου Γ περιέχεται μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῶν ἀξόνων ΟΧ, ΟΥ.

Θεώρημα

361. Ἐὰν δύο καμπύλαι ΑΒ, ΓΔ στρέφουν τὰ κοῖλα των πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΓ, τοῦ συνδέοντος δύο σημεῖα τῶν καμπύλων, τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον ΡΜΝΠ εἶναι τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ ἐφαπτομένων ΕΜΖ, ΖΝΣ, διαιρουμένων εἰς δύο μέρη ἴσα διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς Μ καὶ Ν.



Σχ. 251.

Τὸ ὀρθογώνιον πράγματι ΡΜΝΠ εἶναι τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸ τρίγωνον ΕΖΣ· διὰ πᾶν ἄλλο, ἑπομένως, ἐγγεγραμμένον εἰς τὰς καμπύλας ὀρθογώνιον, θὰ συμβαίνῃ

$$ΙΘΚΛ < Ι'Θ'Κ'Λ' < ΝΜΡΠ.$$

Πρόβλημα τοῦ Νεύτωνος

362. Εἰς δοθὲν τμῆμα δοθείσης καμπύλης νὰ ἐγγραφῇ τὸ μεγίστου ἐμβαδοῦ ὀρθογώνιον.

Θὰ πρέπει νὰ περιγράψωμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν καμπύλην γωνίαν ΕΖΣ οὕτως, ὥστε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, Μ, Ν νὰ εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν ΕΖ, ΖΣ.

Παρατηρήσεις. 1) Δυνάμεθα νὰ ἀχθῶμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου καὶ διὰ μεθόδων ἀρκετὰ στοιχειωδῶν τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ.

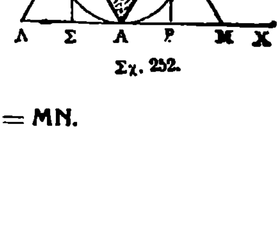
(Βλ. P. Serret, *Des Méthodes en Géométrie*, σ. 105).

2) Ἰδοὺ μερικαὶ ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῆς χρήσεως τῆς ἐφαπτομένης:

Πρόβλημα

363. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

Γνωρίζομεν ἤδη (§ 354, παρ/σις 3)), ὅτι τὸ μέγιστον τρίγωνον εἶναι τὸ ἰσόπλευρον. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα φθάνομεν καὶ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς ἐφαπτομένης.



Σχ. 252.

Ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ σχήματος, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης ΑΧ καὶ τῆς καθέτου ΑΥ.

Ἡ ἐφαπτομένη ΜΓΝ, τοιαύτη ὥστε ΜΓ = ΓΝ, ἀπαντᾷ εἰς τὸ πρόβλημα. Ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΑΡΓΠ εἶναι μέγιστον (§ 360), αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι ΜΑ, ΜΓ ἴσαι, ὡς ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὴν περιφέρειαν. Ἄρα ΛΜ = ΜΝ.

Πρὸς τούτοις, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ γίνεται μέγιστον συγχρόνως, προφανῶς, μετὰ τοῦ διπλασίου του οθογωνίου ΡΓΒΣ· ἡ δὲ διάμεσος ΑΓ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΑΝ εἶναι ἴση πρὸς

$$ΓΜ = ΑΜ = ΒΓ.$$

Ἑπομένως, ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων τριγώνων εἰς τὴν περιφέρειαν, τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ μέγιστον.

Παρατήρησις. Ἡ ἐφαπτομένη ΜΓΝ, ἡ διαιρουμένη εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Γ, ὁρίζει ἐπίσης καὶ τὸ ἐλάχιστον περιγεγραμμένον τρίγωνον, ὡς θὰ ἀποδείξωμεν μετ' ὀλίγον (§ 367).

Πρόβλημα

364. Εἰς κυκλικὸν τομέα ΑΟΒ, ἢ τμῆμα ΕΘΖ, νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἀρκεῖ νὰ ἐπιληφθῶμεν τοῦ ἡμίσεος τοῦ σχήματος.

1) Διὰ τὸν τομέα, φέρομεν τὴν ΜΓΝ, ἐφαπτομένην τοῦ τόξου ΑΔ εἰς τὸ μέσον του Γ καὶ διαιρουμένην ὑπ' αὐτοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη.



Σχ. 253.

Τὸ ὀρθογώνιον ΠΡΓΠ' εἶναι μέγιστον διὰ τὸ τρίγωνον ΠΜΝ.

Τὸ ΠΡΗΛ εἶναι μέγιστον διὰ τὸ ΠΜΟ τρίγωνον.

Ἑπομένως, τὸ ΛΗΓΠ' εἶναι μέγιστον διὰ τὸ τρίγωνον ΟΜΝ· ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ εἶναι τὸ μόνον σημεῖον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου τούτου τὸ ἀνῆκον καὶ εἰς τὸ τόξον ΑΔ, εἶναι φανερὸν ὅτι, *κατὰ μείζονα λόγον* πᾶν ἄλλο ὀρθογώνιον, μὲ δύο κορυφὰς ἐπὶ τοῦ τόξου καὶ τῆς ΟΑ, θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ΛΗΓΠ'.

2) Διὰ τὸ κ. τμῆμα, θὰ πρέπει νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην ΙΗΖ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Η νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΙΖ. Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους ΟΖ τοῦ ὁρίζοντος τὴν ἐφαπτομένην (§ 312).

Ἔστω ΟΑ = ρ καὶ ΟΣ = α. Θὰ ἔχωμεν:

$$ΗΚ = \frac{-3α + \sqrt{α^2 + 8ρ^2}}{4}, \qquad \text{(§ 312, τύπος 1)}$$

$$ΤΗ^2 = \frac{-α^2 + 4ρ^2 - α\sqrt{α^2 + 8ρ^2}}{8}, \qquad \text{(τύπος 2)}$$

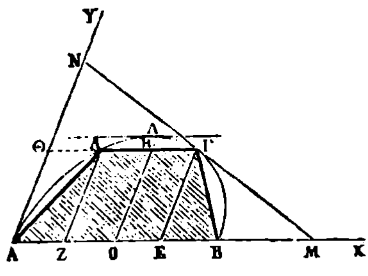
$$Ε = 2ΤΗ \, . \, ΗΚ = \frac{-3α + \sqrt{α^2 + 8ρ^2}}{2} \, . \, \sqrt{\frac{-α^2 + 4ρ^2 - α\sqrt{α^2 + 8ρ^2}}{8}}.$$

Πρόβλημα

365. Εἰς δοθὲν τμῆμα νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον τραπέζιον.

Τὸ τραπέζιον θὰ ἔχῃ ὡς βάσεις τὴν χορδὴν τῆς καμπύλης — βάσιν τοῦ τμήματος καὶ χορδὴν αὐτοῦ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του.

Ἡ πολὺ ἁπλῆ λύσις τὴν ὁποίαν θὰ δώσωμεν, εὐκόλως ἐφαρμόζεται καὶ εἰς πάσας τὰς καμπύλας, αἵτινες ἔχουν εὐθύγραμμον διάμετρον ὡς γεωμ. τόπον τῶν μέσων χορδῶν αὐτῶν παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν τοῦ τμήματος.



Σχ. 254.

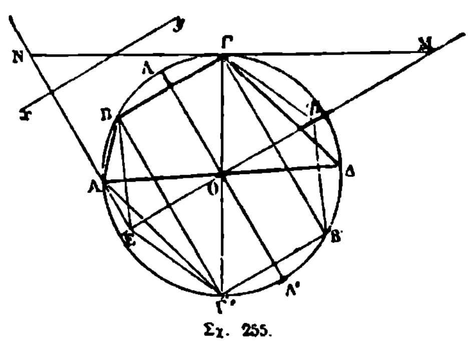
Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον, ΟΛ ἡ διάμετρος, ἡ διαιροῦσα εἰς δύο μέρη ἴσα τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ χορδὰς καὶ ΑΘΝ παράλληλος πρὸς τὴν ΟΛ. Θὰ ἔχωμεν ΑΟ = ΟΒ, ΔΗ = ΗΓ καὶ ἑπομένως ΑΖ = ΕΒ.

Τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΘΔ, ΓΒΕ, εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, τὸ δὲ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΕΓΘ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τελευταῖον τοῦτο γίνεται μέγιστον, ὡς εἴδομεν, διὰ κορυφὴν Γ συμπίπτουσαν πρὸς τὸ μέσον τοῦ ἐφαπτομένου τμήματος ΜΓΝ, συνάγομεν ὅτι καὶ τὸ τραπέζιον γίνεται μέγιστον διὰ τὴν ἰδίαν θέσιν τῆς κορυφῆς του Γ.

Σημείωσις. Διὰ τὴν ἀναλυτικὴν λύσιν τοῦ ζητήματος, ὅταν τὸ δοθὲν τμῆμα εἶναι παραβολικόν, βλ. *Nouvelles Ann. des Mathématiques*, 1879, p. 379· λύσις ὑπὸ Lez καὶ Moret - Blanc.

Πρόβλημα

366. Δίδεται καμπύλη ἔχουσα κέντρον καὶ διαμέτρους εὐθυγράμμους. Νὰ ἀχθῇ χορδὴ αὐτῆς ΒΓ, παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν *xy*, εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ἔχον ἀπέναντι πλευρὰς τὴν χορδὴν ΒΓ καὶ δοθεῖσαν διάμετρον ΔΑ, νὰ ἔχῃ τὸ μέγιστον ἐμβαδόν.



Σχ. 255.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον. Διὰ τοῦ κέντρου Ο φέρομεν τὴν διάμετρον ΟΜ, παράλληλον πρὸς τὴν *xy*, καὶ προβάλλομεν ἐπ' αὐτῆς τὰς κορυφὰς Α καὶ Δ, παραλλήλως πρὸς τὴν συζυγὴ τῆς

ΕΖ, διάμετρον ΛΟΛ', κατὰ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Θὰ ἔχωμεν ΟΕ = ΟΖ.

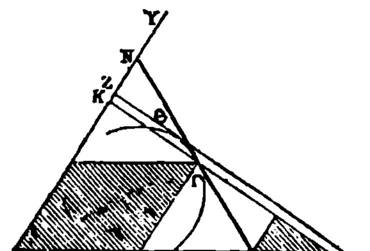
Ἀκολούθως, φέρομεν τὰς διαμέτρους ΒΟΒ', ΓΟΓ'· αἱ χορδαὶ ΒΓ', ΓΒ' εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς προβαλλούσας ΑΕ, ΔΖ, τὸ δὲ σχῆμα ΑΒΓΔΒ'Γ'Α ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΒΓΖΒ'Γ'Ε· ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα, ὡς τὰ ΓΖΒ' καὶ ΓΔΒ, εἶναι ἰσοδύναμα.

Γίνεται λοιπὸν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ μέγιστον ὅταν γίνῃ μέγιστον τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ τραπέζιον ΕΒΓΖ. Καὶ ἐπειδή, κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, τὸ μέγιστον τοῦ τραπεζίου τούτου λαμβάνεται δι' ἀγωγῆς ἐφαπτομένης ΝΓΜ τοιαύτης, ὥστε ΜΓ = ΓΝ, ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Γ μιᾶς τοιαύτης ἐφαπτομένης εἶναι μία τῶν κορυφῶν τοῦ ζητουμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Σημείωσις. Διὰ τὴν ἀναλυτικὴν λύσιν, βλ. Ν. Α., 1879, σ. 425. Αἱ ἀναλυτικαὶ λύσεις, αἱ ὀφειλόμεναι εἰς τοὺς Lez καὶ Moret-Blanc, εἶναι ἀπὸ πολλῶν ἀπόψεων ἐνδιαφέρουσαι. Ἀλλ' εἶναι ἔκδηλος ἡ *ἁπλότης καὶ κομψότης* τῆς γεωμετρικῆς λύσεως τὴν ὁποίαν ἐδώσαμεν ἀνωτέρω.

Πρόβλημα

367. Δίδονται δύο ἄξονες ΔΧ, ΔΥ καὶ καμπύλη τῆς ὁποίας ἡ κοιλότης στρέφεται πρὸς τὸ μέρος ὅπου εὑρίσκεται ἡ ἀρχὴ Δ τῶν ἀξόνων. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη ΜΝ, ὁρίζουσα μετὰ τῶν ἀξόνων τὸ ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ τρίγωνον.



Σχ. 250.

Φέρομεν ἐφαπτομένην ΜΓΝ τοιαύτην, ὥστε ΜΓ=ΓΝ· λέγω ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΜΔΝ.

Πράγματι, ἡ καμπύλη περιέχεται ([32]) μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς ἀρχῆς Δ, πᾶσα δὲ ἄλλη εὐθεῖα ΙΓΚ διὰ τοῦ Γ θὰ εἶναι τέμνουσα τῆς καμπύλης καὶ μικροτέρα τῆς παραλλήλου πρὸς αὐτὴν ἐφαπτομένης ΕΘΖ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΜΔΝ εἶναι μικρότερον τοῦ ΙΔΚ (§ 351) καί, κατὰ μείζονα λόγον, τοῦ ΔΕΖ, ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΜΔΝ εἶναι τὸ ἐλάχιστον.

Πρόβλημα

368. Δίδονται δύο ἄξονες ΟΧ, ΟΥ καὶ καμπύλη ἐφαπτομένη αὐτῶν. Νὰ μελετηθοῦν κατὰ γενικὸν τρόπον τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραλληλογράμμων τοῦ σχήματος (μὲ μίαν κορυφὴν ἐπὶ τῆς καμπύλης), ὡς καὶ τῶν τριγώνων τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ μιᾶς ἐφαπτομένης καὶ τῶν ἀξόνων.

1) *Ὑπερβολὴ ἀναφερομένη εἰς τὰς ἀσυμπτώτους της.*

Γνωρίζομεν ὅτι πᾶσα ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ταύτης διαιρεῖται

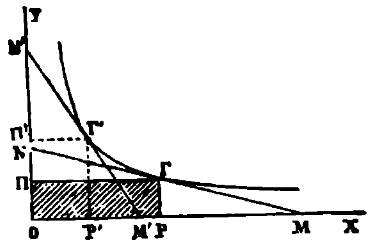
---

32. Σημ. μετ. Κατὰ τὴν παρατήρησιν τῆς § 360.

εἰς δύο μέρη ἴσα ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς (§175), ὡς καὶ ὅτι τὰ τρίγωνα ΜΟΝ, Μ'ΟΝ' κλπ. εἶναι ἰσοδύναμα (§ 78)· ἐπειδὴ δὲ ἡ καμπύλη αὕτη ἐφάπτεται τῶν ἀσυμπτώτων κατὰ σημεῖα εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, ἕπεται ὅτι διὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐν τῇ ἐκφωνήσει σχημάτων δὲν θὰ ὑπάρχουν οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον. Πράγματι,

(ΜΟΝ) = (Μ'ΟΝ'),

(ΟΡΓΠ) = (ΟΡ'Γ'Π') (³³)



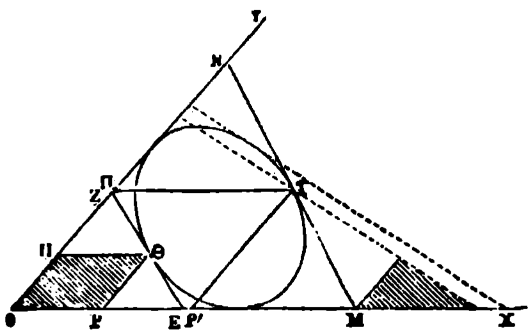
Σχ. 257.

Διὰ πᾶσαν ἄλλην καμπύλην, θὰ ὑπάρχῃ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον, ἀναλόγως τῆς διευθύνσεως τῶν κοίλων τοῦ θεωρουμένου τμήματος αὐτῆς.

369. **2) Τυχοῦσα καμπύλη (κ), ἐφαπτομένη τῶν ἀξόνων ἢ τέμνουσα αὐτούς.**

1) Ἡ ἐφαπτομένη ΜΓΝ (Σχ. 258), ἡ τοιαύτη ὥστε ΜΓ = ΓΝ, δίδει τὸ *μέγιστον παραλληλόγραμμον* ΟΡ'ΓΠ' καὶ τὸ *ἐλάχιστον τρίγωνον* ΜΟΝ (§§ 360 καὶ 367), ὅταν ἡ καμπύλη, εἰς τὴν γειτονιὰν τοῦ σημείου Γ, στρέφῃ τὰ κοῖλα της πρὸς τοὺς ἄξονας.

2) Ἡ ἐφαπτομένη ΕΘΖ, ἡ ἀγομένη ἐπὶ τὸ τμῆμα τῆς καμπύλης



Σχ. 258.

τὸ στρέφον τὰ κυρτὰ αὐτοῦ πρὸς τοὺς ἄξονας καὶ τοιαύτη ὥστε ΕΘ = ΘΖ, δίδει τὸ *μέγιστον τρίγωνον* ΟΕΖ.

Θεωρήσωμεν πράγματι τὴν ὑπερβολήν, τὴν ἐφαπτομένην τῆς ΖΕ εἰς τὸ σημεῖον Θ (Σχ. 259) καὶ τῆς ὁποίας ΟΧ, ΟΥ εἶναι αἱ ἀσύμπτωτοι. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς αὐτῆς μετὰ τῶν ἀσυμπτώτων εὑρίσκονται εἰς ἄπειρον, ἡ καμπύλη αὕτη θὰ εὑρίσκεται ὁλό-

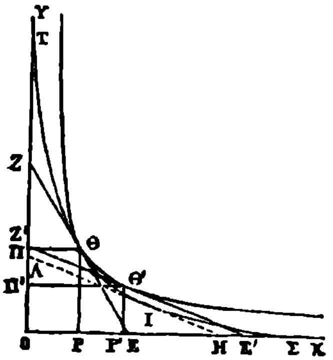
33. Σημ. μετ. (ΟΡΓΠ) = ½ (ΜΟΝ) = ½ (Μ'ΟΝ') = (ΟΡ'Γ'Π').

κληρος πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ κυρτοῦ πρὸς τοὺς ἄξονας τμήματος ΣΙΘΤ.

Ἀλλ' ὡς εἴδομεν διὰ τὴν ὑπερβολήν, τὸ τρίγωνον ΟΕ'Ζ', τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς τυχούσης ἐφαπτομένης αὐτῆς, εἶναι ἰσοδύναμον πάντοτε πρὸς τὸ τρίγωνον ΟΕΖ. Ἂν λοιπὸν ΗΙΛ εἶναι τυχοῦσα ἄλλη ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης (κ), εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ἔχωμεν

$$ΟΗΛ < ΟΕΖ,$$

δηλ. ὅτι τὸ τρίγωνον ΟΕΖ εἶναι τὸ μέγιστον.



Σχ. 259.

Ἀλλὰ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΟΡΘΠ εἶναι ἐπίσης τὸ *μέγιστον* ἐπειδὴ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΟΡ'Θ'Π' (§ 78), τὸ τελευταῖον δὲ τοῦτο εἶναι μεγαλύτερον ἐκείνου τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ εἶναι τὸ μέσον τῇ ΗΛ. Κατὰ μείζονα ἐπομένως λόγον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ παραλληλογράμμου μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Ι.

370. Παρατήρησις. Αἱ προηγούμεναι ἀσκήσεις (§§ 367, 368, 369), λύουν κατὰ πολὺ ἁπλοῦν τρόπον τὰ προβλήματα ἐπὶ τῶν διαφόρων περιπτώσεων ἐγγραφῆς εἰς μίαν καμπύλην ὀρθογωνίου, παραλληλογράμμου ἢ τριγώνου, ὡς καὶ τὸ πρόβλημα τοῦ ἐλαχίστου περιγεγραμμένου τριγώνου.

Ἡ μόνη δυσκολία ἔγκειται *εἰς τὴν δυνατότητα τῆς ἀγωγῆς ἐφαπτομένης διαιρουμένης εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς.*

Δι' ἀρκετὰ μέγα ἀριθμὸν περιπτώσεων γνωρίζομεν ἤδη τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ (§ 310 ἕως 319)· δι' ἐκείνας δὲ διὰ τὰς ὁποίας ἡ χρῆσις τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου δὲν ἀρκεῖ διὰ τὴν γεωμετρικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος *ἡ ἀλγεβρική, ὡς καὶ ἡ τριγωνομετρικὴ μέθοδος παύει νὰ εἶναι στοιχειώδης.*

Ἓν ἄλλο πλεονέκτημα τῆς γεωμετρικῆς μεθόδου εἶναι νὰ καθιστᾷ ἔκδηλον τὴν ἀναλογίαν πρὸς ἄλληλα ἑνὸς μεγάλου πλήθους ζητημάτων, τὰ ὁποῖα ἄλλως θὰ ἀπήτουν ἐξισώσεις καὶ ἀνάλυσιν διαφόρους.

Τέλος, μὲ ἐλαφρὰς τροποποιήσεις, *ἡ μέθοδος τῆς ἐφαπτομένης ἐφαρμόζεται καὶ εἰς ζητήματα ἀναφερόμενα εἰς ὄγκους.*

§ V. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα ὄγκων

371. Διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων ἀναφερομένων εἰς μέγιστα καὶ ἐλάχιστα ὄγκων, καταφεύγομεν εἰς τὰς γνωστὰς ἀλγεβρικὰς *ἀρχὰς* καὶ διὰ τῶν ὁποίων δυνάμεθα πολλάκις νὰ ὁδηγηθῶμεν εἰς πολὺ ἁπλᾶς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ χρησιμοποιῶμεν κατασκευὰς ἀναλόγους τῶν τῆς Ἐπιπεδομετρίας.

Πρόβλημα

372. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μεγίστου ὄγκου ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἐκ τῶν ἐχόντων ἄθροισμα τριῶν ἀκμῶν δοθὲν μῆκος λ.

Ἔστωσαν x, y, z αἱ τρεῖς ἀκμαὶ τοῦ τυχόντος ἐξ αὐτῶν. Ὑποθέτοντες τὴν ἀκμὴν z σταθεράν, θὰ ἔχωμεν ὡς ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων τὸ σταθερὸν μῆκος

$$x + y = \lambda - z.$$

Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον (x, y) γίνεται μέγιστον ὅταν $x = y$. Θὰ πρέπει λοιπὸν τὸ μέγιστον παραλληλεπίπεδον νὰ ἔχῃ βάσιν τετράγωνον· καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα φθάνομεν οἱανδήποτε ἕδραν ἂν λάβωμεν ὡς βάσιν, ἕπεται ὅτι *τὸ ζητούμενον μέγιστον παραλληλεπίπεδον εἶναι ὁ κύβος.*

Παρατήρησις. Τὸ ἀνωτέρω ζήτημα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τῆς ἑπομένης ἀρχῆς:

373. Πρώτη ἀρχή. Τὸ γινόμενον τριῶν θετικῶν παραγόντων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν, γίνεται μέγιστον ὅταν οἱ τρεῖς παράγοντες καταστοῦν ἴσοι μεταξύ των, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξῃ [84].

Ἐκ τῆς ἀρχῆς ταύτης ἕπεται ἡ ἑπομένη, ἀντίστροφος αὐτῆς:

374. Δευτέρα ἀρχή. Διὰ δοθεῖσαν τιμὴν a^3 τοῦ γινομένου τριῶν θετικῶν παραγόντων, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν γίνεται ἐλάχιστον ὅταν οὗτοι καταστοῦν ἴσοι μεταξύ των, $x = y = z = a$.

Πρόβλημα

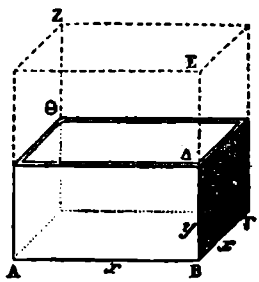
375. Ἐκ πάντων τῶν ὀρθῶν παραλληλεπιπέδων, τῶν ἐχόντων ὡς βάσιν τετράγωνον καὶ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ ὕψους σταθερόν, ποῖον τὸ μέγιστον κατ' ὄγκον;

Ἔστω x^2 τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, y τὸ ὕψος καὶ $x + y = \lambda$ τὸ σταθερὸν ἄθροισμα.

Ὁ ὄγκος ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου x^2y.

Ἂν προεκτείνωμεν τὸ ὕψος $y = ΒΔ$ κατὰ ἴσον μῆκος ΔΕ, λαμβάνομεν στερεὸν ΒΖ διπλάσιον τοῦ ἀρχικοῦ ΒΘ.

Εἰς τὸ μέγιστον τοῦ στερεοῦ ΑΓΕΖ ἀντιστοιχεῖ καὶ τὸ μέγιστον τοῦ ΑΓΔΘ· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκμῶν τοῦ πρώτου στερεοῦ εἶναι σταθερόν,



Σχ. 260.

$$ΑΒ + ΒΓ + ΒΕ = 2(x + y) = 2\lambda,$$

ἕπεται ὅτι τὸ στερεὸν ΒΖ γίνεται μέγιστον, ὅταν αἱ τρεῖς ἀκμαί του καταστοῦν ἴσαι· κατὰ συνέπειαν τὸ στερεὸν ΒΘ γίνεται μέ-

---

84. Σημ. μετ. Νικ. Μ. Σ. Α., § 225.

γιστον *όταν ή πλευρά τής βάσεώς του είναι διπλασία τοῦ ὕψους.* Ὁ ὄγκος τοῦ μεγίστου τούτου στερεοῦ εἶναι

$$v = \frac{4\lambda^3}{27}.$$

Ἐκ τῆς ἀσκήσεως ταύτης ποριζόμεθα τὴν ἀκόλουθον ἀρχήν :

376. Τρίτη ἀρχή. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο θετικῶν ἀριθμῶν x, y εἶναι σταθερὸν λ, τὸ γινόμενον x^2y γίνεται μέγιστον διὰ τιμὰς τῶν x καὶ y ἴσας πρὸς τὰ μήκη τῶν τμημάτων, τὰ ἀνάλογα τῶν ἐκθετῶν 2 καὶ 1 ἀντιστοίχως, εἰς ἃ διαιρεῖται τὸ μῆκος λ.

377. Τετάρτη ἀρχή. Ἀντιστρόφως, ἐὰν $x^2y=\alpha^3$, τὸ ἄθροισμα $x+y$ γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν τὸ x ληφθῇ διπλάσιον τοῦ y.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ γινόμενον

$$x^2y = \alpha^3, \quad \text{γίνεται } 4y^3 = \alpha^3$$

ὁπότε :

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{4}} \quad \text{καὶ } x = \frac{2\alpha}{\sqrt[3]{4}}.$$

Πρόβλημα

378. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων τῶν ἐχόντων δοθεῖσαν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν $2\alpha^2$, ποῖον τὸ μέγιστον κατ' ὄγκον ;

Ἔστωσαν x, y, z αἱ ἀκμαὶ καὶ xyz ὁ ὄγκος τοῦ τυχόντος ἐξ αὐτῶν.

Τὸ ἄθροισμα $xy+yz+zx=\alpha^2$ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ καί, λαμβάνοντες ὡς βάσιν τὴν ἕδραν (x, y), $z(x+y)$ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Ὑποθέσωμεν ἀμετάβλητον τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως· θὰ εἶναι τότε καὶ τὸ ἥμισυ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας σταθερόν, ἐπειδὴ ἡ τιμὴ αὐτοῦ $\alpha^2 - xy$ θὰ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός.

Τὸ ὕψος z ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ ἡμίσεος τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας διὰ τῆς ἡμιπεριμέτρου τῆς βάσεως,

$$z = \frac{\alpha^2 - xy}{x+y} = \frac{\text{σταθ.}}{x+y}.$$

τὸ μῆκος δὲ αὐτὸ θὰ εἶναι ἐπὶ τοσοῦτον μεγαλύτερον, ἄρα καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ μεγαλύτερος, ὅσον ὁ διαιρέτης $x+y$ θὰ εἶναι μικρότερος. Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον xy ὑπετέθη σταθερόν, τὸ ἐλάχιστον τοῦ $x+y$ θὰ συμβαίνῃ διὰ $x=y$. *Ἡ βάσις ἑπομένως τοῦ μεγίστου στερεοῦ πρέπει νὰ εἶναι τετράγωνον.*

Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν καὶ ἂν θεωρήσωμεν ὡς βασιν τοῦ μεγίστου στερεοῦ οἱανδήποτε ἄλλην ἕδραν αὐτοῦ. Ἑπομένως :

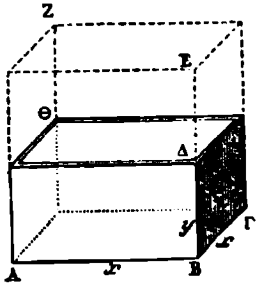
Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τῶν ἐχόντων δοθεῖσαν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν, μέγιστον εἶναι ὁ κύβος.

Πρόβλημα

379. Ποία ἡ μεγίστη χωρητικότης ἑνὸς ἀνοικτοῦ ὀρθογωνιακοῦ κιβωτίου, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν πέντε ἑδρῶν του εἶναι δοθὲν α^2 ;

Ἂς διπλασιάσωμεν τὸν πρὸς σπουδὴν ὄγκον, λαμβάνοντες τὸ μῆκος ΔΕ ἴσον πρὸς τὸ βάθος τοῦ κιβωτίου.

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ οὕτω σχηματιζομένου παραλληλεπιπέδου εἶναι σταθερά, ἴση πρὸς $2\alpha^2$, καί, κατὰ συνέπειαν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ὁ ὄγκος του γίνεται μέγιστος ἐὰν τοῦτο εἶναι κύβος. Τὸ μέγιστον κατ' ὄγκον, ἑπομένως, κιβώτιον θὰ πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ κύβου, *μὲ ὕψος y ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τῆς βάσεως.*



Σχ. 261.

Ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια τῶν πέντε ἑδρῶν,

$$\alpha^2 = x^2 + 4xy$$

γίνεται τότε

$$x^2 + 4x \cdot \frac{x}{2} = \alpha^2.$$

ἑπομένως :

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \quad \text{καὶ} \quad V = \frac{\alpha^2}{3} \cdot \frac{\alpha}{2\sqrt{3}} = \frac{\alpha^3}{6\sqrt{3}}.$$

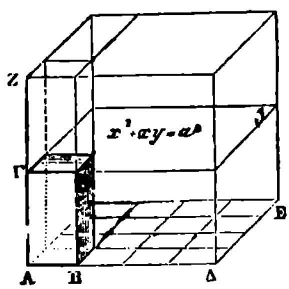
Σημείωσις. Χρήσιμος θὰ ἦτο ἡ σύγκρισις τῆς τόσον ἁπλῆς καὶ κομψῆς αὐτῆς λύσεως, ὡς καὶ πολλῶν ἄλλων τὰς ὁποίας ἤδη ἐξεθέσαμεν, πρὸς τὰς λύσεις τὰς ὁποίας παρέχει ἡ Ἄλγεβρα τῶν ἰδίων προβλημάτων. (Βλ. Ex. d' Algèbre, F. G.-M, 5e éd., n° 984).

Πρόβλημα

380. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, μὲ βάσιν τετράγωνον καὶ διὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν τῆς βάσεως καὶ μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας εἶναι δοθὲν α^2, ποῖον τὸ μέγιστον κατ' ὄγκον;

Ἔστωσαν x ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως, y τὸ ὕψος. Ὁ ὄγκος εἶναι x^2y καὶ ἡ σταθερὰ ἐπιφάνεια

$$x^2 + xy = \alpha^2.$$



Σχ. 262.

Διὰ νὰ ἀναχθῶμεν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν δοθεῖσαν ἐπιφάνειαν ἐπὶ 16, ἢ νὰ θέσωμεν

$$(4x)^2 + 4 \cdot 4xy = 16\alpha^2.$$

Ἐπειδὴ τότε ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ἀθροίσματος παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου μὲ πλευρὰν $4x$, ὁ δὲ δεύτερος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τεσσάρων παραπλεύρων ἑδρῶν, ἐχουσῶν $4x$ ὡς βάσιν καὶ ὕψος y.

Ὡς εἴδομεν, ὁ μέγιστος ὄγκος τοῦ νέου στερεοῦ λαμβάνεται διὰ πλευρὰν τῆς βάσεως διπλασίαν τοῦ ὕψους (§ 379),

$$4x = 2y \quad \text{ἢ} \quad y = 2x.$$

ἑπομένως :

Τὸ μέγιστον τῶν θεωρουμένων παρ/δων λαμβάνεται ὅταν τὸ ὕψος y, εἶναι διπλάσιον τῆς πλευρᾶς x τῆς βάσεώς του.

Ἡ σχέσις $x^2 + xy = \alpha^2$

γίνεται τότε $x^2 + 2x^2 = \alpha^2$.

ἄρα:

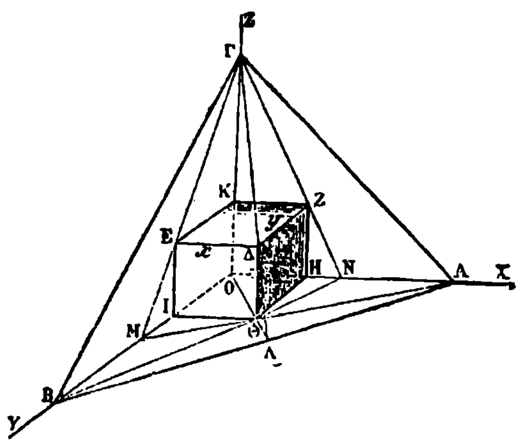
$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{2\alpha}{\sqrt{3}} \quad \text{καὶ } V = x^2y = \frac{2\alpha^3}{3\sqrt{3}}.$$

Πρόβλημα

381. Ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς βάσεως τετραέδρου, τοῦ ὁποίου ἡ εἰς τὴν κορυφὴν Ο στερεὰ γωνία εἶναι τρισορθογώνιος καὶ αἱ ἐξ αὐτῆς ἀκμαὶ ἴσαι, φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς ἕδρας τῆς τριέδρου Ο. Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τῆς βάσεως τὸ κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν σχηματιζόμενον παραλληλεπίπεδον ἔχει μέγιστον ὄγκον;

1) Ἔστω ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = λ καὶ ΑΒΓ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον τῆς βάσεως.

Ἂν παραστήσωμεν διὰ x, y, z τὰς ἀποστάσεις τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ΑΒΓ ἀπὸ τῶν τριῶν ἑδρῶν, γνωρίζομεν ὅτι τὸ



Σχ. 263.

ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων μηκῶν εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς λ (§ 278). Ὁ μέγιστος ἑπομένως ὄγκος λαμβάνεται ὅταν

$$x = y = z = \frac{\lambda}{3}$$

καὶ εἶναι ἴσος πρὸς

$$V = xyz = \frac{\lambda^3}{27} = \frac{2\lambda^3}{54}.$$

Ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου, ἐκφραζόμενος συναρτήσει τοῦ λ, εἶναι τότε

$$V' = OA \cdot \frac{OB}{2} \cdot \frac{O\Gamma}{3} = \frac{\lambda^3}{6} = \frac{9\lambda^3}{54}.$$

Εἶναι δηλ. τὸ μέγιστον παρ/δον τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ τετραέδρου.

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον Δ διὰ τὸν μέγιστον ὄγκον εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Αἱ προβολαὶ Ε, Ζ, Θ τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τῶν ἑδρῶν εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν διαμέσων αὐτῶν.

382. 2) *Τυχὸν τρίεδρον*. Βασιζόμενοι ἐπὶ τῆς προτάσεως τῆς παρ/φου 204, περιοριζόμεθα εἰς τὴν διατύπωσιν μόνον τοῦ ἑπομένου θεωρήματος:

Θεώρημα. Ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς βάσεως ΑΒΓ τετραέδρου τυχόντος Ο—ΑΒΓ, φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς ἕδρας τῆς κορυφῆς Ο. Ἐκ τῶν σχηματιζομένων παραλληλεπιπέδων, τὸ ἔχον τὸν μέγιστον ὄγκον εἶναι τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς σημεῖον Δ, συμπίπτον πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

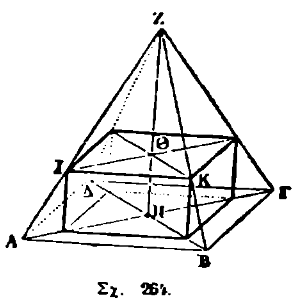
Εἶναι δὲ ὁ μέγιστος οὗτος ὄγκος τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου.

Πρόβλημα

383. Διὰ τῆς κορυφῆς Δ παραλληλεπιπέδου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ΑΒΓ, τέμνον τὰς ἀκμὰς ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ τῆς ἀπέναντι τῆς Δ κορυφῆς Ο εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τετράεδρον Ο—ΑΒΓ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον (Σχ. 263).

Εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου προβλήματος· θὰ πρέπει αἱ ἀκμαὶ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ νὰ εἶναι τριπλάσιαι τῶν ἀντιστοίχων ἀκμῶν τοῦ παρ/δου. Τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ θὰ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Δ καὶ τὸ τετράεδρον Ο—ΑΒΓ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον ἐλάχιστον, μὲ ὄγκον ἴσον πρὸς τὰ $\frac{9}{2}$ τοῦ ὄγκου τοῦ παρ/δου.

Πρόβλημα



Σχ. 264.

384. Δοθείσης πυραμίδος, νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πρῖσμα, μὲ βάσιν τὴν τομὴν τῆς πυραμίδος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ὕψος ΘΗ (Σχ. 264), νὰ ἔχῃ τὸν μέγιστον ὄγκον.

1η Περίπτωσις. Ἡ πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν α αὐτοῦ.

Διὰ πᾶσαν, παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, τομὴν θὰ ἔχωμεν

$$IK = Z\Theta$$

ἢ $$IK + \Theta H = ZH = \alpha.$$

Ἔστω $IK = x$ καὶ $\Theta H = y$· θὰ ἔχωμεν

$$x + y = \alpha.$$

Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι x^2y, γίνεται δὲ μέγιστος ὅταν $x = 2y$ (§ 76, 3η Ἀρχή). Ἄρα:

$$x = \frac{2\alpha}{3} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{\alpha}{3}.$$

Ἡ τομή, ἑπομένως, *θὰ πρέπει νὰ ἀχθῇ εἰς τὸ τρίτον τοῦ ὕψους ἀπὸ τῆς βάσεως*, ἢ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ ἀπὸ τῆς κορυφῆς. Ὁ ὄγκος τοῦ μεγίστου πρίσματος εἶναι

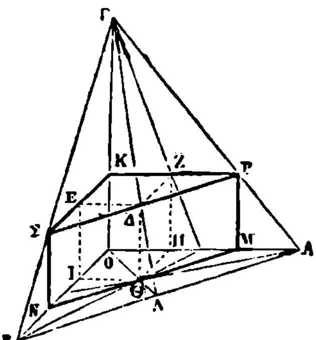
$$V = x^2y = \frac{4\alpha^3}{27}.$$

384 α. 2α Περίπτωσις. Κατὰ τοὺς μετασχηματισμούς, τοὺς ὑποδειχθέντας εἰς τὰς παρ/φους 202, 203 καὶ 204, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ἀπ' εὐθείας ὅτι:

Διὰ τυχοῦσαν πυραμίδα, τὸ μέγιστον πρῖσμα ἀντιστοιχεῖ εἰς τομὴν ἀγομένην εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους ἀπὸ τῆς κορυφῆς.

Ἄλλη λύσις. *Θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τριγωνικὴν πυραμίδα ἔχουσαν ὡς βάσιν τρίγωνον* ΑΟΒ.

Φέρομεν τομὴν αὐτῆς ΡΚΣ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν καὶ εἰς τὸ τυχὸν ὕψος καὶ κατασκευάζομεν τὸ ἀντίστοιχον εἰς αὐτὴν πρῖσμα, ὡς καὶ τὸ παραλληλεπίπεδον ΔΖΚΕ — ΘΗΟΙ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΡΣ καὶ εὑρίσκεται ἑπομένως ἐπὶ τῆς διαμέσου ΓΔΛ τῆς ἕδρας ΑΒΓ.



Σχ. 265.

1) Τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πρίσματος· ἐπειδὴ τὰ στερεὰ αὐτὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, βάσιν δὲ τὸ πρῶτον ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ δευτέρου.

2) Εἰς τὸ μέγιστον παραλληλεπίπεδον ἀντιστοιχεῖ διπλάσιον αὐτοῦ πρῖσμα καί, κατὰ συνέπειαν, τὸ μέγιστον πρῖσμα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ παραλληλεπίπεδον γίνεται μέγιστον ὅταν ἡ κορυφή του Δ εὑρίσκεται εἰς τὸ τρίτον τῆς διαμέσου ΛΓ ἀπὸ τῆς βάσεως ΑΒ (§ 381), ἕπεται ὅτι καὶ τὸ πρῖσμα γίνεται μέγιστον ὅταν ἡ τομὴ ΡΚΣ τῆς πυραμίδος ἀχθῇ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους ἀπὸ τῆς κορυφῆς Γ.

3) Ἡ κορυφὴ Δ τοῦ μεγίστου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται, ὡς εἴδομεν, εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου ΓΛ καὶ ἡ κορυφὴ Κ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ΓΟ. *Γίνεται*, λοιπόν, *τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα μέγιστον ὅταν ἡ τομὴ* ΡΚΣ *ἀχθῇ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ἀκμῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἢ εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους ἀπὸ τῆς βάσεως.*

385. Ὄγκος τοῦ μεγίστου πρίσματος. Ἂς εἶναι Β ἡ βάσις καὶ υ τὸ ὕψος τῆς δοθείσης πυραμίδος· ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι $\frac{1}{3}$ Βυ.

Ἐπειδὴ ἡ τομὴ ΡΚΣ γίνεται εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{(\text{ΡΚΣ})}{(\text{ΑΟΒ})}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{(\text{ΡΚΣ})}{\text{Β}}=\frac{4}{9}$$

καὶ

$$(\text{ΡΚΣ})=\frac{4\text{Β}}{9}\cdot$$

Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος $=\frac{υ}{3}$ · ἑπομένως, ὁ ὄγκος του εἶναι ἴσος πρὸς

$$V=\frac{4}{9}\text{Β}\,.\,\frac{υ}{3}=\frac{4}{27}\text{Β}υ.$$

Εἶναι δηλαδὴ τὸ μέγιστον πρῖσμα τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς πυραμίδος.

Παρατήρησις. Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο εἶναι σύμφωνον πρὸς ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἐλάβομεν δι' ἄλλης μεθόδου (§ 384). Διὰ τὴν πυραμίδα πράγματι Ζ, ΑΒΓΔ (Σχ. 264), εἶναι

$$V(\text{Ζ, ΑΒΓΔ})=\frac{α^3}{3}=\frac{9α^3}{27},$$

καὶ τὸ πρῖσμα μὲ ὄγκον $\frac{4α^3}{27}$ εἶναι τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς δοθείσης πυραμίδος.

386. Ἐπέκτασις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα διὰ μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα, ἐπεκτείνεται εἰς μίαν τυχοῦσαν πυραμίδα καὶ ἰδιαιτέρως εἰς τὸν κῶνον. Δυνάμεθα, ἑπομένως, νὰ διατυπώσωμεν τὸ ἑπόμενον θεώρημα.

Θεώρημα. Ὁ μέγιστος ἐγγεγραμμένος εἰς δοθέντα κῶνον κύλινδρος εἶναι ὁ ἔχων ἄνω βάσιν τὴν τομὴν τοῦ κώνου εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους του ἀπὸ τῆς κορυφῆς.

Ὄγκος κώνου $=\frac{1}{3}$ πρ²υ, ὄγκος μεγίστου κυλίνδρου $=$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}\,πρ^2υ=\frac{4}{27}\,πρ^2υ.$$

387. Ἀντιστρόφως. *Ἡ ἐλαχίστου ὄγκου περιγεγραμμένη πυραμὶς εἰς δοθὲν πρῖσμα, ἔχει ὕψος* ΖΗ *τριπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ πρίσματος.*

Ὁμοίως, *ὁ ἐλάχιστος περιγεγραμμένος κῶνος εἰς δοθέντα κύλινδρον ἔχει ὕψος τριπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ κυλίνδρου.*

Πρόβλημα

388. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαῖραν τὸ μέγιστον παραλληλεπίπεδον [85].

Ἂς εἶναι x, y, z αἱ διαστάσεις τυχόντος ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν παραλληλεπιπέδου καὶ δ ἡ διάμετρος αὐτῆς.

85. Σημ. μετ. Ὀρθογώνιον, φυσικά.

'Υποθέσωμεν ἀμετάβλητον τὸ ὕψος z. Ἡ ἕδρα x, y εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον, τομὴν τῆς σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου ἀπέχοντος τοῦ κέντρου ἀπόστασιν $\frac{z}{2}$· ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος z τοῦ στερεοῦ εἶναι σταθερόν, ὁ ὄγκος του γίνεται μέγιστος διὰ μεγίστην τὴν βάσιν του. Θὰ πρέπει λοιπὸν ἡ ἕδρα (x, y) νὰ εἶναι τετράγωνον.
'Αναλόγως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι καὶ πᾶσα ἄλλη ἕδρα τοῦ μεγίστου παραλληλεπιπέδου πρέπει νὰ εἶναι τετράγωνον καί, ἑπομένως, ὅτι τὸ στερεὸν τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι κύβος.

Παρατηρήσεις. 1) Ὁ ἐγγεγραμμένος κύβος ἔχει ὡς διαγώνιον τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας. Ἄρα

$$x^2+y^2+z^2=\delta^2,\quad 3x^2=\delta^2,\quad x=\frac{\delta}{\sqrt{3}}\quad \text{καὶ}\quad V=\frac{\delta^3}{3\sqrt{3}}\cdot$$

2) Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν διαστάσεων εἶναι σταθερόν, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἀκόλουθον ἀρχήν.

388 α. Πέμπτη ἀρχή. *Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τριῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι σταθερόν, τὸ γινόμενον αὐτῶν γίνεται μέγιστον ὅταν οὗτοι καταστοῦν ἴσοι μεταξύ των.*

§ VI. Χρῆσις τῆς ἐφαπτομένης

Πρόβλημα

389. **Δίδονται τρία ἐπίπεδα τεμνόμενα ἀνὰ δύο κατὰ τρεῖς εὐθείας, ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ, μία δὲ καμπύλη ἐπιφάνεια (Ε) περιέχεται μεταξὺ αὐτῶν. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε τὰ ἐκ τοῦ σημείου αὐτοῦ, παραλλήλως πρὸς τὰς ἕδρας τοῦ τριέδρου, ἀγόμενα ἐπίπεδα νὰ σχηματίζουν μετὰ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ τὸ μέγιστον παραλληλεπίπεδον.**

Σύμφωνα μὲ τὰ γνωστὰ θεωρήματα, τὰ σχετικὰ πρὸς τὸ τετράεδρον καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸ πρῖσμα (§§ 381, 382), τὸ πρόβλημα λύεται, ἐὰν φέρωμεν ἐφαπτόμενον τῆς ἐπιφανείας ἐπίπεδον ΑΒΓ τοιοῦτον, ὥστε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Δ νὰ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Πράγματι, τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο (Δ) — καὶ τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου — εἶναι μεγαλύτερον παντὸς ἄλλου (Δ′) ἔχοντος τὴν κορυφήν του Δ′ εἰς τυχὸν ἄλλο σημεῖον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (§ 382). Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐπιφάνεια (Ε) ὑποτίθεται κοίλη πρὸς τὸ σημεῖον Ο καὶ περιεχομένη, ἑπομένως, ἐντὸς τοῦ τετραέδρου Ο—ΑΒΓ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ παραλληλεπίπεδον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τυχόν, διάφορον τοῦ Δ, σημεῖον αὐτῆς $Δ_1$ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ ἔχοντος κορυφὴν τὸ ἀντίστοιχον [36] τοῦ $Δ_1$ σημεῖον $Δ_1'$ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ.
Ἑπομένως:

---

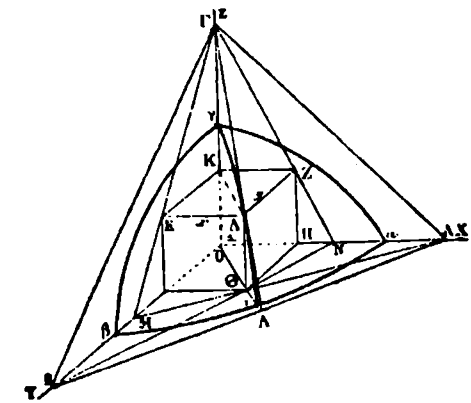
36. Σημ. μετ. Τὸ σημεῖον $Δ'_1$ εἶναι τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα $ΟΔ_1$, τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ.

Θεώρημα. Τὸ μέγιστον παραλληλεπίπεδον ἔχει κορυφὴν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς ἐπιπέδου ΑΒΓ, ἐφαπτομένου τῆς ἐπιφανείας εἰς σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι τοῦτο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ λαμβανομένου τριγώνου ΑΒΓ.

389 α. Παρατηρήσεις. 1) Θὰ ὑποδείξωμεν τὸν τρόπον εὑρέσεως τοῦ σημείου ἐπαφῆς διὰ τὰς περιπτώσεις μόνον τὰς ὁποίας θὰ συναντήσωμεν ἀργότερον.

Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια εἶναι ἐκ περιστροφῆς· συνήθως εἶναι σφαιρικὴ ζώνη.

Ἔστω ΟΓ ὁ ἄξων περιστροφῆς τῆς ζώνης, ΧΟΥ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα. Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὴν ζώνην (ἢ εἰς σφαιρικὸν τμῆμα) τὸ μέγιστον παραλληλεπίπεδον, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὸ τέταρτον τῆς ζώνης, φέροντες διὰ τοῦ ἄξονος ΟΖ δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπ' ἄλληλα. Ἐπειδὴ διὰ ἐγγεγραμμένα παραλληλεπίπεδα τοῦ αὐτοῦ ὕψους, τὸ μέγιστον ἔχει ὡς βάσιν τετράγωνον (§ 372).



Σχ. 266.

Τὸ τέταρτον τοῦτο τῆς ζώνης εἶναι συμμετρικὸν πρὸς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον ΓΟΛ τὴν δίεδρον ΟΓ καὶ τέμνον τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ζώνης κατὰ τὸ τόξον γΔι· ἐφαπτόμενον δὲ ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς σημεῖον τι τοῦ τόξου τούτου εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ τμήσῃ τὸ τρίεδρον κατὰ τρίγωνον ΑΒΓ ἰσοσκελές, καὶ ἡ ἰδιότης αὕτη παραμένει ἀναλλοίωτος διὰ πᾶσαν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαν. Ἑπομένως:

Ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη ΓΔΛ *τοῦ τόξου* γΔι *τοιαύτη, ὥστε* $\Delta\Gamma = 2\Delta\Lambda$ (§ 315), διότι θὰ εἶναι τότε τὸ σημεῖον Δ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ.

2) Ἡ ἐφαπτομένη ΓΔΛ τοῦ τόξου γΔι, ἡ τοιαύτη ὥστε $\Delta\Gamma = 2\Delta\Lambda$ ὁρίζει τὴν κορυφὴν τοῦ παραλληλεπιπέδου (Δ, Ο). Τὰ μήκη ΔΘ καὶ ΔΚ δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν σχέσιν πρὸς ἄλληλα· τὸ ἓν εἶναι ἡ ἀκμὴ τοῦ στερεοῦ καὶ τὸ ἄλλο ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου τῆς βάσεως.

Εἰς τὴν ειδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ παρ/δον (Δ, Ο) θὰ ἦτο κύβος, θὰ εἴχομεν

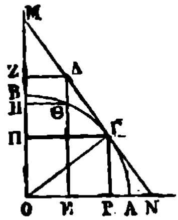
$$\Delta K^2 = 2(\Delta\Theta)^2.$$

3) Διὰ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ μεγίστου τριγωνικοῦ πρίσματος, θὰ φέρωμεν διὰ τῆς εὐθείας ΟΖ τρία ἐπίπεδα κεκλιμένα πρὸς ἄλληλα κατὰ 120°. Ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ τριγωνικοῦ μεγίστου πρίσματος θὰ εἶναι τότε ἐγγεγραμμένη εἰς περιφέρειαν καὶ κατ' ἀνάγκην (§ 355) ἰσόπλευρον τρίγωνον.

Πρόβλημα

390. Νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον παραλληλεπίπεδον εἰς τὸ τμῆμα τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα δοθείσης ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς. Μία τῶν βάσεων τοῦ παραλληλεπιπέδου θὰ πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος.

Ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὸ τέταρτον πάλιν τοῦ τμήματος, δηλ. τὸ τμῆμα τοῦ ὄνυχος τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς βάσεως τοῦ τμήματος καὶ δύο καθέτων ἐπ' ἄλληλα ἐπιπέδων διὰ τοῦ ἄξονος.



Σχ. 267.

Τὸ μέγιστον στερεὸν θὰ πρέπει νὰ ἔχῃ ὡς κορυφὴν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀντιστοίχου εἰς τὸν ὄνυχα ἀτράκτου, τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας, τοῦ τοιούτου, ὥστε τὸ σημεῖον αὐτὸ νὰ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου καθ' ὃ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὰς ἕδρας τοῦ τρισορθογωνίου τριέδρου (§ 381). Ἐὰν λοιπὸν AB εἶναι ὁ μέσος μεσημβρινὸς τοῦ ἀτράκτου, θὰ πρέπει νὰ ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΜΓΝ εἰς τρόπον, ὥστε

$$\Gamma M = 2 . \Gamma N. \qquad (\S\ 315)$$

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τὸ ἔχον ΓΡ ὡς ἀκμὴν καὶ ΓΠ ὡς διαγώνιον τῆς ἄνω βάσεως, εἶναι τὸ μέγιστον. Πράγματι, διὰ πᾶν ἄλλο σημεῖον Θ τῆς καμπύλης AB, τὸ παρ/δον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ τμήματα ΘΕ καὶ ΘΗ εἶναι μικρότερον τοῦ παρ/δου τῶν ΔΕ, ΔΖ· τοῦτο δὲ εἶναι μικρότερον τοῦ παρ/δου τῶν ΓΡ καὶ ΓΠ. Τὸ τελευταῖον ἄρα παρ/δον εἶναι τὸ ζητούμενον μέγιστον παραλληλεπίπεδον.

391. *Παρατήρησις.* Διὰ τὸ ἡμισφαίριον, ἡ ἐφαπτομένη, ἡ διαιρουμένη εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους της ἀπὸ τῆς κορυφῆς Μ, δίδει

$$\Gamma P^2 = \frac{\rho^2}{3}, \quad \Gamma\Pi^2 = \frac{2\rho^2}{3}. \qquad (\S\ 316\ \alpha,\ \text{τύποι}\ (\gamma)\ \text{καὶ}\ (\delta))$$

Τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον εἰς ὁλόκληρον τὴν σφαῖραν παραλληλεπίπεδον εἶναι ἑπομένως κύβος. Πράγματι, ΓΡ εἶναι ἡ πλευρὰ καὶ ΓΠ ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου τὸ ὁποῖον περατώνει τὸ στερεὸν (§ 389, 2), τὸ δὲ σχῆμα ΟΑΓΒ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος, τοῦ ἐγγεγραμμένου παραλληλεπιπέδου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου τετραέδρου ὑπὸ τοῦ διαγωνίου ἐπιπέδου τοῦ ἀγομένου διὰ τῆς ΟΒ καὶ τῆς ἀπέναντι αὐτῆς διαμέσου ΜΝ.

392. *Μέγιστον τοῦ* x^2y. Τὸ προηγούμενον πρόβλημα ὁδηγεῖ κατὰ πολὺ ἁπλοῦν τρόπον εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου τοῦ γινομένου x^2y, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν x καὶ y εἶναι σταθερόν.

Ἄς εἶναι $\qquad x^2 + y^2 = \alpha^2.$

Διὰ τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον x, ἡ ΓΠ, εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου τοῦ τετραγώνου τῆς βάσεως καὶ y, ἡ ΓΡ, τὸ ἥμισυ τοῦ ὁλικοῦ ὕψους τοῦ ζητουμένου παραλληλεπιπέδου.

Ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ στερεοῦ τούτου, δηλ. τὸ

τμῆμα αὐτοῦ τὸ περιεχόμενον εἰς μίαν τῶν ὀκτὼ τριέδρων τρισορθογωνίων στερεῶν γωνιῶν, τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων καθέτων ἀνὰ δύο καὶ ἀγομένων διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Ἐπειδὴ τὸ μέγιστον παρ/δον εἶναι ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς τὴν σφαῖραν κύβος, τὸ ὄγδοον τοῦ στερεοῦ τούτου εἶναι ἐπίσης κύβος (κ), ἔχων x ὡς μῆκος τῆς διαγωνίου τῆς βάσεως καὶ y ὡς μῆκος τῆς πλευρᾶς του.

Ἑπομένως (§ 389, 2), x^2 θὰ εἶναι ἴσον πρὸς $2y^2$.

Ἡ ἰσότης $x^2+y^2=\alpha^2$ γίνεται $3y^2=\alpha^2$·

ἄρα $y^2=\frac{\alpha^2}{3}$ καὶ $x^2=\frac{2}{3}\alpha^2$.

Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου (κ) εἶναι $\frac{1}{2}x^2\cdot y$ καὶ τὸ γινόμενον x^2y — τὸ ἐκφράζον τὸ διπλάσιον τοῦ ὄγκου τούτου — γίνεται μέγιστον ὅταν

$$x^2=\frac{2}{3}\alpha^2 \quad ἢ \quad x=\frac{\alpha}{3}\sqrt{6}$$

καὶ

$$y^2=\frac{\alpha^2}{3} \quad ἢ \quad y=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}.$$

Ἄρα :

$$V_{(\kappa)}=\frac{1}{2}x^2y=\frac{\alpha^3}{9}\sqrt{3},$$

καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν κύβου εἶναι

$$V=8\,V_{(\kappa)}=\frac{8\alpha^3\sqrt{3}}{9}.$$

Πρόβλημα

393. Εἰς σφαιρικὸν τομέα, ἢ σφαιρικὸν τμῆμα μὲ μίαν βάσιν, νὰ ἐγγραφῇ ὁ μέγιστος κύλινδρος.

Ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὴν τομὴν τοῦ στερεοῦ ὑπὸ ἐπιπέδου ἀγομένου διὰ τοῦ ἄξονος.

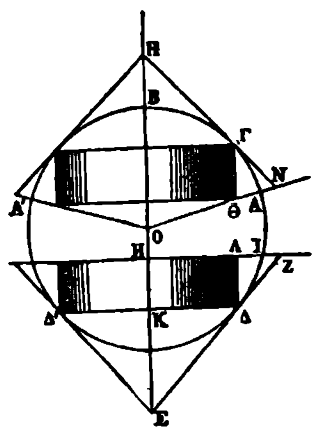
1) Διὰ τὸν τομέα, πρέπει νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη ΗΓΝ, περατουμένη εἰς τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ καὶ τοιαύτη, ὥστε

$$ΗΓ=\frac{2}{3}ΗΝ \quad (§\ 315)$$

2) Διὰ τὸ τμῆμα, ἡ ἐφαπτομένη ΕΔΖ θὰ εἶναι πάλιν τοιαύτη, ὥστε

$$ΕΔ=2\,.\,ΔΖ.$$

Διὰ τὸν κῶνον μὲ κορυφὴν Ε καὶ γενέτειραν ΕΔΖ, ὁ ἐγγεγραμμένος κύλινδρος γίνεται μέγιστος ὅταν ἡ τομὴ ΔΔ′ εἶναι εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους ἀπὸ τῆς κορυφῆς (§ 386).



Σχ. 268.

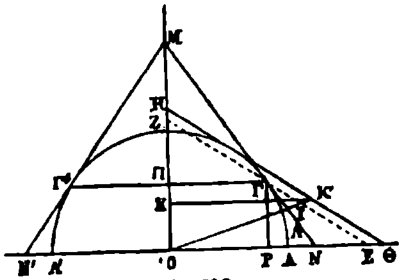
Πρόβλημα

394. Εἰς σφαιρικὸν τμῆμα μὲ δύο βάσεις ΑΓΓ'Α' νὰ περιγραφῇ ὁ ἐλάχιστος κῶνος.

Θὰ πρέπει νὰ ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΜΓΝ εἰς τρόπον, ὥστε

$$ΜΓ = 2 . ΓΝ$$

(§§ 387, 390).



Σχ. 269.

Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ κῶνος μὲ κορυφὴν Μ καὶ γενέτειραν ΜΓΝ εἶναι μικρότερος παντὸς ἄλλου, ἔχοντος γενέτειραν τυχοῦσαν ἄλλην ἐφαπτομένην ΗΘ.

Ὁ κύλινδρος ΓΡΟΠ, ὁ ἔχων ΓΡ ὕψος καὶ ἀκτῖνα βάσεως ΓΠ, εἶναι τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ κώνου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῆς ΜΟΝ (§ 386).

Ἄρα $\quad$ Κῶνος ΜΟΝ $= \frac{9}{4}$ Κυλίνδρου ΓΡΟΠ. $\quad$ (1)

Διὰ τοῦ σημείου Γ φέρομεν παράλληλον ΕΖ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΘΗ, ἄς εἶναι δὲ Ι, Ι' δύο σημεῖα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν μηκῶν των ἀπὸ τῶν Ζ καὶ Η ἀντιστοίχως.

Εἰς τὸν κῶνον ΖΟΕ, ὁ κύλινδρος ΓΡΟΠ εἶναι μικρότερος τοῦ κυλίνδρου ΙΚΟΛ, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ πρῶτον τρίτον τῆς γενετείρας ἀπὸ τῆς βάσεως (§ 386).

Ἐπειδὴ δέ, ὡς καὶ εἰς (1), ὁ κύλινδρος ΙΚΟΛ εἶναι τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ κώνου ΖΟΕ, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀνισότητα

$$\text{κύλ. ΓΡΟΠ} < \text{κυλ. ΙΚΟΛ} = \frac{4}{9} \text{ κώνου ΖΟΕ},$$

ἐξ ἧς $\quad$ κῶνος ΖΟΕ $> \frac{9}{4}$ κυλίνδρου ΓΡΟΠ

ἢ $\quad$ κῶνος ΖΟΕ $>$ κώνου ΜΟΝ.

Κατὰ *μείζονα* ἑπομένως *λόγον*, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος:

κῶνος ΗΟΘ $>$ κώνου ΜΟΝ.

Πρόβλημα

395. Εἰς τμῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς μὲ μίαν βάσιν ([87]), νὰ ἐγγραφῇ ὁ μέγιστος κύλινδρος.

Θὰ πρέπει νὰ φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΔΕΖ εἰς τρόπον, ὥστε ΔΕ $= 2 .$ ΕΖ (§ 390).

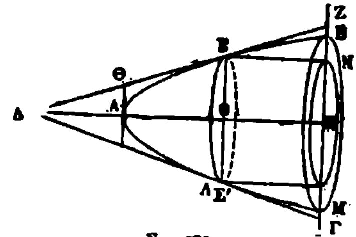
87. Σημ. μετ. Κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονά του.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ ἡ ΑΗ εἰς δύο ἴσα μέρη· ἐπειδὴ ἡ ὑφαπτομένη τῆς παραβολῆς διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφὴν (G. n° 699), καὶ ἑπομένως ΑΔ = ΑΟ.

Ὁ μέγιστος, ἄρα, κύλινδρος ἔχει ὡς μίαν βάσιν τὴν τομὴν τὴν ἴσον ἀπέχουσαν τῆς κορυφῆς Α καὶ τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ τμήματος τοῦ παραβολοειδοῦς.

Ἂν $AH = \alpha$, $BH = \beta$, ὁ ὄγκος τοῦ τμήματος εἶναι

$$\frac{\pi\alpha\beta^2}{2}. \quad (G., n^\circ 953).$$



Σχ. 270.

Ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου ἔχει ἐμβαδὸν $\pi(OE)^2$· καὶ ἐπειδὴ

$$OE^2 = \frac{1}{2} HB^2, \quad OH = \frac{\alpha}{2},$$

ἕπεται

$$V \text{ κυλ.} = \frac{\pi\alpha\beta^2}{4}.$$

Εἶναι δηλ. ὁ ὄγκος τοῦ μεγίστου κυλίνδρου τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ τμήματος τοῦ παραβολοειδοῦς.

396. Παρατηρήσεις. 1) Διὰ τὸ τμῆμα ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς, τὸ προκῦπτον ἐκ τομῆς αὐτοῦ διὰ τυχόντος ἐπιπέδου, ὁ μέγιστος ἐγγεγραμμένος κύλινδρος ἔχει πάλιν ὡς μίαν βάσιν τὴν τομὴν τοῦ στερεοῦ ὑπὸ ἐπιπέδου ἴσον ἀπέχοντος τῆς βάσεως αὐτοῦ καὶ τοῦ παραλλήλου πρὸς αὐτὴν ἐφαπτομένου ἐπιπέδου.

2) Διὰ τὸ παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς, ἡ ἐφαπτομένη ΔΖ εἶναι ἡ γενέτειρα τοῦ ἐλαχίστου περιγεγραμμένου κώνου (§ 394). Διὰ τὸν ὄγκον τοῦ κώνου τούτου, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ὕψος

$$\Delta H = \frac{3}{2}\alpha$$

καὶ

$$\frac{HZ^2}{OE^2} = \frac{\Delta H^2}{\Delta O^2} = \frac{9}{4}, \quad \frac{HZ^2}{{}^1/_2\,\beta^2} = \frac{9}{4},$$

$$HZ^2 = \frac{}{8}\beta^2.$$

ἄρα:

$$V = \frac{9}{8}\pi\beta^2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{9}{16}\pi\alpha\beta^2.$$

Πρόβλημα

397. **Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν τὸ μέγιστον κανονικὸν πρῖσμα. Λ. χ. τὸ μέγιστον τριγωνικόν.**

Πρώτη λύσις: Καλοῦντες $2y$ τὸ ὕψος κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου τριγωνικοῦ πρίσματος, x τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον — βάσιν τοῦ πρίσματος καὶ α τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$x^2 + y^2 = \alpha^2.$$

Ἡ ἐπιφάνεια S τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος συναρτήσει τοῦ μήκους x εἶναι:

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{4} x^2$$

καὶ ὁ ὄγκος του:

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2 y.$$

Διὰ τὸ μέγιστον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ, δηλ. τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου x^2y, παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ

$$x^2 + y^2 = \alpha^2,$$

τοῦτο λαμβάνεται διὰ (§ 392):

$$x^2 = 2y^2.$$

Ἄρα:

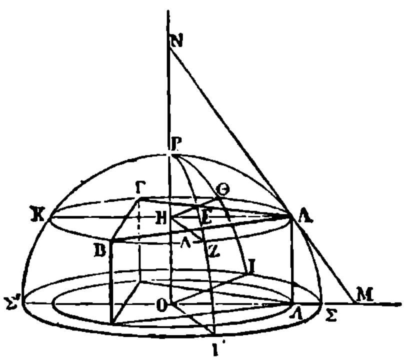
$$3y^2 = \alpha^2, \quad y = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \quad x^2 = \frac{2\alpha^2}{3}$$

καὶ

$$V\,max. = \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2 y = \alpha^3.$$

398. Δευτέρα λύσις. Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΑΒΓΛ τὸ ἥμισυ τοῦ μεγίστου κανονικοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος (Σχ. 271).

Ἂς ἐκλέξωμεν διὰ μεσημβρινὸν τομῆς τὸν διερχόμενον διὰ τῆς ἀκμῆς ΑΛ καὶ ἔστω ΣΟΣ′ μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας, κάθετος ἐπὶ τὰς παραπλεύρους ἀκμάς.



Σχ. 271.

Διὰ νὰ ἀναγάγωμεν τὸ πρόβλημα εἰς ἄλλο γνωστόν, φέρομεν διὰ τῆς ΡΟ ἐπίπεδα ΡΘΙ, ΡΖΙ′, κάθετα ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ἕδρας ΑΛΓ, ΒΑΛ τοῦ πρίσματος. Τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος θὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν οὕτω ἀχθέντων ἐπιπέδων (§ 389, Παρ/σις).

Θεωρήσωμεν τὸ πρῖσμα τοῦτο τὸ ἔχον βάσιν ΑΔΗΕ καὶ ὕψος ΑΛ. Ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΗΔ, ἡ ΑΕ ἐπὶ τὴν ΗΕ καὶ τὸ πρῖσμα (ΑΛ, ΑΔΗΕ) εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τρίεδρον τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μεγίστου κύκλου ΣΟΣ′ καὶ τῶν μεσημβρινῶν ἐπιπέδων τῶν ἀγομένων διὰ τῶν ΗΖ καὶ ΗΘ. Γίνεται ἑπομένως μέγιστον ὅταν ἡ κορυφὴ Α εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς ἐφαπτομένης διαιρουμένης εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ εἰς τὸ τρίτον τοῦ μήκους της ἀπὸ τοῦ Μ. (§ 389, Παρατήρησις 1) ([38]).

Συμπίπτει λοιπὸν ἡ κορυφὴ Α τοῦ μεγίστου πρίσματος πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν κύβου (§ 390).

---

38. **Σημ. μετ. Κατ' ἐπέκτασιν**

399. *Ἐπέκτασις.* Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ διὰ πᾶν ἐγγεγραμμένον πρῖσμα, ἔχον τὴν βάσιν ὁμοίαν πρὸς δοθὲν ἐγγράψιμον πολύγωνον. Ἐν ὀλίγοις:

Ἡ ἐφαπτομένη ΜΑΝ, *ἡ τοιαύτη, ὥστε* ΑΝ = 2ΑΜ, *ὁρίζει τὸν μέγιστον ἐγγεγραμμένον κύλινδρον* καὶ πᾶν πρῖσμα μεγίστου ὄγκου, ἔχον βάσιν ὁμοίαν δοθέντος ἐγγραψίμου πολυγώνου, εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν μέγιστον τοῦτον κύλινδρον.

Ὄγκοι τῶν ἐγγεγραμμένων στερεῶν. Ἔστω α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας· γνωρίζομεν ὅτι ἔχομεν τὰς ἑπομένας σχέσεις (§ 316, γ καὶ δ):

$$ΑΛ^2 = \frac{α^2}{3}, \quad ἄρα\ ΑΑ' = \frac{2α}{\sqrt{3}} \cdot \quad ΑΗ^2 = \frac{2}{3}α^2, \quad ΑΗ = α\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

ΑΑ' = 2ΑΛ εἶναι τὸ κοινὸν ὕψος ὅλων τῶν, μεγίστου ὄγκου, πρισματικῶν στερεῶν τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὴν σφαῖραν καὶ ΑΗ ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὴν βάσιν τῶν πρισμάτων τούτων περιφερείας.

(α) *Κύλινδρος.* $V = πρ^2.υ = π \cdot \frac{2}{3}α^2 . \frac{2α}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}πα^3.$

(β) *Κύβος.* $V = \left(\frac{2α}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}}α^3.$

(γ) *Τριγωνικὸν πρῖσμα.* Ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος ΑΗ εἶναι $ΑΗ\sqrt{3}$, τὸ δὲ ὕψος $\frac{3}{2}$ ΗΑ. Ἄρα

$$Εμβ.\ ΑΒΓ = \frac{3\sqrt{3}}{2}ΑΗ^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}α^2$$

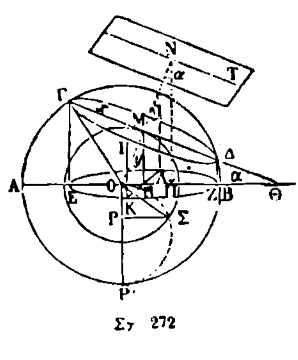
καὶ

$$V = (ΑΒΓ).ΑΑ' = α^3.$$

Ἤτοι: Τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν τριγωνικὸν πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸν κύβον μὲ ἀκμὴν τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς.

Πρόβλημα

400. Δίδονται σφαῖρα, εἷς μέγιστος κύκλος αὐτῆς ΑΟΒ καὶ ἐπίπεδον ΝΤ. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον (Π) παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΝΤ καὶ τοιοῦτον, ὥστε ὁ κύλινδρος, ὁ προβάλλων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίστου κύκλου τὴν τομὴν τοῦ (Π) καὶ τῆς σφαίρας νὰ ἔχῃ τὸν μέγιστον ὄγκον.



Σχ. 272

Ἐκ τοῦ κέντρου Ο τῆς σφαίρας φέρομεν κάθετον ΟΜΝ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΝΤ, διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου Μ τῆς τομῆς ΓΙΔΙ', καὶ τὴν κάθετον ΝΠ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίστου κύκλου.

Αἱ γωνίαι ΟΝΠ, ΟΘΜ εἶναι ἴσαι καὶ ὁ λόγος $\frac{ΝΠ}{ΝΟ}$ γνωστός, ἀφοῦ ἡ γωνία α εἶναι ὡρισμένη. Ἄς θέσωμεν ΓΜ = ΜΙ' = x, ΟΜ = y.

Ἡ προβολὴ ΕΛΖΚ τῆς περῖφερείας ΓΔ εἶναι ἔλλειψις, τῆς ὁποίας ὁ μικρὸς ἡμιάξων ΗΛ = ΜΙ' = x, ὁ δὲ μέγας ἡμιάξων

$$ΗΖ = ΗΕ = ΓΜ \,.\, \text{συν}\, α = x \,\text{συν}\, α,$$

$$\left(\text{συν}\, α = \frac{ΝΠ}{ΝΟ}\right) \cdot \text{ Ἐπομένως (G., n° 520, 637)}$$

$$V_{\text{κυλ. ΓΔΕΖ}} = π \,.\, ΗΕ \,.\, ΗΛ \,.\, ΗΜ$$

ὅπου ΗΜ = y συν α. Ἄρα

$$V = πx^2y \,\text{συν}^2 α.$$

Τὸ μέγιστον τῆς ποσότητος αὐτῆς ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν μεταβολῶν τοῦ x^2y · καὶ ἐπειδὴ $x^2 + y^2 = ΓΜ^2 + ΟΜ^2 = ΟΓ^2 = ρ^2$, ἕπεται (§ 392) ὅτι τὸ μέγιστον λαμβάνεται ὅταν

$$x^2 = \frac{2}{3}ρ^2 \quad \text{καὶ} \quad y^2 = \frac{ρ^2}{3}.$$

Διὰ τὴν κατασκευήν, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΡ' τμῆμα $ΟΡ = \frac{ρ}{3}$, ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ΡΣ μέχρι τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΟΡ' καὶ γράφομεν τὴν σφαῖραν μὲ ἀκτῖνα ΟΣ. Τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον (Π) εἶναι τὸ ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας αὐτῆς καὶ παράλληλον πρὸς τὸ δοθὲν ΝΤ.

Ἐπειδή:

$$ΟΣ^2 = ΟΡ \,.\, ΟΡ' = ρ \,.\, \frac{ρ}{3} = \frac{ρ^2}{3}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ἡ Ἐκλογὴ τῶν Ἀσκήσεων

401. Ἐπειδὴ αἱ περισσότεραι τῶν γραφικῶν κατασκευῶν ἀπαιτοῦν τὴν χρῆσιν καὶ τῶν δύο ὀργάνων τῶν *Στοιχείων τῆς Γεωμετρίας*, τοῦ *κανόνος* καὶ τοῦ *διαβήτου*, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐπιληφθῶμεν τῶν προβλημάτων ἢ θεωρημάτων τοῦ εἴδους αὐτοῦ παρὰ μετὰ τὴν σπουδὴν τῶν ἰδιοτήτων τῆς περιφερείας.

Τὰ προτιθέμενα ζητήματα εἶναι συγκεντρωμένα εἰς ὁμάδας, κατὰ φυσικὴν συγγένειαν—καὶ ἐφ' ὅσον τὸ τελευταῖον τοῦτο εἶναι ἑκάστοτε ἐφικτὸν ἢ σκόπιμον.

Τὰ θέματα μιᾶς ὡρισμένης ὁμάδος δύναται ὁ ἀναγνώστης νὰ ἐπεξεργασθῇ στηριζόμενος ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων προτάσεων τῶν *Στοιχείων* καί, φυσικά, ἐπὶ τῶν προηγουμένως ἀποδειχθεισῶν ἀσκήσεων. Ἐν τούτοις, *πᾶσα ἱκανοποιητικὴ ἀπόδειξις εἶναι παραδεκτέα, ἐπὶ οἱωνδήποτε ἀποδεδειγμένων προτάσεων καὶ ἂν στηρίζεται.*

Τέλος, θὰ πρέπει ὁ διδάσκων νὰ ἔχῃ ὑπ' ὄψιν ὅτι, τοῦ μέσου ἀρχαρίου μαθητοῦ, ἡ εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἀπόδοσις καὶ ἰδιαιτέρως ἡ εὐχέρεια ταύτης δὲν ἀποκτᾶται παρὰ μετὰ τὴν πλήρη κατοχὴν ὑπ' αὐτοῦ τῶν πρώτων δύο ἢ τριῶν Βιβλίων τῶν *Στοιχείων*.

402. Σημείωσις. Εἰς τὴν παροῦσαν *πέμπτην* ἔκδοσιν τῶν ***Ἀσκήσεων Γεωμετρίας***, ἔχομεν ἁπλοποιήσει ἢ καὶ παραλείψει πολλὰς τῶν στοιχειωδῶν ἀποδείξεων τῶν προηγουμένων ἐκδόσεων. Ἠδυνήθημεν οὕτω νὰ συμπληρώσωμεν μερικὰ ἐνδιαφέροντα θέματα καὶ νὰ προσθέσωμεν μέγαν ἀριθμὸν σημειώσεων, χωρὶς ὑπερβολικὴν αὔξησιν τοῦ ὄγκου τοῦ ὅλου συγγράμματος.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ι

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Γωνίαι

Εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο θὰ γίνῃ λόγος περὶ τῶν ὀρθῶν μόνον γωνιῶν καὶ συμπληρωματικῶν ἢ παραπληρωματικῶν γωνιῶν.

Θεώρημα 1

403. Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ διχοτόμοι των εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας· καὶ ἀντιστρόφως.

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

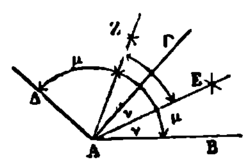
Θεώρημα 2

404. Ἐὰν ἡ γωνία τῶν διχοτόμων δύο ἐφεξῆς γωνιῶν δὲν εἶναι ὀρθή, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ δύο ἐφεξῆς γωνιῶν δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, αἱ διχοτόμοι αὐτῶν δὲν εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

Θεώρημα 3

405. Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχουν διαφορὰν μίαν ὀρθὴν γωνίαν καὶ τοποθετηθοῦν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ ἀποκτήσουν κοινὴν πλευράν, ἡ γωνία τῶν διχοτόμων των εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὀρθῆς γωνίας.



Σχ. 273.

Ἔστω $\widehat{BA\Delta} - \widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Gamma A\Delta} = 1$ ὀρθὴ γωνία.

Ἔχομεν: $2\mu - 2\nu = 1$ ὀρθὴ γωνία.

ἄρα: $\mu - \nu = \frac{1}{2}$ ὀρθῆς γωνίας

ἢ $\widehat{EAZ} = \mu - \nu = \frac{1}{2}$ ὀρθῆς γωνίας.

Θεώρημα 4

406. Αἱ διχοτόμοι δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

407. Ἐὰν αἱ διχοτόμοι δύο ἴσων καὶ μὲ κοινὴν κορυφὴν γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι κατὰ κορυφήν.

Θεώρημα 4—Ι

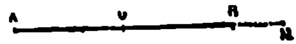
408. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται, αἱ διχοτόμοι τῶν σχηματιζομένων τεσσάρων γωνιῶν εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

Θεώρημα 5

409. Ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου εὐθυγράμμου τμήματος ἀπὸ τυχόντος σημείου τῆς προεκτάσεώς του, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου ἀπὸ τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος.

Ἔστω O τὸ μέσον καὶ M τὸ τυχὸν σημεῖον. Ἐπειδὴ

$$MA = MO + OA$$



Σχ. 274.

καὶ $MB = MO - BO$,

διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

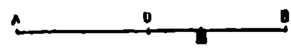
$$MA + MB = 2.MO,$$

ἢ $$MO = \frac{1}{2}(MA + MB).$$

Θεώρημα 5—I

410. Ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου εὐθυγράμμου τμήματος ἀπὸ τυχόντος σημείου αὐτοῦ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου ἀπὸ τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος.

Ἐπειδὴ πάλιν



Σχ. 275.

$$MA = MO + OA$$

καὶ $MB = OB - OM$,

δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$MA - MB = 2.MO$$

ἢ $$MO = \frac{1}{2}(MA - MB).$$

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ σημεῖον M εὑρίσκεται εἰς τὸ O, ἡ ἀπόστασις MO εἶναι μηδὲν καὶ ἡ διαφορὰ MA — MB ἐπίσης μηδέν. Ἐὰν τὸ M ἔλθῃ εἰς τὸ B, ἡ ἀπόστασις MB εἶναι ἐκείνη ἥτις μηδενίζεται καὶ θὰ εἶναι πάλιν $MO = \frac{1}{2}(MA - MB)$.

411. Διερεύνησις. Διὰ νὰ διατυπώσωμεν τ' ἀνωτέρω εἰς γενικὸν τύπον, ἂς παραστήσωμεν διὰ τῶν α καὶ β τὰς ἀποστάσεις AM, BM καὶ διὰ μ τὴν ἀπόστασιν OM. Ἂν λ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τμήματος AB, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:



Σχ. 276.

$$\mu = \alpha - \lambda$$
$$\mu = \quad + \lambda$$

καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τὴν

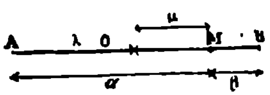
$$2\mu = \alpha + \beta,$$

ἢ $$\mu = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Ὁ τύπος αὐτὸς εἶναι γενικὸς καὶ ἐφαρμόζεται διὰ πᾶσαν θέσιν τοῦ M ἐπὶ τῆς εὐθείας AB, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅμως τῆς παραδοχῆς τῆς ἑπομένης συμφωνίας:

412. ***Συμφωνία διὰ τὰ σημεῖα τῶν ἀποστάσεων.*** Ἓν κινητὸν σημεῖον δύναται νὰ διαγράψῃ μίαν εὐθεῖαν κινούμενον κατὰ δύο διαφόρους διευθύνσεις, ἢ φοράς, ἐπ' αὐτῆς. Τὰ μήκη τμημάτων ἐπὶ τῆς εὐθείας, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν διαγραφόμενα κατὰ μίαν ὡρισμένην ἐκ τῶν δύο αὐτῶν διευθύνσεων, λ. χ. *τὴν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά*, θὰ θεωροῦνται ὡς θετικά, ἀρνητικὰ δὲ ἐὰν θεωρηθοῦν διαγραφόμενα κατὰ τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν.

Οὕτω, ἐὰν αἱ ἀποστάσεις AM, OM, BM (Σχ. 276) θεωρηθοῦν ὡς θετικαί, ἐπειδὴ αἱ διευθύνσεις ἐκ τοῦ A πρὸς M κλπ. εἶναι ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, θὰ πρέπει νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀρνητικὰς τὰς ἀποστάσεις MA, MB, MO.



Σχ. 277.

Κατὰ τὴν συμφωνίαν αὐτὴν θὰ γράψωμεν:

$$AM = -MA,$$

ἀφοῦ τὰ δύο αὐτὰ μήκη ἔχουν τὴν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμὴν ἀλλὰ θεωροῦνται διαγραφόμενα κατ' ἀντιθέτους φοράς.

Δευτέρα περίπτωσις. Ἐὰν τὸ σημεῖον M εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ τμήματος AB, δυνάμεθα πάλιν νὰ γράψωμεν

$$\mu = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Πράγματι, ὡς εἴδομεν (§ 410), εἶναι

$$OM = \frac{1}{2}(AM - BM).$$

Ἀλλ' ἂν θεωρήσωμεν τὰς ἀποστάσεις OM, AM ὡς θετικὰ ποσά, τὸ BM, ἀντιθέτου φορᾶς πρὸς τὰ δύο πρῶτα, θὰ πρέπει νὰ ληφθῇ ὡς ἀρνητικόν. Ὁ τύπος, ἑπομένως

$$\mu = \frac{1}{2}(\alpha + \beta),$$

ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, λογιζομένου ὅμως τοῦ ἀριθμοῦ β ὡς ἀρνητικοῦ.

Οὕτω φθάνομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον *γενικὸν* θεώρημα:

Θεώρημα 5—II

413. Ὅταν τρία σημεῖα A, B, M, εὑρίσκωνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, ἡ ἀπόστασις τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἀπὸ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰ δύο ἄλλα σημεῖα, εἶναι ὁ μέσος ἀριθμητικὸς τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων σημείων.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ συμπίπτουν τὰ δύο ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα, θὰ πρέπει οἱ ἀριθμοὶ α ἢ β νὰ εἶναι μηδέν.

Ὁ ἀριθμὸς μ μηδενίζεται ὅταν τὸ σημεῖον M εἶναι τὸ μέσον O τοῦ τμήματος AB· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα α + β εἶναι ἐπίσης μηδέν.

Ἐπειδὴ τότε

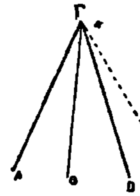
$$OM = 0 = \frac{1}{2}(OA + OB)$$

καὶ τὰ δύο μήκη OA, OB ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν ἀλλ' ἀντίθετα σημεῖα.

Ἡ ἀνωτέρω διερεύνησις ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν ἑπομένην ἄσκησιν.

Θεώρημα Θ

414. Ἡ γωνία τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας πρὸς τυχοῦσαν εὐθεῖαν, διὰ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ἀγομένης καὶ ἐκτὸς αὐτῆς κειμένης, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν γωνιῶν, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῆς εὐθείας αὐτῆς καὶ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας.



Σχ. 278.

Ἔστωσαν ΓΟ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΓΒ καὶ ΓΜ τυχοῦσα εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς γωνίας αὐτῆς κειμένη. Θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{M\Gamma A} + \widehat{M\Gamma B} = 2.\widehat{M\Gamma O}$$

ἢ

$$\widehat{M\Gamma O} = \frac{1}{2}(\widehat{M\Gamma A} + \widehat{M\Gamma B}).$$

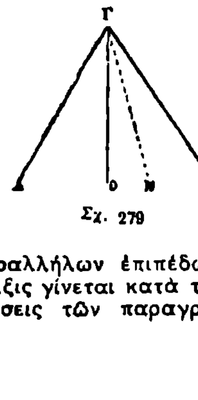
Θεώρημα Θ—Ι

415. Ἡ γωνία τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας πρὸς τυχοῦσαν εὐθεῖαν, διὰ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ἀγομένης καὶ ἐντὸς αὐτῆς κειμένης, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῆς εὐθείας αὐτῆς καὶ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας.

Ἔστωσαν ΓΟ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΓΒ καὶ ΓΜ τυχοῦσα εὐθεῖα ἐντὸς τῆς γωνίας αὐτῆς κειμένη.
Θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{M\Gamma A} - \widehat{M\Gamma B} = 2.\widehat{M\Gamma O}$$

$$\widehat{M\Gamma O} = \frac{1}{2}(\widehat{M\Gamma A} - \widehat{M\Gamma B}).$$



Σχ. 279

Ἐπεκτάσεις. Ἀνάλογα θεωρήματα εὑρίσκομεν διὰ κυκλικὰ τόξα καὶ κυκλικοὺς τομεῖς. Ἐπίσης διὰ σφαιρικοὺς ἀτράκτους καὶ σφαιρικοὺς ὄνυχας περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον καθὼς καὶ διὰ ζώνας μιᾶς σφαίρας, τὰς ὁριζομένας ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων.

Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις αὐτάς, ἡ ἀπόδειξις γίνεται κατὰ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον, ὅπως καὶ εἰς τὰς ἀσκήσεις τῶν παραγράφων 409, 410 καὶ 413.

Κάθετοι καὶ πλάγιαι

416. Θὰ ἀρκεσθῶμεν εἰς ἕνα μικρὸν ἀριθμὸν σχετικῶν ἀσκήσεων, ἐπειδὴ τὰς περισσοτέρας τῶν συνεπειῶν τοῦ θεωρήματος ἐπὶ τῶν καθέτων καὶ πλαγίων εἶναι προτιμώτερον νὰ πορίζόμεθα ἐκ τῶν θεωρημάτων ἐπὶ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων.

417. *Μέθοδος ἀναστροφῆς*. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι *δύο πλάγιαι τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἄνισον ἀπέχουν ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι*, ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τῆς *ἀναστροφῆς* (G., n° 38, 2)). Ἡ πολὺ ἁπλῆ αὐτὴ μέθοδος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εἰδικὴ περίπτωσις τῆς *ἐπιθέσεως*, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦμεν, συνήθως, διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν δύο πρώτων περιπτώσεων ἰσότητος δύο τριγώνων.

Θεώρημα 7

418. Δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἴσον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετὰ τῆς καθέτου καὶ τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς οἱ πόδες των.

Θεώρημα 7—I

419. Δύο πλάγιαι εἶναι ἴσαι:

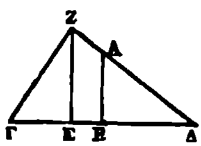
1) *Ἐὰν ἡ κάθετος εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας των.*
2) *Ἐὰν οἱ πόδες των ἴσον ἀπέχουν τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου.*
3) *Ἐαν σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετὰ τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς οἱ πόδες των.*

Θεώρημα 7—II

420. Πᾶσα κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον μιᾶς γωνίας τέμνει τὰς πλευρὰς αὐτῆς εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς κορυφῆς. Τὸ μέσον δὲ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τμήματος τῆς καθέτου κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου.

Θεώρημα 8

421. Νὰ δειχθῇ ἀπ' εὐθείας ὅτι, αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν ἄκρων τμήματος παντὸς σημείου εὑρισκομένου ἐκτὸς τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος τούτου, εἶναι ἄνισοι.



Σχ. 280.

Ἡ ἑπομένη ἀπόδειξις εἶναι πολὺ ἁπλῆ. Ἔστω Ζ τὸ σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου ΑΒ εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ.

Ἐὰν ἐκ τοῦ Ζ φέρωμεν κάθετον ΖΕ ἐπὶ τὴν ΓΔ, ὁ πούς Ε εἶναι διάφορος τοῦ σημείου Β· ἐπειδή, ἄλλως, θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Β=Ε. Αἱ ἀποστάσεις λοιπὸν ΓΕ, ΔΕ εἶναι ἄνισοι, ἄρα καὶ αἱ πλάγιαι ΖΓ, ΖΔ εἶναι ἐπίσης ἄνισοι.

Θεώρημα 9

422. Ἐὰν ἐκ σημείου Α, ἐκτὸς εὐθείας ΜΝ κειμένου, φέρωμεν ἐπ' αὐτὴν τὴν κάθετον ΑΒ καὶ πλαγίας ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ τῶν ὁποίων (πλαγίων) τὰ μήκη νὰ εὑρίσκωνται κατ' ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἡ ἀπόστασις ΓΔ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀποστάσεως ΔΕ. (N. A. 1846, σ. 448, Huet, σ. 47', Dormoy).

Κατὰ τὰ δεδομένα εἶναι:

$$ΑΕ - ΑΔ = ΑΔ - ΑΓ$$

ἢ

$$ΑΕ + ΑΓ = 2ΑΔ.$$

Προεκτείνομεν τὴν ΑΔ εἰς ἴσον μῆκος ΔΘ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΜΝ τμῆμα ΔΗ = ΓΔ καὶ φέρομεν τὴν ΘΗ.

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΗ > ΑΕ· ἐπειδὴ τότε θὰ εἶναι ΒΗ > ΒΕ ἢ

$$ΒΗ = ΒΔ + ΔΗ = ΒΔ + ΔΓ > ΒΕ = ΒΔ + ΔΕ$$

δηλ. $ΔΓ > ΔΕ$.

Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΔΓ, ΗΔΘ, θὰ ἔχωμεν:

$$ΗΘ = ΑΓ·$$

Ἀλλὰ

$$ΑΗ + ΗΘ > ΑΘ·$$

ἢ

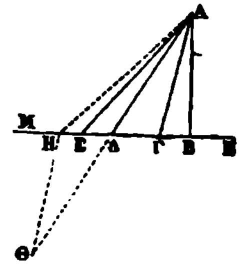
$$ΑΗ + ΑΓ > ΑΘ·$$

καὶ ἐπειδὴ

$$ΑΕ + ΑΓ = 2ΑΔ = ΑΘ,$$

ἕπεται:

$$ΑΗ > ΑΕ.$$



Σχ. 281.

Παράλληλοι

423. Ἡ θεωρία τῶν παραλλήλων παρέχει τὰ ἑπόμενα δύο θεμελειώδη θεωρήματα, χρησιμεύοντα διὰ τὴν λύσιν πολλῶν ἀσκήσεων:

Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι, τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης εὐθείας, σχηματίζουν μετ' αὐτῆς γωνίας ἐντὸς ἐναλλὰξ καὶ ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας.

Παράλληλα τμήματα μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ἴσα· εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι ἡ πρότασις, καθ' ἣν *κάθετα τμήματα μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ἴσα.*

Πολλαὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν τριγώνων δύνανται νὰ ἀποδειχθοῦν καὶ ἄνευ τῆς ἐννοίας τῶν παραλλήλων· ἀλλ' ἡ τάξις τὴν ὁποίαν θὰ ἀκολουθήσωμεν θὰ μᾶς ἐπιτρέψῃ νὰ συγκεντρώσωμεν εἰς μίαν ὁμάδα μέγαν ἀριθμὸν προτάσεων σχετικῶν πρὸς τὸ τρίγωνον.

424. ***Τὸ αἴτημα.*** Παρὰ τὰς προσπαθείας τῶν μεγαλυτέρων γεωμετρῶν, τὰ *Στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας* δὲν ἠδυνήθησαν ν' ἀπαλλαγοῦν διὰ τὴν θεμελίωσιν τῆς θεωρίας τῶν παραλλήλων τῆς ἀνάγκης ἑνὸς *αἰτήματος*. Τὸ αἴτημα τοῦτο—τοῦ Εὐκλείδου—εἶναι τὸ ἀκόλουθον:

Δύο εὐθεῖαι τέμνονται ἐάν, τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης, σχηματίζουν μετ' αὐτῆς γωνίας ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη μὴ παραπληρωματικάς.

Εἰς πλεῖστα τῶν νεωτέρων συγγραμμάτων ἀναφέρεται τὸ ἑπόμενον *αἴτημα*, προταθὲν ὑπὸ τοῦ Gergonne (εἰς τὰ Annales de Mathématiques, tome III, 1812 - 1813 σ. 353, Θεωρ. 4):

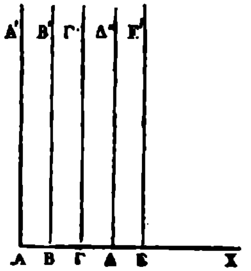
Ἐξ ἑνὸς σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου, δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν παρὰ μίαν μόνον παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην.

Ἀπόδειξις. Διὰ τὴν ἔκθεσιν τῆς θεωρίας τῶν παραλλήλων χωρὶς τὴν βοήθειαν αἰτήματος, πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἀπειροστικὰς μεθόδους καὶ αἱ ὁποῖαι φυσικὰ δὲν ἔχουν θέσιν εἰς τὰς ἀρχὰς τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας. Ἡ ἀπόδειξις ἡ συχνότερον ἀναφερομένη εἶναι τοῦ Bertrand. Ὁ γεωμέτρης οὗτος θεωρεῖ τὸν ἐπίπεδον ἀπεριόριστον χῶρον, τὸν περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευ-

ρῶν μιᾶς γωνίας καὶ χρησιμοποιεῖ *ἀπεράτους ταινίας*, ἤδη θεωρηθείσας ἐνωρίτερον ὑπὸ τοῦ A. Arnauld εἰς τὸ ἔργον του *Nouveaux Élements de Géométrie* ἐκδοθὲν τὸ 1667:

I.—Λῆμμα

425. Ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ΑΧ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ΧΑΑ′, λαμβάνομεν μήκη ἴσα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ... καὶ διὰ τῶν σημείων διαιρέσεως φέρομεν καθέτους ΒΒ′, ΓΓ′... ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΧ. Αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι ταινίαι Α′ΑΒΒ′... εἶναι ἀπεριόριστοι κατὰ τὴν φορὰν ΑΑ′. Εἶναι ὅμως ἀδύνατον νὰ καλύψουν ὁλόκληρον τὸν γωνιακὸν χῶρον ΧΑΑ′, ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν ληφθῇ ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν.

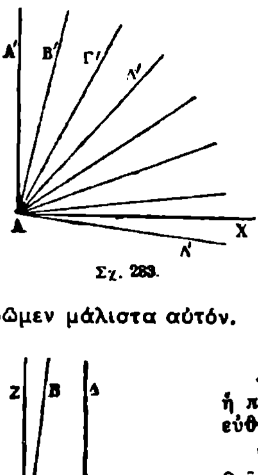


Σχ. 282.

Πράγματι, αἱ ταινίαι αὗται εἶναι ἀπεριόριστοι κατὰ τὴν φορὰν ΑΑ′. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἓν πεπερασμένον πλῆθος μηκῶν, ὡς τὸ ΑΒ, δὲν δύναται οὐδέποτε νὰ καλύψῃ τὴν ἀπεριόριστον πρὸς τὰ δεξιὰ εὐθεῖαν ΑΧ, ἕπεται ὅτι αἱ ταινίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΑΑ′, ΒΒ′... δὲν δύνανται νὰ καλύψουν τελείως τὸν γωνιακὸν χῶρον ΧΑΑ′.

II.—Λῆμμα

426. Μία γωνία Α′ΑΒ′, ὁσονδήποτε μικρὰ καὶ ἂν ὑποτεθῇ, δύναται, ἐπαναλαμβανομένη διαδοχικῶς, νὰ καλύψῃ τελείως τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΧΑΑ′.

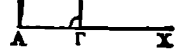


Σχ. 283.

Πράγματι ἐπειδὴ τὰ εἰς σύγκρισιν ποσὰ Α′ΑΧ καὶ Α′ΑΒ′ εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους, εἶναι προφανὲς ὅτι ἐπαναλαμβάνοντες τὴν γωνίαν Α′ΑΒ′, ἐπαρκεῖς τὸ πλῆθος φοράς, δυνάμεθα νὰ καλύψωμεν τὸν χῶρον Α′ΑΧ καὶ νὰ ὑπερβῶμεν μάλιστα αὐτόν.

III.—Θεώρημα

427. Δύο εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΑΒ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη εἶναι κάθετος καὶ ἡ ἄλλη πλαγία πρὸς εὐθεῖαν ΑΧ, ἀναγκαίως τέμνονται.



Σχ. 284.

Ἔστω ΑΖ ἡ κάθετος εἰς τὸ Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΧ. Αἱ δύο κάθετοι ΑΖ καὶ ΓΔ ἀποτελοῦν ταινίαν, ἐντὸς τῆς ὁποίας δὲν δύναται νὰ περιέχεται ὁ ἀπέρατος γωνιακὸς χῶρος ΖΑΒ· Διότι, ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, καὶ δεδομένου ὅτι ἕνας πεπερασμένος ἀριθμὸς γωνιακῶν χώρων, ὡς ὁ ΖΑΒ, καλύπτει τὸν χῶρον ΖΑΧ (ΙΙ Λῆμμα), θὰ ἔπρεπε ὅπως εἷς, τὸ πολὺ ἴσος, ἀριθμὸς ταινιῶν ὡς ἡ ΖΑΓΔ, νὰ ἐκάλυπτε τὸν αὐτὸν χῶρον. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον κατὰ τὸ Ι Λῆμμα.

'Επειδὴ λοιπὸν δὲν δύναται νὰ περιέχεται ὁ χῶρος ΖΑΒ ἐντὸς τῆς ταινίας ΖΑΓΔ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κοινὴ τῶν δύο τούτων χώρων, θὰ πρέπει τμῆμα τοῦ χώρου ΖΑΒ νὰ εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς ταινίας ΖΑΓΔ. Ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΑΒ νὰ τέμνῃ τὴν ΓΔ.

428. Σημειώσεις. 1) Εἶναι εὐκολώτερον νὰ διίδῃ τις ἢ νὰ ἐκφράσῃ τὰ πολλὰ παράδοξα καὶ ἀσυμβίβαστα τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως.

Συγκρίνονται λ. χ. χῶροι ἀπεριόριστοι, ὅπως μία γωνία καὶ μία ταινία, καὶ τοὺς ὁποίους δὲν δυνάμεθα νὰ ἐπιθέσωμεν ἐπ' ἀλλήλων.

Ἂν εἶναι ἀληθὲς τὸ λεγόμενον ὅτι τὰ *αἰτήματα* δὲν ἱκανοποιοῦν πλήρως τὸ πνεῦμα, τὸ ἴδιον θὰ ἠδύνατο νὰ λεχθῇ καὶ δι' ὡρισμένας «ἀποδείξεις».

Ὁ Terquem διετύπωσεν σοβαρὰς ἀντιρρήσεις ἐπὶ τῆς προηγουμένης ἀποδείξεως (N. A. 1845, σ. 549 καὶ 550.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ αἰτήματος, τὴν ὁποίαν δίδει ὁ Legendre εἰς τὸ Συμπλήρωμα τοῦ ἔργου του *Éléments de Géométrie*, δὲν ἀντέχει ἐπίσης εἰς αὐστηρὰν κριτικήν.

2) Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας, *χωρὶς τὴν βοήθειαν τῶν παραλλήλων*, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τριγώνου εἶναι δύο ὀρθαί, ἐὰν ἀποδεχθῶμεν τοὺς ὁρισμοὺς καὶ τοὺς συλλογισμοὺς τοῦ *Bertrand* (An. de Gergonne, tome III, 1812 - 1813, p. p. 355,356) καθὼς καὶ N. A. 1942, p. p. 210, 213, ἄρθρου τοῦ Terquem).

3) Ὀνομάζονται *μὴ Εὐκλείδειοι Γεωμετρίαι*, αἱ Γεωμετρίαι αἱ μὴ ἀποδεχόμεναι τὸ αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου. Ἡ πρώτη τούτων ὀφείλεται εἰς τὸν Lobatchefsky, ρῶσον γεωμέτρην (1793 - 1856)· σύνοψιν αὐτῆς εὑρίσκει τις εἰς τὸ *Appendice du Traité de Géométrie* τῶν Rouché καὶ Comberousse.

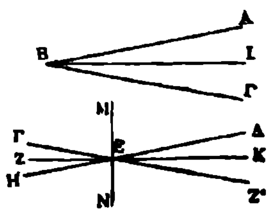
Ἡ Γεωμετρία τοῦ Riemann (1826 - 1866) δὲν ἀποδέχεται ἐπίσης τὸ αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου (βλ. *Mathesis*, 1894, p. 180, ἄρθρον τοῦ Mansion).

Ὡς ἀντιστάθμισμα τῶν ἐγκωμιαζουσῶν τὰς *μὴ Εὐκλειδείους Γεωμετρίας* μελετῶν, δύναταί τις νὰ ἀναγνώσῃ ἄρθρα τῶν de Commines de Marcilly καὶ Frolow (A. F. 1889, p. 88 καὶ 1904, p. 88).

Εἰς τὸ ἔργον τοῦ G. Lechalas: *Etude sur l'Espace et le Temps* (2e édition, 1909), εὑρίσκονται ἐνδιαφέρουσαι παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδου καὶ τῆς *Γενικῆς Γεωμετρίας* (Κεφ. III καὶ IV).

Θεώρημα 10

429. *Ἐὰν αἱ πλευραὶ δύο γωνιῶν εἶναι παράλληλοι, αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι παράλληλοι ἢ κάθετοι εὐθεῖαι.*



Σχ. 285.

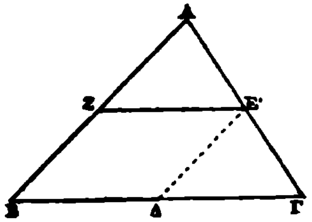
Ἐὰν αἱ γωνίαι αὐταί, ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, εἶναι ἀμφότεραι ὀξεῖαι ἢ ἀμφότεραι ἀμβλεῖαι, θὰ εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἡμίση των ἐπίσης *ἴσα*. Ὥστε...

Αἱ δὲ γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΓ εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ἡ διχοτόμος ΜΝ τῆς δευτέρας, οὖσα κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΕΚ τῆς ΔΕΖ', θὰ εἶναι κάθετος ἐπίσης καὶ ἐπὶ τήν, παράλληλον πρὸς αὐτήν, διχοτόμον ΒΙ τῆς πρώτης.

430. Ἐὰν αἱ πλευραὶ δύο γωνιῶν εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι εὐθεῖαι, αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι κάθετοι ἢ παράλληλοι εὐθεῖαι.

Θεώρημα 11

431. Ἡ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν τριγώνου, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ἄλλης πλευρᾶς.



Σχ. 286.

Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν τρίγωνον. Διὰ τοῦ μέσου Ζ τῆς ΑΒ φέρομεν τὴν ΖΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τὴν ΕΔ παράλληλον τῆς ΑΒ.

Τὸ σχῆμα ΖΒΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἄρα ΖΕ = ΒΔ καὶ ΖΒ = ΕΔ.

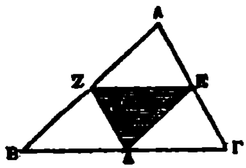
Τὰ δὲ τρίγωνα ΑΖΕ καὶ ΕΔΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας· ἄρα

ΑΖ = ΕΔ = ΖΒ καὶ ΒΔ = ΖΕ = ΔΓ.

Ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΖΕ συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ.

Θεώρημα 11—I

432. Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, διαιροῦν αὐτὸ εἰς τέσσαρα τρίγωνα ἴσα.

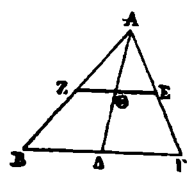


Σχ. 287.

Ἔστωσαν Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ. Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΔΕ, ΕΖ, ΖΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς πρὸς ἣν εἶναι παράλληλος, τὰ τέσσαρα σχηματιζόμενα τρίγωνα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των, ἀνὰ δύο, ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

Παρατήρησις. Ἀναφορικῶς πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ὀνομάζεται *διάμεσον (médian) τρίγωνον* ἢ *συμπληρωματικὸν* (βλ. ἐπ. § 434 α).

Θεώρημα 12



Σχ. 288.

433. Ἡ διάμεσος ἐπί τινα πλευρὰν τριγώνου τέμνει εἰς δύο ἴσα τμήματα τὴν εὐθεῖαν, τὴν συνδέουσαν τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

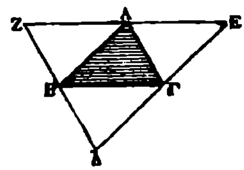
Ὡς εἴδομεν (§ 431), ἡ εὐθεῖα ΖΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Ἡ δὲ εὐθεῖα ΖΘ, διερχομένη διὰ τοῦ μέσου Ζ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου Θ τῆς ἄλλης πλευρᾶς του ΑΔ καὶ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως ΒΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ ΘΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΔΓ. Ἄρα ΖΘ=ΘΕ καὶ τὸ σημεῖον Θ εἶναι μέσον τῆς διαμέσου ΑΔ καὶ τοῦ τμήματος ΖΕ.

2α Ἀπόδειξις. Τὸ σχῆμα ΑΖΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμον (§ 432), ἔχον ὡς διαγωνίους τὰς ΑΔ καὶ ΖΕ. Ἄρα

$$ΑΘ = ΘΔ \quad \text{καὶ} \quad ΖΘ = ΘΕ.$$

Θεώρημα 13

434. **Αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τριγώνου, αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ἀγόμεναι, σχηματίζουν τρίγωνον ἔχον τὰς κορυφὰς τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου ὡς μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**



Σχ. 289.

Ἔστωσαν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ τὰ τρίγωνα ταῦτα. Ἕνεκα τῶν τριῶν παραλληλογράμμων ΑΓΒΖ, ΑΒΓΕ καὶ ΑΓΔΒ, θὰ ἔχωμεν

$$ΖΒ = ΑΓ = ΒΔ, \quad ΑΕ = ΒΓ = ΑΖ,$$
$$ΓΔ = ΑΒ = ΓΕ.$$

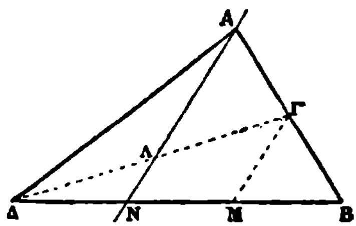
Τὰ σημεῖα δηλ. Α, Β, Γ, εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ δευτέρου τριγώνου.

Παρατήρησις. Τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων τριγώνων, ἴσων πρὸς τὸ ἀρχικὸν ΑΒΓ.

434 α. ***Σημείωσις.*** Ἀναφορικῶς πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ὀνομάζεται *ἀντισυμπληρωματικὸν τρίγωνον*. Οἱ ὅροι *συμπληρωματικὸν* καὶ *ἀντισυμπληρωματικὸν τρίγωνον* ὀφείλονται εἰς τὸν Neuberg.

Θεώρημα 13—I

435. **Ἡ εὐθεῖα ΑΛΝ, ἡ συνδέουσα μίαν κορυφὴν Α ἑνὸς τριγώνου ΑΔΒ μετὰ τοῦ μέσου Λ τῆς διαμέσου πρός τινα τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ, διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΔ εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.**



Σχ. 290.

Διὰ τοῦ μέσου Γ τῆς ΑΒ φέρομεν τὴν ΓΜ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΝ. Ἐπειδὴ ἡ ΓΜ ἄγεται ἐκ τοῦ μέσου Γ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ ΑΒΝ τριγώνου καὶ παραλλήλως πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΑΝ, θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου Μ τῆς τρίτης πλευρᾶς ΝΒ, ἢ

$$ΝΜ = ΜΒ.$$

Διὰ τὸν ἴδιον λόγον, ἀφοῦ τὸ σημεῖον Λ εἶναι μέσον τῆς πλευρᾶς ΔΓ τοῦ τριγώνου ΔΓΜ, θὰ ἔχωμεν ΔΝ = ΝΜ. Ἐπομένως

$$ΔΝ = ΝΜ = ΜΒ \quad \text{καὶ} \quad ΔΝ = \frac{ΒΝ}{2}.$$

Παρατήρησις. Εἶναι: $ΛΝ = \frac{ΓΜ}{2} = \frac{ΑΝ}{4}.$

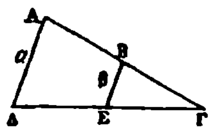
Θεώρημα 14

436. Διὰ τῶν ἄκρων Α, Γ καὶ τοῦ μέσου Β ἑνὸς τμήματος ΑΒΓ, φέρομεν παράλληλα τμήματα περατούμενα εἰς ἄλλην εὐθεῖαν ΔΕΖ. Δείξατε ὅτι τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΒΕ εἶναι τὸ ἀλγεβρικὸν ἡμιάθροισμα τῶν μηκῶν τῶν δύο ἄλλων παραλλήλων τμημάτων.

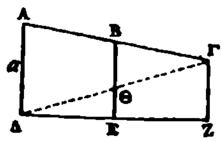
Ἂς παραστήσωμεν διὰ τῶν α, β, γ, τὰ τρία μήκη.
Θὰ διακρίνωμεν τρεῖς περιπτώσεις.

1η Περίπτωσις. Τὰ τμήματα ΑΓ *καὶ* ΔΓ *ἔχουν κοινὸν ἄκρον* (Σχ. 291).
Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Β τῆς πλευρᾶς του ΓΑ, θὰ εἶναι ΒΕ $= \frac{1}{2}$ ΑΔ. Ἄρα (§ 431)

$$\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma),$$



Σχ. 291.

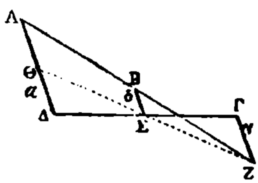


Σχ. 292.

2α Περίπτωσις. Τὰ τμήματα ΑΓ *καὶ* ΔΖ *δὲν τέμνονται* (Σχ. 292).
Ἡ ΒΕ εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ σχηματιζομένου τραπεζίου καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του. Κατὰ τὴν πρώτην ἄλλωστε περίπτωσιν, θὰ εἶναι

$$\text{ΒΘ} = \frac{\alpha}{2}, \quad \text{ΘΕ} = \frac{\gamma}{2} \cdot \text{ ὥστε } \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

3η Περίπτωσις. Τὰ τμήματα ΑΖ *καὶ* ΔΓ *τέμνονται, ἔστω* εἰς Ε (Σχ. 293).



Σχ. 293.

Ἂς φέρωμεν τὴν ΖΕΘ. Θὰ ἔχωμεν

$$\text{ΒΕ} = \frac{1}{2}\text{ΑΘ}, \quad \text{ΔΘ} = \text{ΓΖ}$$

ἄρα

$$\beta = \frac{1}{2}(\text{ΑΔ} - \text{ΓΖ})$$

ἢ καὶ

$$\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma),$$

θεωροῦντες τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΓΖ, ἀντιθέτου φορᾶς πρὸς τὴν τοῦ ΑΔ, ὡς ἀρνητικόν,

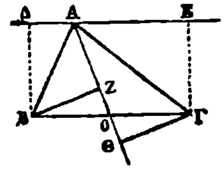
$$\text{ΓΖ} = -\,\text{ΖΓ} = \gamma,$$

διὰ νὰ ἔχωμεν ἕνα ἑνιαίας μορφῆς τύπον καὶ διὰ τὰς τρεῖς περιπτώσεις.

Παρατήρησις. Εἰς μέγαν ἀριθμὸν ζητημάτων, ἡ ἀποδοχὴ τῆς συμφωνίας διὰ τὰ σημεῖα (§ 412) εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὴν ἰσχὺν τοῦ γενικοῦ τύπου τῆς ἐκφωνήσεως.

Θεώρημα 15

437. Εἰς πᾶν τρίγωνον, ἑκάστη διάμεσος ἴσον ἀπέχει τῶν δύο ἄλλων κορυφῶν.



Σχ. 294.

Ἔστω ΑΟ ἡ διάμεσος ἐκ τῆς κορυφῆς Α. Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΖΟ καὶ ΓΘΟ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν γωνιῶν ἴσην, ἕπεται ΒΖ = ΓΘ.

Θεώρημα 15—Ι

438. Εἰς πᾶν τρίγωνον, μία κορυφὴ καὶ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ἴσον ἀπέχουν τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν. Τὰ δὲ μέσα ταῦτα ἴσον ἐπίσης ἀπέχουν τῆς πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν διαμέσου.

Τρεῖς εὐθεῖαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου

439. Εἰς ἓν ἀρκετὰ μέγα πλῆθος περιπτώσεων, εὑρισκόμεθα εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τρεῖς ὡρισμέναι εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

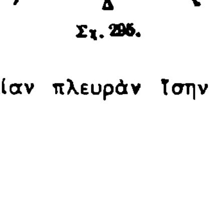
Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν δυνάμεθα νὰ ἐργαζώμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον τομῆς δύο ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν καὶ καθορίσωμεν τὰς ἰδιότητας τῆς θέσεώς του, ἀποδεικνύομεν ὅτι τοῦτο ὀφείλει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς τρίτης εὐθείας (*Παραδείγματα*, §§ 443, 444). Ἢ, ἐπίσης, διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου δύο ἐκ τῶν εὐθειῶν φέρομεν εὐθεῖαν πληροῦσαν ὡρισμένας συνθήκας, ὑπαγορευομένας ἐκ τῶν δεδομένων, καὶ ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα αὕτη ἔχει πάσας τὰς ἰδιότητας τὰς χαρακτηριζούσας τὴν τρίτην εὐθεῖαν (*Παραδείγματα*, §§ 440, 441).

Μὲ ἄλλους λόγους, ἐπιζητοῦμεν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον δύο ἐκ τῶν εὐθειῶν ἀνήκει εἰς τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων τὸν ὁποῖον συνιστᾷ ἡ τρίτη εὐθεῖα.

Θεώρημα 16

440. Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς γωνίας, εἰς σημεῖα ἴσον ἀπέχοντα τῆς κορυφῆς, τέμνονται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.



Σχ. 295.

Ἔστω ΑΒ = ΑΓ καὶ Δ ἡ τομὴ τῶν καθέτων εἰς τὰ Β καὶ Γ.

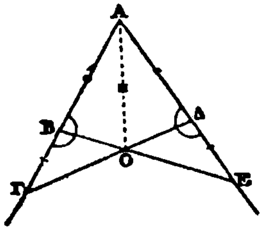
Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΔ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα κοινὴν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΔ καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, ΑΒ = ΑΓ. Εἶναι ἄρα ἴσα καὶ συνεπῶς:

$$\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΔΑΓ}.$$

Θεώρημα 17

441. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας Α λαμβάνομεν μήκη ΑΒ = ΑΔ καὶ ΑΓ = ΑΕ. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΕ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι καὶ τέμνονται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.

Φέρομεν τὴν ΑΟ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα κοινὴν τὴν γωνίαν Α καὶ ἴσας τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευράς.



Σχ. 296.

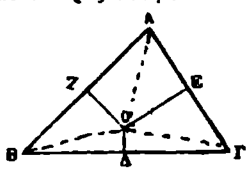
Ἄρα ΒΕ = ΓΔ καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{E}$.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι ΓΒΟ καὶ ΕΔΟ εἶναι ἐπίσης ἴσαι, ὡς παραπληρωματικαὶ ἴσων γωνιῶν καὶ τὰ τρίγωνα ΒΟΓ καὶ ΔΟΕ θα εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΔΕ ἴσας καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὰς γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως. Ἄρα ΟΓ = ΟΕ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὰ τρίγωνα ΑΟΓ καὶ ΑΟΕ ἀποδεικνύονται ἴσα, ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

Ἤτοι $O\widehat{A}\Gamma = O\widehat{A}E$.

Θεώρημα 17—1

442. Δύο εὐθεῖαι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν γωνίας, ὡς αἱ ΒΕ καὶ ΓΔ, εἶναι ἴσαι ἐὰν τέμνωνται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας καὶ εἶναι ἴσον κεκλιμέναι πρὸς αὐτήν.



Σχ. 297.

Θεώρημα 18

443. Αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν τριῶν κορυφῶν.

Σημείωσις. Τὰς καθέτους ταύτας ὁ Neuberg ἐκάλεσεν *μεσοκαθέτους* (39) *(médiatrices)* τοῦ τριγώνου.

Θεώρημα 19

444. Αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἴσον ἀπέχον τῶν τριῶν πλευρῶν.

Θεώρημα 20

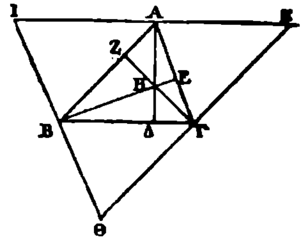
445. Τὰ τρία ὕψη τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. (Πέμπτον λῆμμα Ἀρχιμήδους).

Ἀπόδειξις τοῦ Gauss. Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν τρίγωνον. Διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς.

---

39. Ὅρος μᾶλλον ἐπικρατήσας.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΘΙΚ, τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (§ 434), τὰ δὲ ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν. Τέμνονται, ἑπομένως (§ 443), αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον. (Βλ. ἐπίσης § 1397 α).



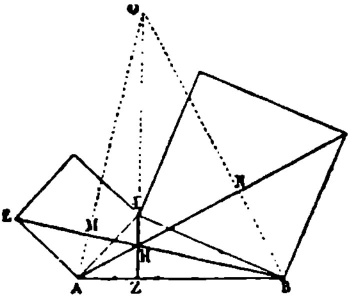
Σχ. 298

Θεώρημα 20—I

446. **Ἐπὶ δύο τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τετράγωνα πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν μέρος αὐτοῦ κείμενα (Σχ. 299). Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΕ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΓΖ τοῦ ἀγομένου ἐπὶ τὴν τρίτην πλευράν.**

Τὸ θεώρημα ἀποδεικνύεται ἐὰν δειχθῇ ὅτι αἱ κάθετοι ΑΜ, ΒΝ ἐπὶ τὰς ΒΕ καὶ ΑΔ ἀντιστοίχως τέμνονται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΓΖ. Διότι τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ θὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΟΒ.

Πρὸς τοῦτο, προεκτείνομεν τὴν ΑΜ μέχρι τῆς συναντήσεώς της Ο μετὰ τῆς ΖΓ. Παρατηροῦμεν ὅτι, τὰ τρίγωνα ΕΑΒ καὶ ΑΓΟ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουν τὰς πλευρὰς ΑΕ=ΑΓ καὶ τὰς γωνίας ΑΕΒ, ΕΑΒ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΓΑΟ, ΑΓΟ, ὡς ἐχούσας τὰς πλευρὰς των καθέτους. Ἄρα ΓΟ = ΑΒ.



Σχ. 299

Ἔστω τώρα Ο' τὸ σημεῖον τομῆς τοῦ ὕψους ΓΖ μετὰ τῆς εὐθείας ΒΝ. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον σκεπτόμενοι, θὰ εὕρωμεν Ο'Γ = ΑΒ = ΟΓ καὶ ἡ σχέσις αὐτὴ δεικνύει ὅτι τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο' συμπίπτουν. Ὥστε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

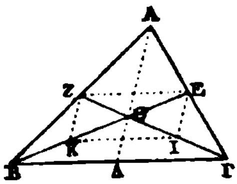
Σημείωσις. 1) Ἡ κομψὴ αὐτὴ ἀπόδειξις ἑνὸς ζητήματος γνωστοῦ ἤδη ἀπὸ τοῦ 1817, εὑρίσκεται εἰς J. d. M. Élém., τοῦ *Vuibert* (1879 - 1880, σ. 36). 2) Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, ἀλλὰ δι' *ὀρθογώνιον* τρίγωνον, προετάθη τὸ 1823 εἰς τὸ *Philosophical Magazine* καὶ ἀπεδείχθη ὑπὸ τοῦ *Gergonne* εἰς τὸν XIV τόμον τῶν Annales, σ. 334 καὶ 374. Ἐγενικεύθη δὲ ἀργότερον, εἰς τὸν XV τόμον, σ. 84, ὑπὸ τῶν *Gergonne* καὶ *Querret*. Τὸ ἴδιον θεώρημα ὑπὸ τὴν γενικήν του διατύπωσιν (§ 446), εὑρίσκεται εἰς τὸν VII τόμον τῶν Annales, (1816 - 1817, σ. 321) καὶ ἐδόθη ὑπὸ τοῦ *Vecten*, καθηγητοῦ τότε τῶν ειδικῶν μαθηματικῶν εἰς τὸ *Nîmes* καὶ πρώτου σπουδάσαντος τὸ σχῆμα, τὸ ἀποτελούμενον ἐξ ἑνὸς τριγώνου καὶ τῶν τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν του (βλ. ἐπμ. § 1773, λ ἕως ξ).

Θεώρημα 21

447. Αἱ διάμεσοι παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εὑρισκομένου εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους ἑκάστης διαμέσου ἀπὸ τῶν ἀντιστοίχων κορυφῶν.

Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν τρίγωνον καὶ Θ τὸ κοινὸν σημεῖον δύο διαμέσων, ΒΕ, ΓΖ αὐτοῦ.

Φέρομεν τὴν ΖΕ, παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς (§ 431), εἰς δὲ τὸ τρίγωνον ΒΘΓ φέρομεν τὴν ΙΚ διὰ τῶν μέσων Ι καὶ Κ τῶν πλευρῶν του ΘΓ καὶ ΘΒ.



Σχ. 300.

Ἐπειδὴ ἡ ΙΚ θὰ εἶναι ἐπίσης παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἴση πρὸ τὸ ἥμισύ της, τὸ σχῆμα ΕΖΚΙ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ τὸ σημεῖον Θ μέσον τῶν διαγωνίων του. Ὥστε

$$ΕΘ = ΘΚ = ΚΒ \quad καὶ \quad ΖΘ = ΘΙ = ΙΓ.$$

Ἐπειδὴ δὲ δύο τυχοῦσαι διάμεσοι τέμνονται εἰς τὰ $^2/_3$ τοῦ μήκους των ἀπὸ τῶν κορυφῶν, εἶναι φανερὸν ὅτι τὴν ἰδιότητα ταύτην θὰ ἔχῃ καὶ ἡ τρίτη διάμεσος καὶ θὰ διέρχεται ἐπομένως διὰ τοῦ σημείου Θ.

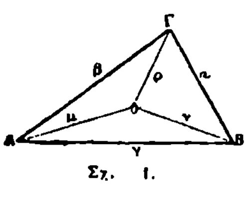
448. *Παρατήρησις.* Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις εἶναι πολὺ εὐφυὴς ἀλλ' ὀλίγον φυσική. Ἡ ἁπλουστέρα ἀπόδειξις δίδεται διὰ τοῦ ΙΙΙ Βιβλίου.

Τυχὸν τρίγωνον

449. Αἱ ἰδιότητες τοῦ τριγώνου (§§ 444 ἕως 448) εἶναι κυρίως ἰδιότητες θέσεως, ὡς λ. χ. ὅτι τὰ τρία ὕψη τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἐπίσης διὰ τὰς τρεῖς διαμεσους ἢ διχοτόμους κλπ. Μένει νὰ δείξωμεν τώρα καὶ ἰδιότητας σχέσεως.

Εἰς τὸ τρίγωνον ἔχομεν *σχέσεις γραμμικάς*, δηλαδὴ σχέσεις μηκῶν, καὶ *σχέσεις γωνιακάς*. Αἱ πρῶται ἀπαιτοῦν τὴν γνῶσιν μόνον τῶν ὁρισμῶν, τοῦ θεωρήματος τῶν πλαγίων καὶ τοῦ θεωρήματος: ***Ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.***

Αἱ γωνιακαὶ σχέσεις προκύπτουν ἐκ τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος: *Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθάς* καὶ · ἐκ τῶν πορισμάτων αὐτοῦ.



Σχ. 1.

Θεώρημα 22

450. Ἐὰν συνδέσωμεν δι' εὐθειῶν τυχὸν σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τριγώνου εὑρισκόμενον μετὰ τῶν τριῶν κορυφῶν, τὸ ἄθροισμα τῶν οὕτω ὁριζομένων τριῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, ἀπὸ τοῦ σημείου εἰς τὰς κορυφάς, περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἡμιαθροίσματος καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Ἐπειδὴ

$$\gamma < \mu + \nu < \alpha + \beta$$

$$\alpha < \nu + \rho < \beta + \gamma$$

$$\beta < \rho + \mu < \alpha + \gamma$$

καὶ

$$\alpha + \beta + \gamma < 2(\mu + \nu + \rho) < 2(\alpha + \beta + \gamma).$$

Ἄρα

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} < \mu + \nu + \rho < \alpha + \beta + \gamma.$$

Σημείωσις. 1) Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων τμημάτων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο μεγαλυτέρων πλευρῶν τοῦ τριγώνου. (Βλ. ἐπ. § 460 α, Θεώρημα τοῦ Visschers).

2) Τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος $\mu + \nu + \rho$ λαμβάνεται ὅταν τὸ σημεῖον Ο συμπίπτῃ πρὸς τὸ σημεῖον ἐξ οὗ αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας (§§ 904, 1079).

Θεώρημα 22—I

451. **Ἡ ἀπόστασις μιᾶς κορυφῆς τριγώνου ἀπὸ τυχόντος σημείου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς τῆς πλευρᾶς ταύτης ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.**

Θεώρημα 23

452. **Ἕκαστον ὕψος τριγώνου εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν αἵτινες τὸ περιέχουν.**

Θεώρημα 23—I

453. **Τὸ ἄθροισμα τῶν ὑψῶν παντὸς τριγώνου εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν πλευρῶν.**

Ἐπειδὴ

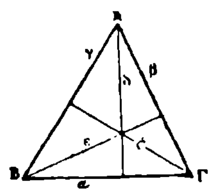
$$\delta < \beta$$

$$\varepsilon < \gamma$$

$$\zeta < \alpha$$

καὶ

$$\delta + \varepsilon + \zeta < \alpha + \beta + \gamma.$$



Σχ. 302.

Θεώρημα 23—II

454. **Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ὑψῶν ὀξυγωνίου τριγώνου εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν τριῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**

Θεώρημα 24

455. **Ἡ τυχοῦσα διάμεσος ἑνὸς τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν πλευρῶν.**

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον καὶ ΑΜ ἡ θεωρουμένη διάμεσος. Προεκτείνομεν τὴν εὐθεῖαν ταύτην πέραν τοῦ Μ, κατὰ μῆκος ΜΑ′ = ΑΜ καὶ φέρομεν τὴν Α′Β. Θὰ ἔχωμεν προφανῶς

$$Α'Β = ΑΓ.$$

Ἀλλὰ $AA' < AB + BA' = AB + A\Gamma.$

Ὥστε $AA' = AM < \frac{AB + A\Gamma}{2}.$

Θεώρημα 24—I

456. Τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων παντὸς τριγώνου περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς ἡμιπεριμέτρου καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου.

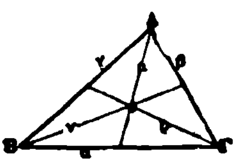
Ἡ ἀπόδειξις ἀπορρέει ἐκ τῆς προηγουμένης προτάσεως· ἀλλὰ τὰ ὅρια δύνανται νὰ πλησιάσουν περισσότερον, ὅπως δεικνύεται ἐκ τοῦ ἑπομένου θεωρήματος:

Θεώρημα 25

457. Τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων παντὸς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

Ἄς εἶναι α, β, γ αἱ τρεῖς πλευραί, μ, ν, ρ αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Επειδὴ αἱ διάμεσοι τέμνονται εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους των (§447), ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΑ λαμβάνομεν τὰς ἀνισότητας



Σχ. 309.

$$\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{3}\nu > \gamma$$

$$\frac{2}{3}\nu + \frac{2}{3}\rho > \alpha$$

$$\frac{2}{3}\rho + \frac{2}{3}\mu > \beta,$$

διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ὁποίων, εὑρίσκομεν

$$\frac{4}{3}(\mu + \nu + \rho) > \alpha + \beta + \gamma$$

ἢ $$\mu + \nu + \rho > \frac{3}{4}(\alpha + \beta + \gamma).$$

Θεώρημα 25—I

458. Ἐὰν διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διχοτόμων τριγώνου ἀχθῇ παράλληλος πρός τινα πλευρὰν αὐτοῦ, τὸ τμῆμα αὐτῆς, τὸ μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν περιεχόμενον, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων τῶν πλευρῶν τούτων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν παραλλήλων

Θεώρημα 25—II

459. Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν διχοτόμων δύο ἐξωτερικῶν γωνιῶν τριγώνου ἀχθῇ παράλληλος ΘΖ πρὸς τὴν κοινὴν πλευρὰν ΑΓ τῶν γωνιῶν αὐτῶν, ἡ εὐθεῖα ΘΖ θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΑΖ καὶ ΓΘ.

Θεώρημα 25—III

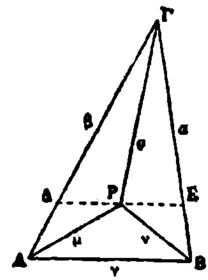
460. Αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι αὐτῶν ὁρίζουν διὰ τῶν τομῶν των τέσσαρα σημεῖα (§ 444). Πᾶσα παράλληλος πρός τινα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἀγομένη διά τινος τῶν σημείων αὐτῶν καὶ περατουμένη εἰς τὰς ἄλλας δύο πλευράς, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν τμημάτων τῶν ὁριζομένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῶν καὶ περιεχομένων μεταξὺ τῶν παραλλήλων.

Θεώρημα 25—IV

460 α. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εὐθειῶν μ, ν, ρ (Σχ. 303 α), τῶν συνδεουσῶν τυχὸν σημεῖον Ρ, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρισκόμενον, μετὰ τῶν τριῶν κορυφῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο μεγαλυτέρων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Ἄς εἶναι γ ἡ μικροτέρα καὶ β ἡ μεγαλυτέρα τῶν πλευρῶν του τριγώνου. Θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\mu+\nu+\rho<\alpha+\beta.$$



Σχ. 303 β

Φέρομεν τὴν ΔΡΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Θὰ ἔχωμεν

$$ΔΓ>ΕΓ>ΔΕ, \quad ΓΔ>ΓΡ$$
$$ΑΡ<ΑΔ+ΔΡ$$
$$ΒΡ<ΒΕ+ΕΡ$$
$$ΓΡ<ΔΓ$$
$$ΔΕ<ΕΓ.$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν τεσσάρων τελευταίων ἀνισοτήτων λαμβάνομεν:

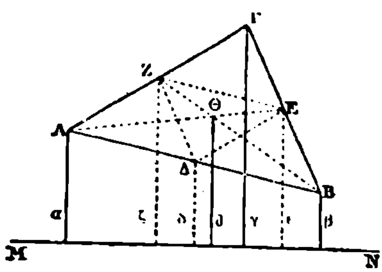
$$ΑΡ+ΒΡ+ΓΡ<ΑΓ+ΒΓ$$

ἤ

$$\mu+\nu+\rho<\alpha+\beta.$$

Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι τοῦ *J. N. Visscher* (Ὁλλανδία), δημοσιευθὲν τὸ 1902 εἰς τὸ ὁλλανδικὸν περιοδικὸν *Vriend der Wiskunde*.

Θεώρημα 26



Σχ. 304.

461. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ ἀπὸ τυχούσης εὐθείας ΜΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν μέσων τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀπὸ τῆς εὐθείας.

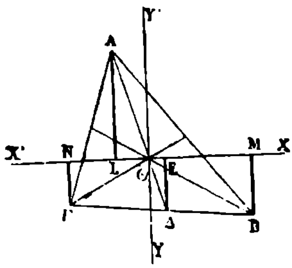
Ἐπειδὴ (§ 436)

$$\delta=\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \varepsilon=\frac{\beta+\gamma}{2}, \quad \zeta=\frac{\gamma+\alpha}{2}$$
$$\delta+\varepsilon+\zeta=\alpha+\beta+\gamma.$$

Παρατήρησις. Ἐργαζόμενοι καθ' ὅμοιον τρόπον διὰ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, κλπ., θὰ καταλήξωμεν εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων καὶ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου Θ. Ἄρα $3\theta = \alpha + \beta + \gamma$.

Θεώρημα 27

462. Διὰ τοῦ σημείου τομῆς Θ τῶν διαμέσων τριγώνων ΑΒΓ ἄγεται τυχοῦσα εὐθεῖα ΧΧ'. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῆς εὐθείας ταύτης τῶν δύο κορυφῶν, τῶν κειμένων πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς εὐθείας, εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῆς τρίτης κορυφῆς ἀπὸ τῆς ἰδίας εὐθείας.



Σχ. 305.

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν

$$ΒΜ + ΓΝ = 2 . ΔΕ. \quad (§ 436)$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ διάμεσοι τέμνονται εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους των ἀπὸ τῶν κορυφῶν, θὰ εἶναι

$$ΑΘ = 2.ΔΘ,$$

ἄρα καὶ $ΑΛ = 2.ΔΕ.$ (§ 447)

Κατὰ συνέπειαν:

$$ΑΛ = ΒΜ + ΓΝ.$$

Παρατήρησις. Ἐπίσης: $ΘΜ = ΘΛ + ΘΝ$, ἀφοῦ τὰ μήκη αὐτὰ εἶναι ἴσα πρὸς τὰς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν ἀπὸ εὐθείας ΥΥ' παραλλήλου τῆς ΑΛ.

463. ***Σημείωσις.*** τὸ σημεῖον Θ εἶναι τὸ *κέντρον βάρους τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου* ΑΒΓ. Ὁ Carnot ὀνομάζει αὐτὸ ἐπίσης κέντρον τῶν μέσων ἀποστάσεων τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου (*Géométrie de position*, 269). Ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὰ Στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας τῆς ἐννοίας τοῦ κέντρου τῶν μέσων ἀποστάσεων ἢ *βαρυκέντρου* ὀφείλεται, νομίζομεν, εἰς τὸν Bobillier (*Cours de Géom.* σ.σ. 55, 83).

463 α. Τὸ κέντρον τῶν μέσων ἀποστάσεων τῶν σημείων τομῆς δύο σταθερῶν εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ καὶ περιφερείας σταθεροῦ κέντρου ἀλλὰ μεταβλητῆς ἀκτῖνος, εἶναι σταθερὸν σημεῖον.

Ἔστωσαν Α, Β καὶ Γ, Δ τὰ σημεῖα ταῦτα ἐπὶ τῶν ΟΧ, ΟΥ ἀντιστοίχως· τὸ κέντρον βάρους Θ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ δὲ εὐθεῖαι αὗται δὲν μεταβάλλονται.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα ἀληθεύει καὶ ἐὰν τὸ ζεῦγος τῶν εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ μιᾶς ἐλλείψεως. (Ν. Α. 1904, σ. 96· d'Ocagne et Barisien).

Θεώρημα 28

464. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν τριῶν κορυφῶν τριγώνου ἀπὸ τυχούσης εὐθείας, εἶναι τὸ τριπλάσιον τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τῆς ἰδίας εὐθείας τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου.

Ἔστω (Σχ. 306) $ΑΑ' = \alpha$, $ΒΒ' = \beta$, $ΓΓ' = \gamma$, $ΘΘ' = \theta$.

Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\alpha + \beta + \gamma = 3\theta \text{ ἢ } \theta = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma).$$

1η Ἀπόδειξις. Ἄς φέρωμεν τὴν ΧΧ′ παράλληλον πρὸς τὴν ΖΖ′· θὰ ἔχωμεν (§ 462):

$$ΑΛ = ΒΜ + ΓΝ$$

ἤ

$$ΑΛ - ΒΜ - ΓΝ = 0.$$

Προσθέτομεν τὸ μῆκος 3θ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης:

$$θ + ΑΛ + θ - ΒΜ + θ - ΓΝ = 3θ,$$

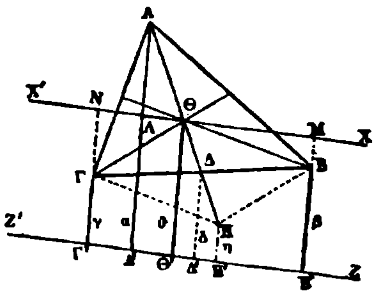
ἤ:

$$ΑΑ' + ΒΒ' + ΓΓ' = 3θ,$$

καὶ

$$θ = \frac{1}{3}(ΑΑ' + ΒΒ' + ΓΓ').$$

2α Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν ΔΗ = ΔΘ καὶ φέρομεν τὰς ΗΒ, ΗΓ. Εἶναι: $β + γ = 2δ$, $2δ = θ + η$, ἄρα $β + γ = θ + η$.

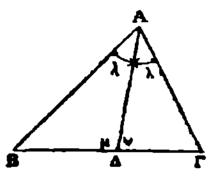


Σχ. 306.

Ὥστε: $α + β + γ = α + θ + η$ καὶ ἐπειδὴ $α + η = 2θ$, ἀφοῦ ΑΘ = ΘΗ, ἕπεται: $α + β + γ = 3θ$.

Θεώρημα 29

465. Ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν, ἃς σχηματίζει ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος γωνίας τριγώνου μετὰ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου.



Σχ. 307.

Πράγματι, πᾶσα ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ. Ἄρα:

$$μ = \widehat{Γ} + λ,$$

$$ν = \widehat{Β} + λ,$$

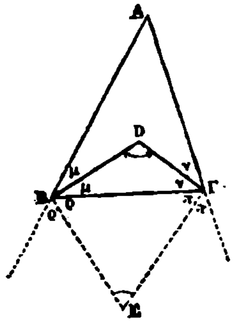
καὶ

$$μ - ν = \widehat{Γ} - \widehat{Β}.$$

Θεώρημα 30.

466. Ἡ γωνία δύο ἐσωτερικῶν διχοτόμων ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς μίαν ὀρθὴν γωνίαν, ηὐξημένην κατὰ τὸ ἥμισυ τῆς τρίτης γωνίας.

Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι :



Σχ. 308.

$$B\widehat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

'Αλλ' εἶναι :

$$\widehat{\Delta} = 180^\circ - (\Delta\widehat{B}\Gamma + \Delta\widehat{\Gamma}B),$$

$$\widehat{\Delta} = 180^\circ - \left[\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2}\right],$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2},$$

ἕπεται :

$$\widehat{\Delta} = 180^\circ - \left[90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}\right] = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Θεώρημα 30—Ι

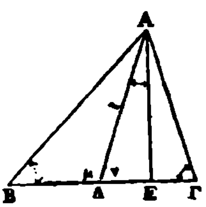
467. Ἡ γωνία τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων εἶναι ἴση πρὸς

$$\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$$

Δυνάμεθα νὰ τὴν ὑπολογίσωμεν κατ' ἀνάλογον τοῦ προηγουμένου τρόπου ἢ καὶ ἐκ τοῦ δισορθογωνίου τετραπλεύρου ΒΓΔΕ· ἐπειδὴ $\widehat{\Delta} + \widehat{E} = 180^\circ$.

Θεώρημα 31

468. Ἡ γωνία τῆς διχοτόμου καὶ τοῦ ὕψους τριγώνου, τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ τριγώνου (J. Mention, N. A., 1850, σ. 326).



Σχ. 309.

'Επειδὴ

$$\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{\Gamma})}{2},$$

καὶ

$$\Delta\widehat{A}E = \frac{\widehat{A}}{2} - \Gamma\widehat{A}E.$$

'Αλλὰ εἶναι :

$$\Gamma\widehat{A}E = 90^\circ - \widehat{\Gamma}.$$

῞Ωστε :

$$\Delta\widehat{A}E = \frac{180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{\Gamma})}{2} - (90^\circ - \widehat{\Gamma}) = \frac{180^\circ - \widehat{B} - \widehat{\Gamma} - 180^\circ + 2\Gamma}{2} = \frac{\widehat{\Gamma} - \widehat{B}}{2}.$$

469. *Παρατήρησις.* Κατὰ γνωστὸν θεώρημα (§ 465):

$$\widehat{\Gamma} - \widehat{B} = \mu - \nu.$$

ὥστε

$$\Delta\widehat{A}E = \frac{\mu - \nu}{2}.$$

Ἐπαλήθευσις.

$$\Delta\widehat{A}E = 90^\circ - \nu$$

ἢ

$$\frac{\mu - \nu}{2} = 90^\circ - \nu, \quad \mu - \nu = 180^\circ - 2\nu.$$

Ὅθεν:

$$\mu + \nu = 180^\circ.$$

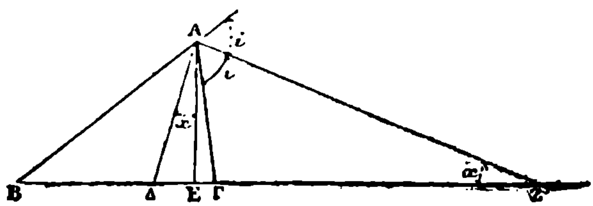
Καὶ ἀπ' εὐθείας δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $\Delta\widehat{A}E = \frac{\mu - \nu}{2}$. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ὑψώσωμεν κάθετον εἰς τὸ Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι ἡ γωνία μ εἶναι ἐξωτερικὴ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΕΑ καὶ ἑπομένως:

$$\mu = \Delta\widehat{A}E + 90^\circ, \quad \nu = 90^\circ - \Delta\widehat{A}E.$$

Ὅθεν:

$$\mu - \nu = 2.\Delta\widehat{A}E, \quad \Delta\widehat{A}E = \frac{\mu - \nu}{2}.$$

Ἄλλη ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον ΑΖ. Ἐπειδὴ



Σχ. 310.

αἱ γωνίαι ΔΖΑ καὶ ΔΑΕ εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς των καθέτους, ἐκ τῶν τριγώνων ΖΓΑ, ΖΑΒ λαμβάνομεν

$$x + i = \widehat{\Gamma}, \quad x = \widehat{\Gamma} - i$$

$$x + \widehat{B} = i, \quad x = i - \widehat{B}.$$

Ὅθεν

$$2x = \widehat{\Gamma} - \widehat{B}, \quad x = \frac{\widehat{\Gamma} - \widehat{B}}{2}.$$

Ἰσοσκελῆ Τρίγωνα

470. Πᾶσαι αἱ εἰδικαὶ ἰδιότητες τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπορρέουν ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν καὶ τῆς ἰσότητος τῶν ἀπέναντι αὐτῶν πλευρῶν. Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἀποτελεῖται ἐκ δύο μερῶν συμμετρικῶν πρὸς τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς

του ύψος, μέγα δὲ μέρος τῶν ἰδιοτήτων του εὑρίσκονται τόσον εὐκόλως ὥστε νὰ ἐμφανίζωνται αὗται ὡς προφανεῖς. Δυνάμεθα λ. χ. νὰ εἴπωμεν καὶ χωρὶς νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλόγων εὐθειῶν ὅτι:

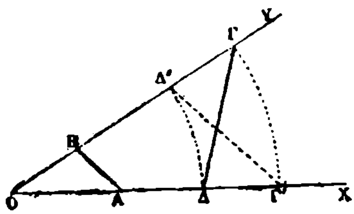
Ἡ παράλληλος εὐθεῖα πρὸς τὴν βάσιν, ἡ διαιροῦσα μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν εἰς μέρη ἴσα, διαιρεῖ καὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν εἰς μέρη ἴσα καὶ διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ ἐκ τῆς κορυφῆς ὕψους.

Τὸ μέσον τῆς βάσεως ἴσον ἀπέχει τῶν ἴσων πλευρῶν. Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν βάσιν, εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ μέσου αὐτῆς καὶ περατούμεναι εἰς τὰς ἴσας πλευράς, εἶναι ἴσαι καὶ ἡ ἑνοῦσα τὰ ἄκρα αὐτῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν. Ἡ μέθοδος τῆς *συμμετρίας* (§ 145) ἢ τῆς *ἀναστροφῆς* ἐμφανίζεται ὡς ἡ φυσικὴ μέθοδος σπουδῆς τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἐπειδὴ ὁδηγεῖ εἰς ἀποδείξεις πολὺ ἁπλᾶς. Συνηθίζεται ἐν τούτοις ἡ χρησιμοποίησις τῶν διαφόρων περιπτώσεων ἰσότητος τριγώνων.

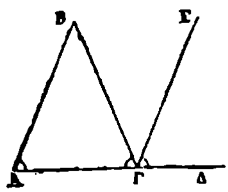
471. ***Ἀντιπαράλληλοι εὐθεῖαι.*** Ὑπενθυμίζομεν, ὅτι, ἀναφορικῶς πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν ΧΟΥ, δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ λέγονται ἀντιπαράλληλοι (§ 26, σημ.) ὅταν ἡ γωνία ΟΑΒ (Σχ. 311) εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΟΓΔ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ γωνία Β εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ καὶ ὅτι ἐὰν λάβωμεν

$$ΟΓ' = ΟΓ, \quad ΟΔ' = ΟΔ,$$

αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Γ'Δ' θὰ εἶναι παράλληλοι· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΟΒΑ καὶ ΟΔ'Γ' θὰ εἶναι ἴσαι.



Σχ. 311.



Σχ. 312.

Ὅταν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΒ (Σχ. 312) σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετὰ τοῦ αὐτοῦ μέρους μιᾶς τρίτης τεμνούσης αὐτὰς ΑΓΔ, καλοῦνται ἐνίοτε ἐπίσης ἀντιπαράλληλοι. Αἱ προεκτάσεις των σχηματίζουν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μετὰ τῆς τεμνούσης.

Αἱ ΓΒ καὶ ΓΕ εὐθεῖαι λέγονται καὶ αὗται ἀντιπαράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓΔ εὐθεῖαν.

Θεώρημα 32

472. Ἓν τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι διάμεσος καὶ ὕψος αὐτοῦ, ἢ διάμεσος καὶ διχοτόμος, ἢ διχοτόμος καὶ ὕψος.

Θεώρημα 32—Ι

473. Ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι, αἱ μεταξὺ τούτων περιεχόμεναι διάμεσος, διχοτόμος ἢ ὕψος εἶναι ἀνὰ δύο ἄνισοι.

Θεώρημα 32—II

474. Ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι, αἱ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμεναι διχοτόμος καὶ διάμεσος εἶναι ἀμφότεραι μεγαλύτεραι τοῦ ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ὕψους.

Θεώρημα 33

475. Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον δύο ὕψη, δύο διάμεσοι καὶ δύο διχοτόμοι εἶναι ἴσαι.

Θεώρημα 34

476. Ἓν τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς ἐὰν δύο ὕψη αὐτοῦ εἶναι ἴσα.

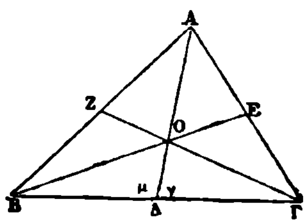
Θεώρημα 34—I

477. Ἓν τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ἐὰν δύο μεσοκάθετοι αὐτοῦ, περατούμεναι εἰς τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον, εἶναι ἴσαι.

Θεώρημα 34—II

478. Εἰς τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν τριγώνου ἀντιστοιχεῖ ἡ μικροτέρα διάμεσος αὐτοῦ.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον καὶ ΑΒ > ΑΓ· διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ διάμεσος ΓΖ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέσου ΒΕ, φέρομεν τὴν τρίτην διάμεσον ΑΟΔ.



Σχ. 313.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ἔχουν δύο πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΒ > ΑΓ· ἐπομένως

$$\mu > \nu.$$

Ἀλλὰ τότε, τὰ τρίγωνα ΟΒΔ καὶ ΟΔΓ ἔχουν δύο πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὰς περιεχομένας γωνίας μ > ν· ἄρα:

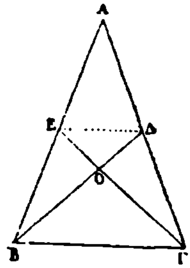
$$ΟΒ > ΟΓ \quad ἢ \quad \frac{2}{3}ΒΕ > \frac{2}{3}ΓΖ.$$

Δηλαδή: $ΒΕ > ΓΖ.$

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν: *Ἡ μεγαλυτέρα διάμεσος εἶναι ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς μικροτέρας γωνίας ἀγομένη.*

Θεώρημα 35

479. Ἐὰν τριγώνου δύο διάμεσοι εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.



Σχ. 314.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ εἶναι συνέπεια τοῦ προηγουμένου θεωρήματος:

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ τὴν ἀποδείξωμεν ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ΒΔ = ΓΕ· ἐπειδὴ αἱ διάμεσοι τέμνονται εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους των, θὰ εἶναι καὶ $ΒΟ = ΓΟ, \quad ΟΔ = ΟΕ,$

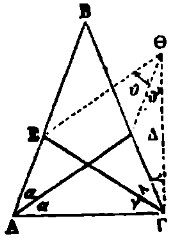
καὶ τὰ τρίγωνα ΒΟΕ, ΓΟΔ ἀποδεικνύονται ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας εἰς τὸ Ο ἴσας καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὰς πλευρὰς ἴσας. Κατὰ συνέπειαν,

$$\mathrm{BE} = \Gamma\Delta, \quad \text{ὅθεν } \mathrm{BA} = \Gamma\mathrm{A}.$$

Θεώρημα 36

480. Ἐὰν εἰς τρίγωνον δύο διχοτόμοι εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

Ἔστω ἴσαι αἱ διχοτόμοι ΑΔ καὶ ΓΕ· πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι γων. $\mathrm{A} = \Gamma$ ἢ ὅτι τὰ ἡμίση των ΓΑΔ καὶ ΑΓΕ εἶναι ἴσα. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΓΑΔ καὶ ΑΓΕ ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως, ἡ τελευταία ἰσότης ἀνάγεται εἰς τὴν



Σχ. 315.

$$\Gamma\Delta = \mathrm{AE}.$$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν αὐτῆς, φέρομεν ἐκ τῶν Δ, Ε τὰς παραλλήλους ΔΘ, ΕΘ πρὸς τὰς ΑΕ καὶ ΑΔ ἀντιστοίχως. Ἐκ τοῦ σχηματιζομένου παραλληλογράμμου λαμβάνομεν

$$\mathrm{E}\Theta = \mathrm{A}\Delta = \Gamma\mathrm{E}, \quad \Delta\Theta = \mathrm{AE}, \quad \theta = \alpha,$$

τὸ δὲ τρίγωνον ΓΕΘ εἶναι ἰσοσκελές, ἀφοῦ $\mathrm{E}\Theta = \mathrm{A}\Delta = \mathrm{E}\Gamma$· ἄρα

$$\widehat{\mathrm{E}\Gamma\Theta} = \widehat{\mathrm{E}\Theta\Gamma}.$$

Ἔστω τώρα ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ἄνισοι, $\mathrm{A} > \Gamma$ λ. χ. Τότε θὰ εἶναι καὶ $\theta > \gamma$, ἄρα $\theta' < \gamma'$ καὶ κατὰ συνέπειαν

$$\Delta\Theta > \Delta\Gamma.$$

Ἀλλ' ἡ ἀνισότης $\mathrm{A} > \Gamma$, ἢ $\alpha > \gamma$, συνεπάγεται τὴν

$$\Delta\Gamma > \mathrm{AE} = \Delta\Theta,$$

ἥτις εἶναι ἀσυμβίβαστος φυσικὰ πρὸς τὴν $\Delta\Gamma < \Delta\Theta$. Εἶναι λοιπὸν ψευδὴς ἡ ὑπόθεσις ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ἄνισοι, ἐφ' ὅσον μᾶς ὁδηγεῖ εἰς ἀσυμβίβαστα συμπεράσματα.

Εἶναι ἑπομένως $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Gamma}$ καὶ τὸ θεωρούμενον τρίγωνον ἰσοσκελές.

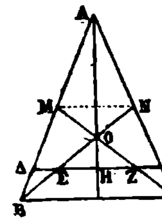
480 α. ***Σημείωσις.*** 1) Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις ὀφείλεται εἰς τὸν Descube, μηχανικόν. (J. d. Math. Él. et spéciales, 1880 σ. 538).

2) *Ἓν τρίγωνον δύναται νὰ ἔχῃ δύο ἐξωτερικὰς διχοτόμους ἴσας καὶ νὰ μὴ εἶναι ἰσοσκελές.* Βλ. Inter. d. Math., 1894, σ. σ. 70, 149, Alauda καὶ Friocourt· 1895, σ. 101, question 129, Ala ιαη· σ. 169, σημειώσεις τῆς Συντάξεως καὶ τῶν Tarry, Welsch, Juel· *Mathesis*, 1895, σ. 261, Soons καὶ σημείωσις τοῦ J. Neuberg· 1900, σ. 129, *Sur le triangle pseudo-isocèle*, A. Emmerich, καὶ *Bulletin des Sciences M. et P. élémentaires*, 9ème année (1903 - 1904), σ. 146, 13ème année 1907 - 1908), σ. 22, Sur les triangles non isocèles à deux bissectrices égales, G. Fontené.

Βλ. ἐπίσης ἱστορικὸν σημείωμα τοῦ J. Neuberg εἰς *Mathesis*, 1907, σ. 184.

Θεώρημα 37

481. Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον, φέρομεν τὰς διαμέσους ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς καὶ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν. Δείξατε ὅτι τὰ τμήματα τῆς εὐθείας αὐτῆς, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν ἴσων πλευρῶν καὶ τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὰς διαμέσων, εἶναι ἴσα.



Σχ. 316.

Πᾶσα παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου διαιρεῖται εἰς ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ ἐπὶ τὴν βάσιν ὕψους:

$$ΔΗ = ΗΘ,$$

καὶ τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὸ ἰσοσκελὲς προφανῶς τρίγωνον ΒΟΓ:

$$ΕΗ = ΗΖ.$$

Ἄρα: $ΔΕ = ΖΘ$.

Θεώρημα 37—I

482. Ἐὰν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχουν τὰς βάσεις ἐπ' εὐθείας καὶ τὰ ἐπὶ ταύτας ὕψη ἐπίσης ἐπ' εὐθείας, τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἴσων πλευρῶν εὑρίσκονται ἐπὶ παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις καὶ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν τῶν ὑψῶν.

Θεώρημα 37—II

483. Ἐὰν συνδέσωμεν δι' εὐθειῶν τὸ μέσον Ο τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ μετὰ τῶν μέσων τῶν ἴσων πλευρῶν καὶ προεκτείνωμεν αὐτὰς μέχρι τῶν τομῶν των Μ, Ν μετὰ τῆς ἐκ τῆς κορυφῆς ἀγομένης παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΟΜΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

Θεώρημα 37—III

484. Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς σημεῖα αὐτῶν ἴσον ἀπέχοντα τῆς κορυφῆς, τέμνουν αὐτὰς εἰς σημεῖα κείμενα ἐπὶ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ τὸ ἐπὶ τὴν βάσιν ὕψος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι προφανῶς ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος, τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα (§ 481 ἕως 484) ἀποδεικνύονται πολὺ ἁπλῶς διὰ τῆς *μεθόδου τοῦ διπλασιασμοῦ.*

Θεώρημα 38

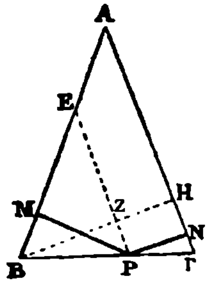
485. Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἴσας πλευράς, τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον ἔχει σταθερὰν περίμετρον.

(Μέθοδοι, § 19).

Θεώρημα 39

486. Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου Ρ τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου φέρωμεν καθέτους ΡΜ, ΡΝ ἐπὶ τὰς ἴσας πλευράς, τὸ ἄθροισμα ΡΜ+ΡΝ εἶναι σταθερὰ ποσότης.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς βάσεως, ἡ διαφορὰ | ΡΜ — ΡΝ | εἶναι σταθερὰ ἐπίσης ποσότης. (Βλ. § 20 καὶ § 146).



Σχ. 317.

Ἡ ἀπόδειξις διὰ τῶν βοηθητικῶν ἐπιφανειῶν (§ 163) ἀνήκει εἰς τὸ IV Βιβλίον.

Ἄλλη ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν ΡΖΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ. Τὸ τρίγωνον ΒΡΕ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα

$$\text{ΡΜ} = \text{ΒΖ}, \quad \text{ΡΝ} = \text{ΖΗ}$$

καὶ

$$\text{ΡΜ} + \text{ΡΝ} = \text{ΒΗ} = \text{σταθερὸν μῆκος}.$$

Θεώρημα 39—Ι

487. Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου Ρ τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου φέρωμεν εὐθείας ΡΜ, ΡΝ τεμνούσας τὰς ἴσας πλευρὰς κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν, τὸ ἄθροισμα ΡΜ + ΡΝ εἶναι σταθερὰ ποσότης (βλ. § 268).

Θεώρημα 40

488. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν πλευρῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου σημείου Ρ, κειμένου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ, εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.

Ἐκ τοῦ Ρ φέρομεν παράλληλον πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο πλευρὰς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τοῦ μικροτέρου ἰσοπλεύρου τριγώνου· ἐὰν δὲ εἰς αὐτὸ προστεθῇ καὶ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς τρίτης πλευρᾶς, τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ἀρχικοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

489. *Παρατήρησις*. Ἡ ἀπόδειξις διὰ τῶν βοηθητικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι πολὺ ἁπλῆ ἀλλ' ἀνάγεται εἰς τὸ IV Βιβλίον.

Θεώρημα 41

490. Ἐὰν εἰς τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς βάσεως ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ὑψώσωμεν κάθετον ΡΜΝ, τέμνουσαν τὰς ἴσας πλευρὰς εἰς Μ καὶ Ν, τὸ ἄθροισμα ΡΜ + ΡΝ εἶναι σταθερὰ ποσότης.

(Μέθοδοι, § 266).

Ὀρθογώνια τρίγωνα

491. Αἱ ἰδιότητες τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, αἱ δυνάμεναι νὰ σπουδασθοῦν εἰς τὸ Ι Βιβλίον, ἀναφέρονται εἰς τὴν ἰδιότητα ἣν ἔχουν αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι του νὰ εἶναι συμπληρωματικαί. Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς ἕπεται, ὡς θὰ ἀποδείξωμεν ἄλλωστε, ὅτι ἡ ὑποτείνουσα εἶναι διπλασία τῆς πρὸς αὐτὴν διαμέσου καὶ ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνένωσις δύο ἰσοσκελῶν τριγώνων, ἐχόντων μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν κοινὴν καὶ τὰς γωνίας εἰς τὰς κορυφὰς των παραπληρωματικάς.

Θεώρημα 42.

492. Ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.

Θεώρημα 42—I

493. Αἱ μεσοκάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου τέμνονται ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης (§ 443).

Θεώρημα 42—II

494. Αἱ μεσοκάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ ἡ ἑνοῦσα τὸ σημεῖον τομῆς των μετὰ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, διαιροῦν τὸ τρίγωνον εἰς τέσσαρα ἴσα τρίγωνα.

Θεώρημα 43

495. Ἐὰν ἡ πρός τινα πλευρὰν τριγώνου διάμεσος εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

Θεώρημα 43—I

496. Ἐὰν μία πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι τὸ τρίτον ὀρθῆς γωνίας.

Θεώρημα Ἀντίστροφον 43—II

497. Ἐὰν μία γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὸ τρίτον ὀρθῆς, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.

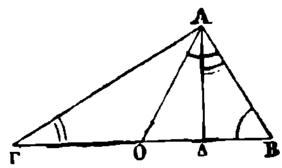
Ἐπειδὴ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο ἰσοσκελῶν τριγώνων, εἰς ἃ ἡ πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν διάμεσος διαιρεῖ τὸ τρίγωνον, εἶναι ἰσόπλευρον.

Θεώρημα 43—III

498. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Β εἶναι τὸ τρίτον ὀρθῆς καὶ ὁ πούς Δ τοῦ ἐπὶ τὴν ΒΓ ὕψους διαιρῇ αὐτὴν εἰς δύο τμήματα ΒΔ καὶ ΔΓ, ἐξ ὧν τὸ πρῶτον εἶναι τὸ τριπλάσιον τοῦ ἑτέρου, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὴν κορυφὴν Α.

Θεώρημα 43—IV

499. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας διάμεσος καὶ τὸ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ὕψος σχηματίζουν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.



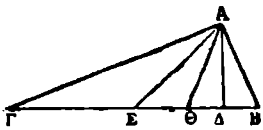
Σχ. 318.

Ἐπειδὴ $\widehat{BAO} = \widehat{B}$, $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Delta AO} = \widehat{B} - \widehat{\Gamma}$.

Θεώρημα 44

500. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἡ διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι διχοτόμος ἐπίσης τῆς γωνίας τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαμέσου, τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας.

1η Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι γων. ΔΑΕ = Β − Γ (§ 499) καὶ ὅτι ἡ γωνία τῆς διχοτόμου καὶ τοῦ ὕψους ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν παρὰ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν γωνιῶν (§ 468). Ἄρα:



Σχ. 319.

$$\widehat{\Delta A\Theta} = \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{\Delta A E}}{2}.$$

2α Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον ΑΕΓ εἶναι ἰσοσκελές, $\widehat{\Gamma A E} = \widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma}$, ἀφοῦ ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς Β. Ἄρα

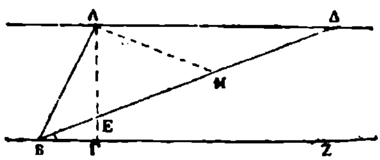
$$\widehat{\Gamma A E} = \widehat{BA\Delta}$$

καὶ ἡ διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι διχοτόμος ἐπίσης καὶ τῆς γωνίας ΔΑΕ.

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις ἑνὸς γενικωτέρου διὰ τυχὸν τρίγωνον (§ 646).

Θεώρημα 44—Ι

501. Δίδονται δύο παράλληλοι καὶ ἐξ ἑνὸς σημείου Α τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν φέρομεν κάθετον ΑΓ καὶ πλαγίαν ΑΒ πρὸς τὴν ἄλλην. Ἐὰν ἡ τέμνουσα ΒΕΔ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν εἶναι τοιαύτη, ὥστε ΕΔ = 2 . ΑΒ, ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ εἶναι τριπλασία τῆς ΕΒΓ.



Σχ. 320.

Ἔστω ΕΜ = ΜΔ = ΑΒ. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΔ, ἡ διάμεσος ΑΜ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης,

$$AM = M\Delta = AB,$$

ἡ δὲ γωνία ΑΜΒ, ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΑΜΔ, θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΜΑΔ + ΔΑΜ, ἢ

$$\widehat{AMB} = 2.\widehat{\Delta} = 2.\widehat{\Delta B Z},$$

ἀφοῦ $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta B Z}$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι.

Καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΜΒ καὶ ΑΒΜ εἶναι ἐπίσης ἴσαι, ὡς ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΜΑΒ φαίνεται, θὰ εἶναι

$$\widehat{\Delta B Z} = \frac{1}{2}\,\widehat{ABE}$$

ἢ

$$\widehat{EB\Gamma} = \widehat{\Delta B Z} = \frac{1}{3}\,\widehat{ABZ} = \frac{1}{3}\,\widehat{AB\Gamma}.$$

Σημείωσις. Ἡ διαίρεσις τῆς γωνίας ΑΒΖ εἰς τρία ἴσα μέρη ἀπαιτεῖ, ὡς εἴδομεν, τὴν ἀγωγὴν εὐθείας ΒΕΔ εἰς τρόπον,

ὥστε ΕΔ = 2ΑΒ. Τὸ πρόβλημα ὅμως τοῦτο εἶναι ἀδύνατον νὰ λυθῇ διὰ τῆς χρήσεως τοῦ διαβήτου καὶ γνώμονος μόνον. (Βλ. § 910). Ἡ κατὰ προσέγγισιν χάραξις μιᾶς *κογχοειδοῦς*, ἐχούσης πόλον τὸ σημεῖον Β καὶ διευθετοῦσαν τὴν ΑΓ, μᾶς παρέχει μίαν προσεγγίζουσαν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Διάφοροι, πολὺ εὐφυεῖς μηχανικαὶ λύσεις, τοῦ προβλήματος ὑπεδείχθησαν ὑπὸ τοῦ A. Aubry εἰς J. M. S., 1896, σ. 76 καὶ 106· *Cosmos*, 1908, σ. 551 - 554.

Παραλληλόγραμμα

Θεώρημα 45

502. Δύο παραλληλόγραμμα εἶναι ἴσα :

1) *Ἐὰν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων ἀντιστοίχως.*

2) *Ἐὰν ἔχουν δύο προσκειμένας πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ μίαν διαγώνιον ἴσην καὶ τῆς αὐτῆς θέσεως εἰς τὰ δύο σχήματα.*

3) *Ἐὰν αἱ δύο διαγώνιοι αὐτῶν εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως καὶ τέμνωνται κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν.*

Θεώρημα 45—Ι

503. Δύο παραλληλόγραμμα εἶναι ἴσα.

1) *Ἐὰν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς διαγωνίους ἴσας ἀντιστοίχως.*

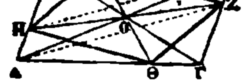
2) *Ἐὰν ἔχουν μίαν διαγώνιον ἴσην καὶ συναντῶσαν δύο προσκειμένας πλευρὰς κατὰ γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως.*

Θεώρημα 46

504. Πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα, διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου καὶ περατούμενον εἰς δύο ἀπέναντι πλευράς, διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ σημείου τούτου.

Θεώρημα 47

505. Αἱ διαγώνιοι δύο παραλληλογράμμων, ἐξ ὧν τὸ ἓν εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἄλλο, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



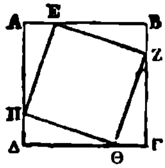
Σχ. 321.

Τὰ τρίγωνα ΕΒΖ καὶ ΘΔΗ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας ἴσας. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΘΗ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ, αἱ δὲ γωνίαι εἰς τὰ Ε καὶ Ζ ἴσαι πρὸς τὰς εἰς τὰ Θ καὶ Η, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς των παραλλήλους ἀντιστοίχως.

Εἶναι ἐπομένως ἡ πλευρὰ ΒΖ ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΗΔ καὶ τὸ τετράπλευρον ΗΔΖΒ παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ δὲ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι δύο τῶν διαγωνίων τῶν δύο ἀρχικῶν παραλληλογράμμων, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ κοινόν των σημεῖον Ο ἀνήκει καὶ εἰς τὰς τέσσαρας διαγωνίους τῶν ἐν λόγῳ παραλληλογράμμων.

Θεώρημα 48

506. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τετραγώνου καὶ ἀπὸ τῶν κορυφῶν ἀρχόμενοι λαμβάνομεν τέσσαρα τμήματα ἴσα καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν πάντοτε φοράν· Τὰ πέρατα τῶν τμημάτων τούτων εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου.



Σχ. 322.

Ἔστω ΑΕ = ΒΖ = ΓΘ = ΔΗ.

Τὰ λαμβανόμενα τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας· εἶναι ἄρα καὶ αἱ ὑποτείνουσαι αὐτῶν ἴσαι ἤ

$$\text{ΕΖ} = \text{ΖΘ} = \text{ΘΗ} = \text{ΗΕ}.$$

Ἀφ' ἑτέρου,

$$\widehat{\text{ΑΗΕ}} = \widehat{\text{ΒΕΖ}}$$

καὶ

$$\widehat{\text{ΒΕΖ}} + \widehat{\text{ΑΕΗ}} = 1 \text{ ὀρθὴ γωνία}.$$

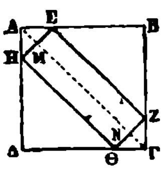
Εἶναι ἑπομένως ἡ γωνία ΖΕΗ ὀρθὴ καὶ τὸ σχῆμα τετράγωνον.

Θεώρημα 48—Ι

507. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ῥόμβου καὶ ἀπὸ δύο ἀπέναντι κορυφῶν ἀρχόμενοι λαμβάνομεν τέσσαρα τμήματα ἴσα. Τὰ πέρατα αὐτῶν εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

Θεώρημα 49

508. Ἐὰν ὁ προηγούμενος ῥόμβος εἶναι τετράγωνον, ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι σταθερά.



Σχ 323.

Ἔστω ΑΕ = ΑΗ = ΓΖ = ΓΘ.

Τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΗΕ, ΒΕΖ κλπ. εἶναι ὀρθογώνια ἰσοσκελῆ, αἱ παρὰ τὰς βάσεις αὐτῶν γωνίαι ἴσαι πρὸς 45° ἑκάστη καὶ κατὰ συνέπειαν αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΗΕΖΘ ὀρθαὶ καὶ τοῦτο ὀρθογώνιον.

Ἐξ ἄλλου,

$$\text{ΜΕ} = \text{ΑΜ}, \quad \text{ΕΖ} = \text{ΜΝ}, \quad \text{ΖΝ} = \text{ΝΓ}.$$

Ὅθεν: περίμετρος τοῦ ΕΖΘΗ = 2 ΑΓ = σταθερὸν μῆκος.

Θεώρημα 50

509. 1) Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων ῥόμβου ἴσον ἀπέχει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

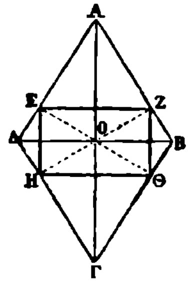
2) Αἱ διαγώνιοι εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν, ἐκ τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀγομένων, καθέτων ἐπὶ τὰς πλευράς.

Θεώρημα 50—I

510. Οἱ πόδες τῶν ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων ῥόμβου καθέτων ἐπὶ τὰς πλευράς, εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

Θεώρημα 50—II

511. Αἱ κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα δύο εὐθειῶν ἴσων καὶ ἀλληλοδιχοτομουμένων σχηματίζουν ῥόμβον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι διέρχονται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.



Σχ. 324.

Θεώρημα 51

512. Αἱ τομαὶ τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων παραλληλογράμμου εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι τοῦ σχηματιζομένου τετραπλεύρου εἶναι ὀρθαί.

Θεώρημα 51—I

513. Αἱ τομαὶ τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων ὀρθογωνίου εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου.

Παρατήρησις. Θεωροῦντες τὰς τομὰς τῶν ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν διχοτόμων λαμβάνομεν:

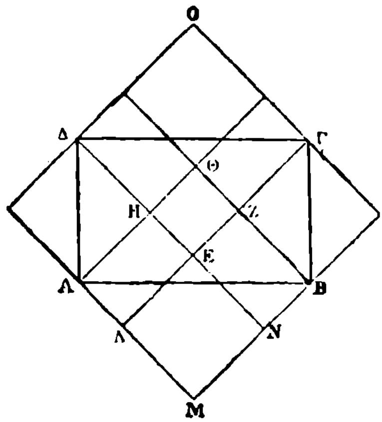
Τέσσαρα τετράγωνα, ὡς τὸ ΜΕ.

Τέσσαρα τετράγωνα, ὡς τὸ ΜΘ.

Ἓν τετράγωνον, ὡς τὸ ΜΟ.

Ἓν τετράγωνον, ὡς τὸ ΕΘ.

Ἐν ὅλῳ δέκα τετράγωνα καὶ τέσσαρα ὀρθογώνια.



Σχ. 325.

Θεώρημα 51—II

514. Ἡ διαγώνιος ΗΖ (Σχ. 325) τοῦ ἐσωτερικοῦ τετραγώνου ἰσοῦται πρὸν τὴν διαφορὰν ΑΒ—ΒΓ τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, ἡ δὲ διαγώνιος ΜΟ τοῦ ἐξωτερικοῦ, πρὸς τὸ ἄθροισμα ΑΒ + ΒΓ αὐτῶν.

Θεώρημα 51—III

515. Αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παραλληλογράμμου τέμνονται κατὰ κορυφὰς ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο προσκειμένων πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου.

Παρατήρησις. Αἱ ἀνωτέρω προτάσεις 51 ἕως 51 — ΙΙΙ δύνανται νὰ διατυπωθοῦν ὡς ἑξῆς:

Δοθέντος παραλληλογράμμου, φέρομεν τὰς ἐσωτερικὰς καὶ ἐξωτερικὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν του. Δείξατε ὅτι:

1) Αἱ τομαὶ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίων.

2) Αἱ διαγώνιοι τῶν ὀρθογωνίων τούτων διέρχονται διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου.

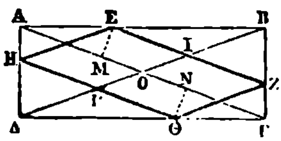
3) Ἡ διαγώνιος τοῦ μεγαλυτέρου ὀρθογωνίου εἶναι ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου, ἡ δὲ διαγώνιος τοῦ μικροτέρου ἡ διαφορὰ αὐτῶν. Καὶ

4) Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐξωτερικοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλληλογράμμου, ηὐξημένον κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐσωτερικοῦ ὀρθογωνίου.

Δυνάμεθα νὰ ἐρευνήσωμεν συμπληρωματικῶς διὰ τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας τὰ ὀρθογώνια ἀποβαίνουν τετράγωνα ἢ τὸ ἐσωτερικὸν ὀρθογώνιον περιορίζεται εἰς σημεῖον.

Θεώρημα 52

516. Ἐὰν φέρωμεν παραλλήλους πρὸς μίαν τῶν διαγωνίων ὀρθογωνίου καὶ εἰς ἴσας ἀπ' αὐτῆς ἀποστάσεις, αἱ τομαί των μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων τοῦ ὀρθογωνίου.



Σχ. 326.

Τὰ τρίγωνα ΒΙΖ, ΘΙ'Δ εἶναι ἰσοσκελῆ,

$$ΙΖ = ΙΒ, \quad Ι'Θ = Ι'Δ$$

καὶ

$$ΖΘ = ΙΙ'.$$

Ἄρα, ἡ ἡμιπερίμετρος

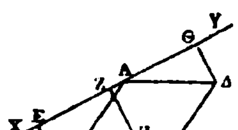
$$ΙΖ + ΖΘ + ΘΙ' = ΒΔ.$$

Θεώρημα 52—Ι

517. Ἐὰν φέρωμεν παραλλήλους πρὸς μίαν τῶν διαγωνίων ὀρθογωνίου, εἰς ἴσας ἀπ' αὐτῆς ἀποστάσεις ἀλλὰ τεμνούσας τὰς προεκτάσεις τῆς διαγωνίου πρὸς ἣν δὲν εἶναι παράλληλοι, αἱ τομαί των μετὰ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου, διὰ τὸ ὁποῖον ἡ διαφορὰ δύο ἐφεξῆς πλευρῶν εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαγώνιον τοῦ ὀρθογωνίου.

Θεώρημα 53

518. Διὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν παραλληλογράμμου φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΧΥ καὶ προβάλλομεν τὰς ἄλλας κορυφὰς ἐπ' αὐτῆς. Δείξατε ὅτι ἡ μεσαία προβάλλουσα εἶναι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἄκρων προβαλλουσῶν.



Σχ. 327.

Διὰ τῆς κορυφῆς Β φέρομεν παράλληλον ΒΗ πρὸς τὴν ΧΥ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΓΗ, ΑΔΘ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας τὰς ὑποτεινούσας καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν. Ἄρα

$$ΓΗ = ΔΘ.$$

καὶ ἐπειδὴ $ΒΕ = ΖΗ$

ἔπεται $ΓΖ = ΒΕ + ΔΘ.$

Παρατήρησις. Διὰ τὴν διαφοράν, θὰ πρέπει ἡ ΧΥ νὰ διατέμνῃ τὸ παραλληλόγραμμον.

Θεώρημα 53—I

519. Ἡ προβολὴ τῆς διαγωνίου παραλληλογράμμου ἐπὶ τυχούσης εὐθείας εἶναι ἄθροισμα τῶν προβολῶν ἐπ' αὐτῆς δύο ἐφεξῆς πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου. (Varignon).

Ἔστωσαν ΒΔ ἡ διαγώνιος καὶ ΒΑ, ΒΓ αἱ ἐφεξῆς πλευραὶ (Σχ. 327).

Ἡ προβολὴ τῆς ΒΔ ἐπὶ τὴν ΧΥ εἶναι ἴση πρὸς ΕΘ καὶ

$$ΕΖ = ΒΗ = ΑΘ, \quad ΕΘ = ΕΑ + ΑΘ.$$

Ἄρα: $ΕΘ = ΕΑ + ΕΖ.$

Παρατήρησις. Ἡ πρότασις εἶναι γενική, ἐὰν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς συμβάσεις διὰ τὰς προβολὰς διανυσμάτων ἐπὶ ἄξονα. Διὰ τὴν διαγώνιον ΑΓ λ. χ. καὶ τὰς ἐφεξῆς πλευρὰς ΑΒ, ΑΔ θὰ ἔχωμεν

$$ΑΖ = ΑΕ - ΑΘ.$$

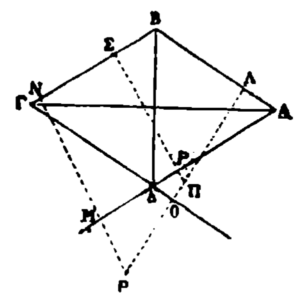
Θεώρημα 53—II

520. Τὸ ἄθροισμα τῶν προβαλλουσῶν τὰς κορυφὰς παραλληλογράμμου ἐπὶ εὐθεῖαν μὴ διατέμνουσαν αὐτό, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετραπλάσιον τῆς προβαλλούσης τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων.

(Βλ. § 461).

Θεώρημα 54

521 Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐκ δοθέντος σημείου ἐπὶ δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἑνὸς ρόμβου, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καθέτων ἐπὶ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ.



Σχ. 328.

Θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι

$$ΡΛ + ΡΜ = ΡΟ + ΡΝ.$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ ἀνάγεται, ἐκ τοῦ σχήματος, εἰς τὴν

$$ΡΟ + ΟΛ + ΡΜ = ΡΟ + ΡΜ + ΜΝ,$$

ἥτις εἶναι φανερά, ἀφοῦ $ΟΛ = ΜΝ =$ ὕψος τοῦ ρόμβου.

Διὰ τὴν γενικότητα τῆς προτάσεως, θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ'

ὄψιν καὶ τὰ συμφωνηθέντα διὰ τὰ σημεῖα τῶν καθέτων ἀποστάσεων. Διὰ τὸ σημεῖον Π λ. χ.

$$ΠΛ + ΠΡ' = ΠΣ + (-ΠΟ).$$

Ἀνάλογος ἀπόδειξις διὰ τὴν διαφορὰν τῶν ἀποστάσεων.

Θεώρημα 55

522. Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι δύο ἀπέναντι κορυφὰς παραλληλογράμμου μετὰ τῶν μέσων δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ, διαιροῦν μίαν τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου εἰς τρία μέρη ἴσα. (P. André, Exercices de Géométrie).

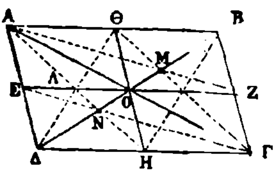
1η Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι ΑΖ, ΓΘ, ΒΟ εἶναι αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου ΑΓΒ· ἐπομένως

$$BM = \frac{2}{3} BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{BΔ}{2} = \frac{BΔ}{3}. \qquad (\S\ 447)$$

Ἀναλόγως

$$ΔN = \frac{BΔ}{3}, \text{ κλπ.}$$

2α Ἀπόδειξις. θεωρήσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΟΒ.



Σχ. 329.

Ἡ εὐθεῖα ΑΖ, οὖσα διαγώνιος τοῦ παρ/μου ΑΒΖΕ, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΟΘ· ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΜ, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ μέσου τῆς διαμέσου ΟΘ τοῦ τριγώνου ΑΟΒ, ὁρίζει ἐπὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ ΟΒ, τμῆμα ΟΜ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΜ. Ἐπομένως,

$$BM = \frac{1}{3} BΔ.$$

Παρατήρησις. Αἱ εὐθεῖαι ΑΖ, ΑΗ, αἵτινες συνδέουν μίαν τῶν κορυφῶν παραλληλογράμμου μετὰ τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι τῆς κορυφῆς αὐτῆς πλευρῶν, διαιροῦν τὴν μίαν τῶν διαγωνίων εἰς τρία μέρη ἴσα.

Τραπέζιον

523. Τὰ παραλληλόγραμμα καὶ τὰ διάφορα εἴδη αὐτῶν εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις τοῦ τραπεζίου.

Συμμετρικὸν ἢ *ἰσοσκελὲς* τραπέζιον καλεῖται ἐκεῖνο διὰ τὸ ὁποῖον αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

Ἐπειδὴ αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ἀποδεικνύονται ἴσαι (§ 534), δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν αὐτὸ ὡς παραγόμενον διὰ τομῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ὑπὸ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ. Εἶναι ἐπομένως αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί του *ἀντιπαράλληλοι* (§ 471) πρὸς τὰς βάσεις.

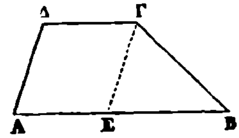
Θεώρημα 56

254. **Εἰς πᾶν τραπέζιον: 1) Ἡ διαφορὰ τῶν βάσεων εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν; ἑκάστη δὲ αὐτῶν εἶναι μικροτέρα τῆς ἄλλης, ηὐξημένης κατὰ τὴν διαφορὰν τῶν βάσεων.**

2) Τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαγωνίων.

525. Παρατήρησις. Ὑποθέτοντες πληρουμένας τὰς συνθήκας ταύτας διὰ τέσσαρα δοθέντα μήκη α, β, γ, δ, καὶ λαμβάνοντες δύο τυχόντα ἐξ αὐτῶν ὡς βάσεις, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓξ διάφορα τραπέζια, τά :

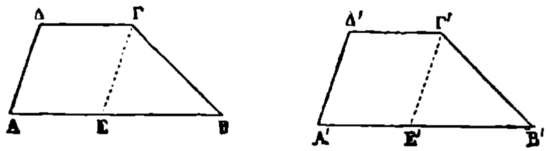
αβγδ	βαγδ
αγβδ	βαδγ
αβδγ	δαγβ.



Σχ. 330.

Θεώρημα 57

526. Δύο τραπέζια εἶναι ἴσα ἐὰν αἱ βάσεις αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι μία πρὸς μίαν καὶ ἐὰν τὸ αὐτὸ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς των.



Σχ. 331

527. Παρατήρησις. Ἵνα δύο τραπέζια εἶναι ἴσα δὲν ἀρκεῖ ὅπως ἔχουν τὰς τέσσαρας πλευράς των ἀντιστοίχως ἴσας καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν· ἐπειδή, ὡς εἴδομεν (§ 525), διὰ τεσσάρων δοθέντων μηκῶν εἶναι ἐνδεχομένως δυνατὸν νὰ κατασκευασθοῦν διάφορα τραπέζια. Διὰ τῶν τεσσάρων μηκῶν α, β, γ, δ, λ. χ. λαμβανομένων κατὰ τὴν γραφεῖσαν σειράν, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ κατεσκευάζετο ἓν πρῶτον τραπέζιον μὲ βάσεις α καὶ γ, καὶ ἓν δεύτερον μὲ βάσεις β καὶ δ.

Θεώρημα 57—I

528. Δύο τραπέζια εἶναι ἴσα ἐὰν αἱ βάσεις των εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι μία πρὸς μίαν καὶ ἐὰν τὸ αὐτὸ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὰς διαγωνίους αὐτῶν.

Θεώρημα 57—II

529. Δύο τραπέζια εἶναι ἴσα ἐὰν ἔχουν τρεῖς πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας καὶ μίαν γωνίαν ἴσην.

Θεώρημα 58

530. Εἰς πᾶν τραπέζιον, ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν· τὸ δὲ τμῆμα αὐτῆς, τὸ μεταξὺ τῶν διαγωνίων περιεχόμενον, εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν βάσεων.

Ἡ ἐκ τοῦ μέσου μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τραπεζίου ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις, διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι τῆς πρώτης πλευρᾶς.

Θεώρημα 58—Ι

531. Ἐὰν ἡ μικροτέρα τῶν βάσεων τραπεζίου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς μεγαλυτέρας, ἡ μέση βάσις (= ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου) διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη ὑπὸ τῶν διαγωνίων.

Θεώρημα 59

532. Ἐὰν ἡ μικροτέρα βάσις ἑνὸς τραπεζίου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν, αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν παρὰ τὴν μεγαλυτέραν βάσιν γωνιῶν τέμνονται ἐπὶ τῆς μικροτέρας.

(Βλ. § 458).

Θεώρημα 59—Ι

533. Ἐὰν ἡ μεγαλυτέρα βάσις τραπεζίου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν, αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τέμνονται ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας βάσεως.

Ἐπειδὴ αἱ προτάσεις αὐταὶ διαφέρουν κατὰ τὴν ἐκφώνησιν μόνον, ὠφέλιμος εἶναι ἡ ἀναδρομὴ εἰς τὴν § 458.

Θεώρημα 60

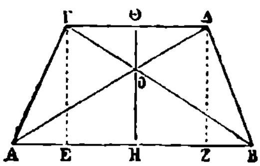
534. Εἰς πὰν ἰσοσκελὲς τραπέζιον, αἱ παρὰ τὴν αὐτὴν βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι. Αἱ διαγώνιοι εἶναι ἐπίσης ἴσαι καὶ τέμνονται ἐπὶ τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν δύο βάσεων.

Ἔστω ΑΓ = ΒΔ.

1) Φέρομεν τὰ ὕψη ΓΕ, ΔΖ· θὰ ἔχωμεν

ΓΕ = ΔΖ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην· ἄρα



Σχ. 332.

$\widehat{ΓΑΕ} = \widehat{ΔΒΖ}$.

2) Τὰ τρίγωνα ΓΑΒ, ΔΒΑ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, Α=Β, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν· ἄρα

ΑΔ = ΒΓ

καὶ ἐπὶ πλέον

$\widehat{ΑΒΟ} = \widehat{ΒΑΟ}$.

Εἶναι ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΟΒ ἰσοσκελὲς καὶ ἡ κορυφὴ του Ο εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Η τῆς ΑΒ.

Ἀφ' ἑτέρου, καὶ τὸ τρίγωνον ΓΟΔ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ δὲ ΗΟ εἶναι κάθετος ἐπίσης ἐπὶ τὴν ΓΔ καὶ συμπίπτει ἑπομένως πρὸς τὴν διάμεσον ΟΘ τοῦ τριγώνου τούτου. Ἤτοι, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα, Η καὶ Θ, τῶν δύο βάσεων τοῦ τραπεζίου διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Ο τῶν διαγωνίων.

Παρατήρησις. Εἰς πᾶν τραπέζιον αἱ διαγώνιοι τέμνονται ἐπὶ τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν βάσεων εὐθείας.

Θεώρημα 60—I

535. Τὰ μέσα τῶν τεσσάρων πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι κορυφαὶ ῥόμβου.

Θεώρημα 60—II

536. 1) Δύο ἰσοσκελῆ τραπέζια εἶναι ἴσα ἐὰν ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ὕψη.

2) Αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

537. Σημείωσις. Ἀντιπαραλληλόγραμμον καλεῖται ἀρθρωτὸν σύστημα ἐκ τεσσάρων ῥάβδων, ὡς λ. χ. αἱ ΑΔ, ΒΓ, ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ σχήματος 332, ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς διαγωνίους καὶ μὴ παραλλήλους πλευρὰς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου.

Τὸ σύστημα τοῦτο, τοῦ ὁποίου τὸ παραλληλόγραμμον δὲν εἶναι παρὰ εἰδικὴ περίπτωσις, χρησιμοποιεῖται εὐρέως εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν *ἀντιστροφέων*. Τὰ συστήματα τῶν *ἀρθρωτῶν ῥάβδων* ἔχουν μελετηθῆ λεπτομερῶς καὶ ἐφαρμοσθῆ εἰς πλεῖστα ζητήματα τῆς Γεωμετρίας καὶ Μηχανικῆς. Ἀναλόγως δὲ τῆς χρήσεώς των λαμβάνουσιν διάφορα ὀνόματα, ὡς *ἀντιστροφεύς, διαβήτης τοῦ Peaucellier, σύνθετος διαβήτης, μετασχηματισταὶ* κλπ. (Βλ. ἐπ. § 1203).

Τετράπλευρον τυχὸν

538. Τὸ τετράπλευρον συχνὰ ἀπαντᾶται εἰς τὰς Ἀσκήσεις τῆς Γεωμετρίας καὶ χρήσιμον εἶναι νὰ μελετηθοῦν μερικαὶ περιπτώσεις ἰσότητος δύο τετραπλεύρων καθὼς καὶ ἰδιότητες τινὲς τῶν σχημάτων αὐτῶν.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἰσότητα δύο τετραπλεύρων, καταφεύγομεν ἢ εἰς τὴν ἐπίθεσιν τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἢ εἰς τὴν ἀνάλυσιν αὐτῶν εἰς δύο τρίγωνα (ἴσα καὶ ὁμοίως κείμενα).

Θεώρημα 61

539. Δύο τετράπλευρα εἶναι ἴσα.

1) Ἐὰν ἔχουν τρεῖς πλευρὰς καὶ δύο ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας.

2) Ἐὰν ἔχουν δύο διαδοχικὰς πλευρὰς καὶ τρεῖς διαδοχικὰς γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας.

3) Ἐὰν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς τέσσαρας πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Θεώρημα 62

540. Εἰς πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον, τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀπέναντι πλευρῶν

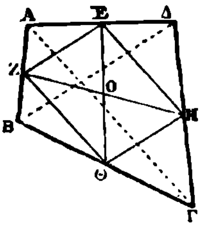
Θεώρημα 62—I

541. Εἰς πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον, τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς περιμέτρου καὶ ἡμιπεριμέτρου αὐτοῦ.

Θεώρημα 63

542. Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα δύο παρακειμένων πλευρῶν εἶναι παράλληλοι, ἀνὰ δύο, πρὸς ἑκάστην τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου καὶ ἀπαρτίζουν ἑπομένως παραλληλόγραμμον ΕΖΘΗ.



Σχ. 333.

Θεώρημα 63—I

543. Εἰς πᾶν τετράπλευρον, αἱ εὐθεῖαι αἵτινες συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἀλληλοδιχοτομοῦνται.

Θεώρημα 63—II

544. Τὸ παραλληλόγραμμον τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι ὀρθογώνιον, ἐὰν αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας ἢ αἱ ἑνοῦσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ εὐθεῖαι ἴσαι.

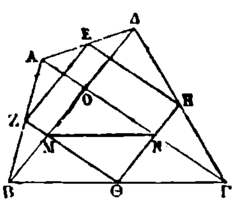
Θεώρημα 63—III

545. Τὸ προηγούμενον παραλληλόγραμμον εἶναι ῥόμβος ἐὰν τὸ τετράπλευρον εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελὲς ἢ ὀρθογώνιον, τετράγωνον δὲ ἐὰν τὸ τετράπλευρον εἶναι τετράγωνον ἢ ἰσοσκελὲς τραπέζιον μὲ διαγωνίους καθέτους ἐπ' ἀλλήλας.

Θεώρημα 64

546. Τὸ παραλληλόγραμμον τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι τὸ ἥμισυ αὐτοῦ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΟ, ἡ εὐθεῖα ΖΘ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ζ τῆς ΑΒ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ. Διέρχεται ἑπομένως καὶ διὰ τοῦ μέσου Μ τῆς πλευρᾶς ΟΒ. Ἀναλόγως, τὸ σημεῖον Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς ΟΓ καὶ ἑπομένως (§ 431, πόρισμα) ἡ ΜΝ εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΑΓ:



Σχ. 334

$$ΜΝ = ΒΘ = ΓΘ.$$

Ἐπειδὴ τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΟΜΝ, ΒΜΘ, ΘΝΓ, ΝΘΜ εἶναι προφανῶς ἴσα, τὸ παραλληλόγραμμον ΟΜΘΝ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΒΟΓ καὶ τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ ἀντίστοιχα παραλληλόγραμμα εἰς τὰ τρία ἄλλα τρίγωνα ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΑ. Ἤτοι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΘΗ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Θεώρημα 64—I

547. Ἐὰν διὰ τῶν κορυφῶν τετραπλεύρου φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους, τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον εἶναι διπλά-

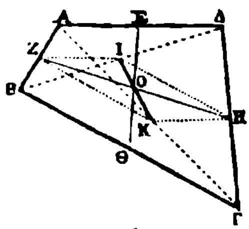
σιον τοῦ τετραπλεύρου καὶ τετραπλάσιον τοῦ παραλληλογράμμου τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀνωτέρω ἀλλὰ πολὺ ἁπλουστέρα· (βλ. καὶ *Μέθοδοι*, § 155).

Θεώρημα 65

548. Εἰς πᾶν τετράπλευρον, αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ αἱ ἑνοῦσαι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἀλληλοδιχοτομοῦνται.

Ἔστω ΑΒΓΔ τυχὸν τετράπλευρον, ΕΘ, καὶ ΖΗ αἱ ἑνοῦσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, ΙΚ ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ.



Σχ. 335.

Ἄς σχηματίσωμεν τὸ τετράπλευρον ΙΖΚΗ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἡ ΙΖ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΔ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς, εἰς δὲ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, ἡ ΚΗ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΔ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Εἶναι ἑπομένως τὸ σχῆμα ΙΖΚΗ παραλληλόγραμμον καὶ αἱ διαγώνιοι ΖΗ καὶ ΙΚ ἀλληλοδιχοτομοῦνται.

Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΖΗ καὶ ΕΘ τέμνονται ἐπίσης εἰς τὰ μέσα αὐτῶν (§ 543), ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Ο εἶναι μέσον καὶ τῶν τριῶν εὐθειῶν ΕΘ, ΖΗ καὶ ΙΚ.

548 α. ***Σημείωσις.*** 1) Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα προετάθη εἰς *Annales de Gerg.* τόμος I (1810 - 11), σ. 232 καὶ ἐλύθη εἰς σελ. 311 μετ' ἐνδιαφερουσῶν ἀναπτύξεων ὑπὸ τῶν Rochat, Lhuilier, Vecten, Tédenat. Βλ. ἐπίσης (§ 1233 β).

2) Αἱ εὐθεῖαι ΕΘ, ΖΗ, ΙΚ καλοῦνται πολλάκις καὶ *διάμεσοι* τοῦ τετραπλεύρου· τὸ ἀνωτέρω θεώρημα διατυποῦται τότε ὡς ἑξῆς:

Αἱ τρεῖς διάμεσοι παντὸς τετραπλεύρου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

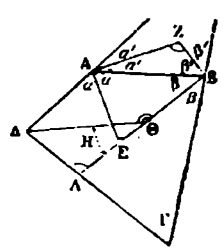
Θεώρημα 66

549. Ἡ γωνία τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων δύο διαδοχικῶν γωνιῶν τετραπλεύρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ· ἡ δὲ γωνία τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἰδίων γωνιῶν.

1) Γωνία $Ε = 180° - \frac{Α + Β}{2}$·

Ἀλλὰ $\frac{\widehat{Α}+\widehat{Β}}{2} = 180° - \frac{\widehat{Γ}+\widehat{Δ}}{2}$.

Ὅθεν $\widehat{Ε} = 180° - \left[180° - \frac{\widehat{Γ}+\widehat{Δ}}{2}\right] = \frac{\widehat{Γ}+\widehat{Δ}}{2}$.



Σχ. 336.

2) Αἱ παραπληρωματικαὶ γωνίαι τῶν Α καὶ Β εἶναι αἱ 180° — Α καὶ 180° — Β.

Ἑπομένως

$$\widehat{Z} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{A} + 180^\circ - \widehat{B}}{2}$$

ἤ

$$\widehat{Z} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}.$$

Ἐπαλήθευσις. Αἱ γωνίαι Ε καὶ Ζ πρέπει νὰ εἶναι παραπληρωματικαί, ἀφοῦ τὸ τετράπλευρον ΑΖΒΕ ἔχει δύο ὀρθὰς γωνίας εἰς τὰ Α καὶ Β. Πράγματι δὲ

$$\widehat{E} + \widehat{Z} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta}}{2} = 180^\circ.$$

Θεώρημα 67

550. **Ἡ ὀξεῖα γωνία τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων δύο ἀπέναντι γωνιῶν τετραπλεύρου ἰσοῦται πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν.**

Ἔστω Θ ἡ γωνία ΔΘΒ τῶν διχοτόμων καὶ Η τὸ παραπλήρωμά της.

Ἡ ἐξωτερικὴ γωνία Λ τοῦ τριγώνου ΒΓΛ ἰσοῦται πρὸς

$$\widehat{\Lambda} = \widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{B}}{2}$$

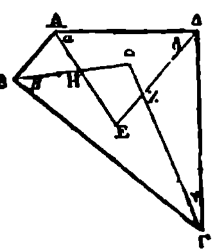
καὶ ἐπομένως $\widehat{H} = 180^\circ - \widehat{\Gamma} - \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{\Delta}}{2}$.

Ἀλλὰ 180° δύνανται νὰ ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ τοῦ ἡμιαθροίσματος $\frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta}}{2}$· ἄρα

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{A} - \widehat{\Gamma}}{2}.$$

Θεώρημα 68

551. **Αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τετραπλεύρου τέμνονται κατὰ τὰς κορυφὰς τετραπλεύρου ἔχοντος παραπληρωματικὰς τὰς ἀπέναντι γωνίας.**



Σχ. 337.

Ἔστω ΑΒΓΔ τυχὸν τετράπλευρον καὶ ΕΖΘΗ τὸ τετράπλευρον τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων.

Αἱ τέσσαρες γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔ ἔχουν ἄθροισμα τέσσαρας ὀρθάς· ἄρα

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2 \text{ ὀρθαί},$$

τῶν δὲ δύο τριγώνων ΑΔΕ, ΒΘΓ τὸ ἄθροισμα τῶν ἕξ γωνιῶν των εἶναι τέσσαρες ὀρθαί, ἤ

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + E + \Theta = 4 \text{ ὀρθαί}.$$

Ἑπομένως $E + \Theta = 2$ ὀρθαί.

Παρατήρησις. Αἱ ἀσκήσεις αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν παραλληλογράμμου, ἢ ὀρθογωνίου (§§ 512, 513), εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις τῆς ἀνωτέρω.

Θεώρημα 68—Ι

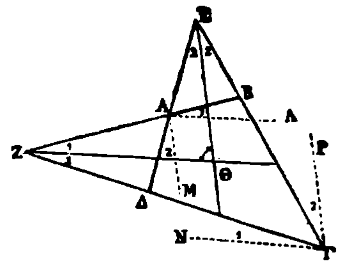
552. Αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τετραπλεύρου τέμνονται κατὰ τὰς κορυφὰς τετραπλεύρου ἔχοντος τὰς ἀπέναντι γωνίας παραπληρωματικάς.

Ἡ ἀπόδειξις ὁμοία.

Θεώρημα 69

553. Ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα δύο ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.

1η Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ΕΘ, ΖΘ αἱ διχοτόμοι, ΑΛ, ΑΜ καὶ ΓΝ, ΓΡ αἱ διὰ τῶν Α καὶ Γ παράλληλοι πρὸς αὐτάς. Εἶναι φανερὸν ὅτι πᾶσαι αἱ γωνίαι 1 εἶναι ἴσαι, ὡς καὶ πᾶσαι αἱ γωνίαι 2.



Σχ. 338.

Αἱ τρεῖς γωνίαι Θ, ΛΑΜ, ΝΓΡ, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς των παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς ἀμφοτέρας ἢ ἀμφοτέρας ἀντιθέτου φορᾶς, εἶναι ἴσαι. Καὶ ἐπειδὴ

$$\widehat{A} = \widehat{\Lambda A M} + \widehat{1} + \widehat{2}$$

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{N\Gamma P} - \widehat{1} - \widehat{2}.$$

διὰ προσθέσεως λαμβάνομεν

$$\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = \widehat{\Lambda A M} + \widehat{N\Gamma P} = 2\widehat{\Theta}$$

ἢ

$$\widehat{\Theta} = \frac{\widehat{A} + \widehat{\Gamma}}{2}.$$

2α Ἀπόδειξις. Εἰς τὸ μὴ κυρτὸν τετράπλευρον ΕΑΖΘ ἔχομεν

$$\widehat{EAZ} = \widehat{\Theta} + \widehat{1} + \widehat{2}$$

εἰς δὲ τὸ ΕΘΖΓ

$$\widehat{\Theta} = \widehat{\Gamma} + \widehat{1} + \widehat{2}.$$

Δι' ἀφαιρέσεως εὑρίσκομεν

$$2\widehat{\Theta} = \widehat{A} + \widehat{\Gamma}.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν αἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικαί, ἡ γωνία Θ τῶν διαγωνίων εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ ἓν τοιοῦτον τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἀγόμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον πρότασιν:

Θεώρημα 69—I

554. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἐγγραψίμου εἰς κύκλον τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

Θεώρημα 70

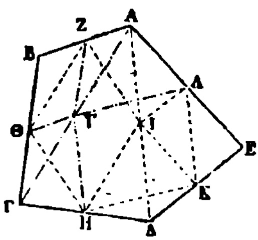
555. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν τεσσάρων κορυφῶν τετραπλεύρου ἀπὸ δοθείσης εὐθείας, εἶναι τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τῆς εὐθείας τοῦ σημείου τομῆς τῶν εὐθειῶν, τῶν συνδεουσῶν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου.

Αἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου ἀπὸ τῆς εὐθείας ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν μέσων τῶν πλευρῶν του ἀπ' αὐτῆς, δηλαδὴ τῶν κορυφῶν τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΘΗ (Σχ. 335). Τὸ τελευταῖον δὲ τοῦτο ἄθροισμα ἰσοῦται, ὡς ἐδείξαμεν (§ 520), πρὸς τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τῆς εὐθείας.

Θεώρημα τοῦ Prouet 70—I

556. Ἓν κυρτὸν πολύγωνον περιττοῦ πλήθους πλευρῶν ὁρίζεται ἐκ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν του.

1) Ἐὰν δοθοῦν τὰ μέσα Ι, Κ, Λ τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου, τοῦτο εἶναι ὡρισμένον. Ἐπειδὴ ἀρκεῖ ἐξ ἑκάστου τῶν σημείων αὐτῶν νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων σημείων.



Σχ. 339.

2) Ἐὰν γνωρίζωμεν τὰ μέσα Ζ, Θ, Η, Κ, Λ τῶν πλευρῶν ἑνὸς πενταγώνου, τοῦτο δύναται ἐπίσης νὰ ὁρισθῇ. Ὑποθέτοντες πράγματι τὸ πεντάγωνον κατεσκευασμένον καὶ φέροντες τυχοῦσαν διαγώνιον αὐτοῦ, λ.χ. τὴν ΑΔ, παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦ παραλληλογράμμου ΖΘΗΙ, ὅπου Ι τὸ μέσον τῆς ΑΔ, αἱ τρεῖς πρῶται κορυφαὶ εἶναι ὡρισμέναι. Εὑρίσκεται ἄρα καὶ ἡ τετάρτη καὶ ὁρίζεται τὸ μέσον τρίγωνον ΙΛΚ τοῦ τριγώνου ΑΕΔ, ἑπομένως καὶ αὐτὸ τὸ τρίγωνον ΑΕΔ.

Μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου ΑΕΔ εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ τοῦ ζητουμένου πενταγώνου εἶναι ἄμεσος.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον θὰ ἐργαζώμεθα δι' ἑπτάγωνον, ἐννεάγωνον κλπ.

Σημείωσις. A. Prouet, Nouvélles Annales de Mathématiques, 1844, σ. 19. Ἐπίσης, ἐπ. § 1049.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

557. Εἰς τὰ ἑπόμενα ζητήματα θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν ἀναγνώρισιν μόνον τῆς φύσεως καὶ θέσεως τοῦ ζητουμένου γ. τόπου. Ἐπειδὴ τὰς κατασκευὰς θὰ ὑποδείξωμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ Β'. Βιβλίου.

Ὁ τόπος δύναται νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ μίαν ἢ περισσοτέρας εὐθείας, μίαν ἢ περισσοτέρας περιφερείας.

Είς ώρισμένας περιπτώσεις, μέρος μόνον μιᾶς γραμμῆς εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος· τὸ ἄλλο μέρος αὐτῆς ἀντιστοιχεῖ, ἐν γένει, εἰς ζήτημα παρουσιάζον ἀναλογίας τινὰς πρὸς ἐκεῖνο εἰς ὃ ἀντιστοιχεῖ ὁ πρῶτος τόπος (§ 570).

Διὰ τὴν εὕρεσιν καὶ κατασκευὴν τῶν γ. τόπων χρήσιμον εἶναι νὰ ἀνατρέχωμεν εἰς τὰς δοθείσας ἀναπτύξεις εἰς τὰς Μεθόδους (§ 56).

Ἡ εὕρεσις τῶν γ. τόπων εἶναι πολὺ ἐνδιαφέρον ζήτημα, ἐπειδὴ ἡ λύσις πλείστων προβλημάτων ἀπαιτεῖ τὴν γνῶσιν καὶ χρῆσιν αὐτῶν.

Τόπος 71

558. Τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν.

Τόπος 71—I

559. Τόπος τῶν μέσων τῶν μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθυγράμμων τμημάτων.

Τόπος 71—II

560. Μεταξὺ δύο παραλλήλων φέρομεν κάθετα ἐπ' αὐτὰς τμήματα καὶ κατασκευάζομεν ἐπ' αὐτῶν ὡς βάσεων τρίγωνα ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα. Ποῖος ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τῶν τριγώνων τούτων;

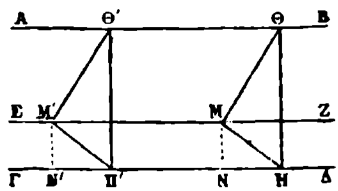
Τόπος 71—III

561. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἀλλὰ τὰ ἴσα τρίγωνα εἶναι τυχόντα.

Ὁ τόπος τῶν κορυφῶν Μ εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὰς δοθείσας.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΝΗ, Μ'Ν'Η' εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας, ΜΗ = Μ'Η', καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΜΗΝ = Μ'Η'Ν', ὡς συμπληρώματα τῶν ἴσων γωνιῶν Η καὶ Η'.

Ἐπομένως, ΜΝ = Μ'Ν' καὶ αἱ εὐθεῖαι ΜΜ', ΝΝ' εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 340.

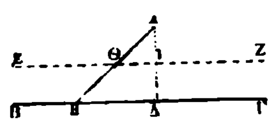
Τόπος 72

562. Δύο κορυφαὶ ἑνὸς ἀμεταβλήτου τριγώνου ὀλισθαίνουν ἐπὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν· ποῖος ὁ τόπος τῆς τρίτης κορυφῆς αὐτοῦ;

Ἀπάντησις καὶ ἀπόδειξις ἡ προηγουμένη.

Τόπος 73.

563. Τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ δοθέντος σημείου πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.



Σχ. 341

Τὸ μέσον τῆς τυχούσης τοιαύτης εὐθείας ΑΗ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἀπεράτου εὐθείας ΕΖ, ἀγομένης παραλλήλως τῆς δοθείσης ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ μέσου Ι τῆς καθέτου ΑΔ.

Τόπος 74

564. Τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ κοινοῦ ὕψους.

Εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν καὶ διὰ τοῦ μέσου τοῦ τυχόντος ὕψους.

Τόπος 74—I

565. Τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων, τῶν λαμβανομένων διὰ τῶν τομῶν ἑνὸς σταθεροῦ ζεύγους παραλλήλων ὑπὸ δύο παραλλήλων ἄλλων εὐθειῶν.

Τόπος 75

566. Τόπος τῶν κορυφῶν τῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς βάσεως ΒΓ καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους υ.

Συμπίπτει πρὸς τὸν τόπον τῶν σημείων τῶν εἰς ἴσας ἀποστάσεις εὑρισκομένων ἀπὸ τῆς εὐθείας ΒΓ. Εἶναι δηλαδὴ τὸ ζεῦγος τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν ΒΓ, ἑκατέρωθεν καὶ εἰς ἀπόστασιν υ ἀπ' αὐτῆς εὑρισκομένων, εὐθειῶν.

567. Παρατήρησις. Μετὰ τὴν σπουδὴν τῶν ἐμβαδῶν, τὸ προηγούμενον ζήτημα θὰ ἠδύνατο νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: *Τόπος τῶν κορυφῶν τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν.*

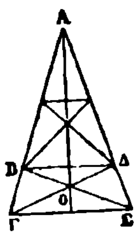
Τόπος 75—I

568. Τόπος τῶν σημείων τομῆς τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Αἱ διάμεσοι τέμνονται εἰς τὰ δύο τρίτα τοῦ μήκους των ἀπὸ τῶν κορυφῶν· ὁ τόπος ἑπομένως εἶναι ἡ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν, ἡ ἀγομένη διὰ σημείου κειμένου εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ὕψους τοῦ τυχόντος τριγώνου.

Τόπος 76

569. Τόπος τῶν σημείων τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν ἰσοσκελῶν τραπεζίων, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου.



Σχ. 342.

Αἱ παράλληλοι ΒΔ καὶ ΓΕ σχηματίζουν μετὰ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας:

$$\widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΑΓΕ}$$

$$\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΑΕΓ}$$

καὶ ἐπειδὴ $\widehat{Γ} = \widehat{Ε}$, ἔπεται

$$\widehat{Β} = \widehat{Δ}.$$

Εἶναι λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἰσοσκελές, ΑΒ = ΑΔ καί, ὡς γνωρίζομεν (§ 534), αἱ διαγώνιοι ΓΔ καὶ ΒΕ τοῦ ἰσοσκελοῦς τρα-

πεζίου ΓΒΔΕ τέμνονται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α. Ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

570. Παρατήρησις. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΓΕ ἢ τὸ ὕψος ἐκ τοῦ Α αὐτοῦ, εἶναι ὁ τόπος τῶν ἐν λόγῳ σημείων, ὅταν τὰ τραπέζια εὑρίσκωνται ἐντὸς τοῦ τριγώνου. Αἱ προεκτάσεις τῆς διχοτόμου πέραν τῆς κορυφῆς ἢ πέραν τῆς βάσεως ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ σημεῖα τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν τραπεζίων, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ παραλλήλων τεμνουσῶν τὰς προεκτάσεις τῶν ΑΓ καὶ ΑΕ.

Τόπος 77

571. Τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν εἶναι δοθὲν μῆκος.

(Βλ. Μέθοδοι, §§ 74, 75).

Τόπος 78

572. Τόπος τῶν κορυφῶν Μ τῶν παραλληλογράμμων σταθερᾶς περιμέτρου ΑΒΜΓ, τῶν λαμβανομένων διὰ τῶν τομῶν τῶν πλευρῶν σταθερᾶς, κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος, γωνίας Α ὑπὸ εὐθειῶν ΜΓ, ΜΒ παραλλήλων πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον.

ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

573. Μὲ τὰ πενιχρὰ ἐφόδια ἐκ τοῦ Α' Βιβλίου δὲν δυνάμεθα νὰ σπουδάσωμεν παρὰ μόνον μεταβολὰς εὐθυγράμμων τμημάτων ἢ τεθλασμένων γραμμῶν.

Τὰ συχνότερον χρησιμοποιούμενα θεωρήματα εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

Πᾶσα κυρτὴ περιβαλλομένη γραμμὴ εἶναι μικροτέρα τῆς περιβαλλούσης γραμμῆς (*Παραδείγματα*, §§ 574, 589, 591).

Ἡ ἐκ σημείου κάθετος ἐπ' εὐθεῖαν εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας πρὸς αὐτήν, ἀγομένης ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου (*Παραδείγματα*, §§ 584, 587).

Χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης καὶ οἱ ἤδη σπουδασθέντες γεωμ. τόποι. Ἐπειδὴ πάντα τὰ σημεῖα ἑνὸς θεωρηθέντος τόπου ἔχουν μίαν κοινὴν ἰδιότητα ἐνῷ τὰ ἐκτὸς αὐτοῦ σημεῖα ἀπέχουν περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον ἀπὸ δοθείσης εὐθείας ([40]) (*Παράδειγμα*, § 580).

Ἡ μέθοδος διὰ διπλασιασμοῦ ἢ συμμετρίας (§ 145) δίδει πολλάκις πολὺ ἁπλᾶς λύσεις (*Παραδείγματα*, §§ 574, 577, 582 2α Ἀπόδειξις).

Ἡ ἑπομένη, τέλος, παρατήρησις ὁδηγεῖ εἰς πολλὰς περιπτώσεις, ἂν ὄχι εἰς τὴν ἀπόδειξιν, τοὐλάχιστον εἰς τὴν ἀνεύρεσιν τοῦ ζητουμένου μεγίστου ἢ ἐλαχίστου:

Ἐὰν ἓν τρίγωνον μεταβάλλεται ἀλλ' εἰς τρόπον, ὥστε νὰ διατηρῇ μίαν πλευρὰν ἢ μίαν γωνίαν σταθεράν, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ζητούμενον μέγιστον ἢ ἐλάχιστον. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι τὸ κοινὸν ὅριον δύο τριγώνων ἴσων μεταξύ των καὶ συμμετρικῶν πρὸς

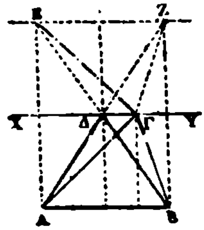
---

40. Σημ. μετ. Ἐπειδὴ οἱ τόποι τοῦ Α'. Βιβλίου εἶναι εὐθεῖαι.

τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς κοινῆς πλευρᾶς ἢ τὴν διχοτόμον τῆς κοινῆς γωνίας αὐτῶν. Ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ συγκρίνωμεν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον πρὸς ἓν ἄλλο τρίγωνον, πληροῦν τοὺς τεθέντας ὅρους. (*Παραδείγματα*, §§ 574, 581, 582, 583) ([41]).

Πρόβλημα 79

574. Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, ποῖον τὸ ἔχον τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν;



Σχ. 343.

Ἔστωσαν Ε καὶ Ζ τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τῶν Α καὶ Β πρὸς τὴν ΧΥ.

Τὸ ἄθροισμα ΑΓ + ΓΒ ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΓ + ΓΖ $\leqslant$ τῆς εὐθείας ΑΔΖ. Γίνεται λοιπὸν ἐλάχιστον διὰ Γ σ. μπῖπτον πρὸς τὸ Δ, δηλ. διὰ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΔΒ.

Πρόβλημα 79—I

575. Ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν ἐχόντων κοινὴν διαγώνιον καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἀπέναντι αὐτῆς κορυφαὶ εὑρίσκονται ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς τὴν διαγώνιον ταύτην, ποῖον τὸ ἐλαχίστης περιμέτρου;

Εἶναι ὁ ρόμβος, κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

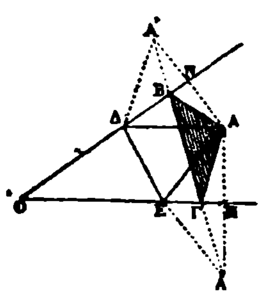
Πρόβλημα 79—II

576. Ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν ἐχόντων κοινὴν τὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, ποῖον τὸ ἐλαχίστης περιμέτρου;

Τὸ ὀρθογώνιον.

Πρόβλημα 80

577. Ἐκ τῶν τριγώνων μὲ κοινὴν κορυφὴν Α καὶ τὰς ἄλλας κορυφὰς ἐπὶ τῶν πλευρῶν δοθείσης ὀξείας γωνίας Ο, ποῖον τὸ ἐλαχίστης περιμέτρου;



Σχ. 344.

Ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὰ συμμετρικὰ σημεῖα Α', Α'' τοῦ Α πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Ο, διὰ νὰ διαπιστώσωσωμεν ἀμέσως ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ τοῦ σχήματος. Ἐπειδὴ διὰ τυχὸν ἄλλο τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι

περιμ. ΑΔΕ = Α'Ε + ΕΔ + ΔΑ'' > εὐθείας Α'ΓΒΑ''.

Πρόβλημα 80—I

578. Ἐκ τῶν τεθλασμένων γραμμῶν ΑΓΒΔ, μὲ ἄκρα δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ κορυφὰς Γ, Δ ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ποία ἡ ἐλαχίστου μήκους;

41. Σημ. μετ. Σκοτεινόν. Ἡ δικαιολογία τῆς παρατηρήσεως βασίζεται μᾶλλον ἐπὶ τῶν εἰδικῶν αὐτῶν παραδειγμάτων.

Λύσις ἀνάλογος τῆς προηγουμένης.

Τοῦ αὐτοῦ εἴδους πρόβλημα δύναται νὰ τεθῇ καὶ διὰ τεθλασμένην γραμμὴν μὲ κορυφὰς κειμένας ἐπὶ δοθεισῶν εὐθειῶν οἱουδήποτε πλήθους.

Πρόβλημα 81

579. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α εἶναι ἐλάχιστον.

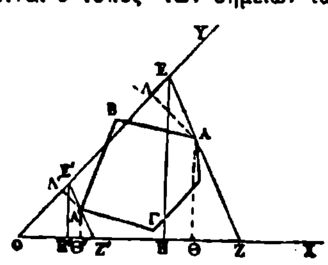
Εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς μεγαλυτέρας ἐκ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

Τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα εἶναι τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτῆς ὕψος τοῦ τριγώνου.

Πρόβλημα 82

580. Δίδονται πολύγωνον καὶ δύο εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΥ. Ποῖον τὸ σημεῖον τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα λ τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς εὐθείας ταύτας εἶναι μέγιστον ἢ ἐλάχιστον;

Ἡ βάσις ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν δύο ἴσων πλευρῶν εἶναι σταθερόν, ἴσον πρὸς τὸ ἐπὶ μίαν τούτων ὕψος (§§ 20, 74).



Σχ. 345.

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης ὁδηγούμενοι, γράφομεν διὰ τῆς ἀπώτερον τοῦ σημείου Ο κορυφῆς Α τοῦ πολυγώνου, εὐθεῖαν ΕΖ εἰς τρόπον, ὥστε ΟΕ = ΟΖ. Ἡ κορυφὴ αὕτη εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς περιμέτρου διὰ τὸ ὁποῖον τὸ μῆκος λ γίνεται μέγιστον καὶ εἶναι τοῦτο:

$$ΑΘ + ΑΛ = ΕΗ.$$

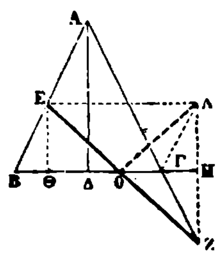
Ἡ ἐγγύτερον τοῦ Ο εὑρισκομένη κορυφὴ τοῦ Α' τοῦ πολυγώνου ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα

$$Α'Θ' + Α'Λ' = Ε'Η'$$

ὅπου πάλιν ΟΕ' = ΟΖ' ἢ Ε'Ζ' παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ.

Πρόβλημα 83

581. Ἐκ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων τὴν ἰδίαν γωνίαν εἰς τὴν κορυφὴν καὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης εἶναι σταθερόν, ποῖον τὸ μικροτέρας βάσεως;



Σχ. 346.

1η Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσοσκελὲς ἐκ τῶν τριγώνων τούτων καὶ ΕΑΖ τὸ τυχὸν ἐξ αὐτῶν· ἐπειδὴ

$$ΑΒ + ΑΓ = ΑΕ + ΑΖ$$

ἕπεται

$$ΒΕ = ΓΖ.$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ βάσις ΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

Φέρομεν τὰς καθέτους ΕΘ, ΖΗ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΒΘ, ΓΖΗ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας τὰς ὑποτεινούσας καὶ τὴν γωνίαν Β = ΖΓΗ· ἄρα

$$ΒΘ = ΓΗ \quad \text{καὶ} \quad ΘΗ = ΒΓ.$$

Ἀλλ' ἡ προβολὴ ΘΗ τῆς ΕΖ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ εἶναι προφανῶς μικροτέρα τῆς ΕΖ· ἑπομένως

$$ΒΓ < ΕΖ.$$

2α Ἀπόδειξις. Ἡ συμμετρία ὁδηγεῖται εἰς ἁπλουστέραν ἀπόδειξιν. Ἔστω πράγματι Λ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ζ πρὸς τὴν ΒΓ. Θὰ ἔχωμεν ΟΛ = ΟΖ, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΒΕ καὶ ΓΛ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καθὼς ἐπίσης καὶ αἱ ΒΓ καὶ ΕΛ. Καὶ ἐπειδὴ

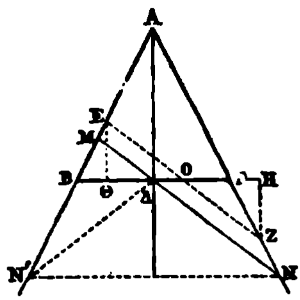
$$ΕΛ < ΕΟ + ΟΛ,$$

συνάγομεν $\quad ΒΓ < ΕΖ.$

Πρόβλημα 84

582. Δίδονται γωνία Α κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς διχοτόμου αὐτῆς. Διὰ τοῦ Δ φέρομεν τέμνουσαν τυχοῦσαν ΜΔΝ. Ποῖον ἐκ τῶν τριγώνων ΑΜΝ ἔχει τὴν ἐλαχίστην περίμετρον;

1η Ἀπόδειξις. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, μὲ βάσιν ΒΔΓ κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α, εἶναι τὸ ἐλαχίστης περιμέτρου.



Σχ. 347.

Πράγματι, ἔστω τρίγωνον ΑΕΖ διὰ τὸ ὁποῖον ΒΕ = ΓΖ· θὰ ἔχωμεν

$$ΒΓ < ΕΖ, \qquad (§\ 581)$$

καὶ ἐπειδὴ ΘΕ = ΖΗ, θὰ εἶναι ἐπίσης ΘΟ = ΟΗ καὶ τὸ σημεῖον Ο θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τμήματος ΔΓ.

Ἔστω τώρα ΜΔΝ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ· ἐπειδὴ προφανῶς

$$ΜΝ > ΕΖ,$$

κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι καὶ

$$ΜΝ > ΒΓ.$$

Ἐξ ἄλλου $\quad ΑΜ + ΑΝ > ΑΕ + ΑΖ = ΑΒ + ΑΓ·$

ὥστε

περ/μ. $ΑΜΝ = ΑΜ + ΑΝ + ΜΝ > ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ =$ περ/μ. ΑΒΓ:

Δηλ. τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἐλαχίστης περιμέτρου.

2α Ἀπόδειξις. Ἡ μέθοδος τῆς συμμετρίας ὁδηγεῖ πάλιν εἰς μίαν πολὺ ἁπλῆν ἀπόδειξιν.

Ἔστω Ν' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ν πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α· θὰ εἶναι ΔΝ' = ΔΝ καὶ ἡ ΔΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΜΔΝ'.

Ἀλλ' ἡ διχοτόμος τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν πλευρῶν, ἀφοῦ περιέχεται μεταξὺ τῶν ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ὕψους καὶ διαμέσου (§§ 500, 646)· εἶναι ἑπο-

μένως μικροτέρα τῆς τελευταίας ταύτης εὐθείας, ἥτις πάλιν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν πλευρῶν (§ 455). Ὥστε διὰ τὸ τρίγωνον Ν'ΔΜ

$$\text{ΔΒ} < \text{διαμέσου ἐκ τοῦ Δ} < \frac{\text{ΔΜ}+\text{ΔΝ}'}{2}$$

ἢ

$$2\,\text{ΔΒ} < \text{ΔΜ}+\text{ΔΝ}' = \text{ΜΝ}.$$

δηλ.

$$\text{ΒΓ} < \text{ΜΝ}.$$

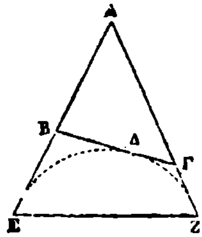
Πρόβλημα 85

583. Δοθέντος τριγώνου, προεκτείνομεν τὰς δύο πλευρὰς αὐτοῦ πέραν τῆς βάσεως εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν προεκτάσεων νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τῆς βάσεως. Ὑπὸ ποίας συνθήκας ἡ συνδέουσα τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων εὐθεῖα γίνεται ἐλαχίστη;

Ἔστω Δ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως, ΒΔ = ΒΕ καὶ ΓΔ = ΓΖ. Φέρομεν καὶ τὴν ΕΖ.

Τὸ τρίγωνον ΑΕΖ ἔχει σταθερὰν τὴν γωνίαν Α, ὡς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του ΑΕ καὶ ΑΖ, ἀφοῦ

$$\text{ΑΕ}+\text{ΑΖ} = \text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}+\text{ΒΓ}.$$



Σχ. 348.

Γίνεται ἑπομένως (§ 581) ἡ βάσις του ΕΖ ἐλαχίστη διὰ

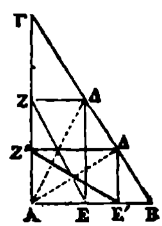
$$\text{ΑΕ} = \text{ΑΖ} = \frac{\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΑ}}{2}.$$

Παρατήρησις. Τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῶν μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου μιᾶς τῶν παρεγγεγραμμένων εἰς αὐτὸ περιφερειῶν.

Πρόβλημα 86

584. Ἐκ σημείου Δ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὰς καθέτους ΔΕ, ΔΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας. Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ Δ ἡ συνδέουσα τοὺς πόδας τῶν καθέτων εὐθεῖα ΕΖ ἔχει τὸ ἐλάχιστον μῆκος;

Διὰ τὸ τυχὸν σημεῖον Δ εἶναι ΕΖ = ΑΔ, ἡ δὲ μικροτέρα ἐκ τῶν εὐθειῶν ΑΔ εἶναι ἡ ΑΔ', κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Ἡ ἐλαχίστη ἑπομένως εὐθεῖα ΕΖ εἶναι ἡ Ε'Ζ'.



Σχ. 349.

Πρόβλημα 86—1

585. Διὰ σημείου Δ, λαμβανομένου ἐπὶ τῆς περιμέτρου ῥόμβου, φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ σχήματος καὶ θεωροῦμεν τὸ ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον. Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ σημείου Δ τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων τοῦ ὀρθογωνίου γίνεται ἐλάχιστον;

Λύσις ἀνάλογος τῆς προηγουμένης.

Πρόβλημα 86—II

586. Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ σημείου Δ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως τὸ ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον τοῦτο ἔχει τὴν μεγίστην ἢ τὴν ἐλαχίστην περίμετρον;

Κατὰ προηγούμενον πρόβλημα (§ 579), ἡ μεγίστη περίμετρος λαμβάνεται διὰ θέσιν τοῦ σημείου Δ συμπίπτουσαν πρὸς ἓν τῶν ἄκρων τῆς μεγαλυτέρας διαγωνίου τοῦ ρόμβου—ἂν καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον τότε ὀρθογώνιον ἔχει ὡς ὕψος μηδὲν καὶ περίμετρον διπλασίαν τῆς διαγωνίου αὐτῆς.

Ἀναλόγως, τὸ ἐλάχιστον λαμβάνεται διὰ Δ συμπῖπτον πρὸς ἓν τῶν ἄκρων τῆς μικροτέρας διαγωνίου. Διὰ πᾶσαν ἄλλην θέσιν τοῦ Δ, ἡ περίμετρος τοῦ ἀντιστοίχου ὀρθογωνίου περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ διπλασίου τοῦ μήκους τῆς μικροτέρας διαγωνίου καὶ τοῦ διπλασίου τῆς μεγαλυτέρας.

Πρόβλημα 87

587. Διὰ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν εὐθεῖαν ΧΥ καὶ τὰς καθέτους ΒΔ, ΓΕ ἐπ' αὐτήν. Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ τριγώνου περὶ τὸ Α τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων τούτων γίνεται μέγιστον;

1) Διὰ τοῦ μέσου Ζ τῆς ΒΓ φέρομεν κάθετον ΖΘ ἐπὶ τὴν ΧΥ. Εἰς τὸ τραπέζιον ΔΒΓΕ θὰ ἔχωμεν

$$ΒΔ + ΓΕ = 2 . ΖΘ.$$

Τὸ μέγιστον ἑπομένως τοῦ ἀριστερὰ ἀθροίσματος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον τοῦ μήκους ΖΘ· καὶ ἐπειδὴ

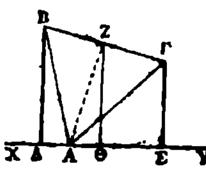
$$ΖΘ < ΑΖ,$$

γίνεται φανερὸν ὅτι τὸ μέγιστον τοῦ μήκους αὐτοῦ λαμβάνεται διὰ ΖΘ = ΑΖ, ἢ εὐθεῖαν ΧΥ κάθετον ἐπὶ τὴν διάμεσον ΑΖ τοῦ τριγώνου.

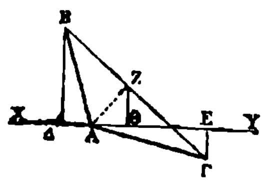
2) Τὸ τμῆμα ΖΘ ἐλαττοῦται ἐφ' ὅσον ἡ εὐθεῖα ΖΑ πλησιάζῃ πρὸς τὴν ΧΥ.

Ὅταν τὸ σημεῖον Γ πέσῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας, τότε

$$ΖΘ = \frac{ΒΔ}{2}.$$



Σχ. 350.



Σχ. 351.

Διὰ θέσεις τῆς ΑΓ κάτω τῆς ΧΥ (Σχ. 351), θὰ πρέπει νὰ θεωρῶμεν τὴν ἀπόστασιν ΓΕ ὡς ἀρνητικὸν μῆκος (§ 436, 3η περ/σις). Τότε

$$ΖΘ = \frac{ΒΔ - ΓΕ}{2}.$$

καὶ ἡ διαφορὰ αὕτη μηδενίζεται ὅταν τὸ σημεῖον Ζ φθάσῃ τὴν ΧΥ.

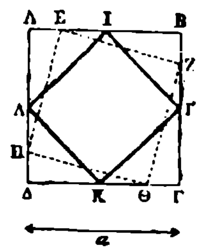
Παρατήρησις. Διὰ τὴν γεωμετρικὴν σπουδὴν τῶν μεταβολῶν τοῦ μήκους τῆς μέσης βάσεως ΖΘ, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὰς διαφόρους θέσεις τῆς ΑΖ περὶ τὸ σημεῖον Α καὶ ἀπὸ τῆς θέσεως ΑΧΥ μέχρι τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΧΥ. Ἡ εὐθεῖα ΖΘ, ἀρχικῶς μηδενική, αὐξάνει συνεχῶς ἕως ὅτου γίνῃ ἴση πρὸς τὴν διάμεσον ΑΖ.

Ἀπὸ ἀναλυτικῆς ἀπόψεως, εὐκόλως ἀναγνωρίζομεν ὅτι αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἰδίου μήκους ΖΘ ἐξαρτῶνται ἀπὸ ἐκείνων τοῦ ἡμιτόνου τῆς γωνίας ΥΑΖ. Ἔστω α ἡ γωνία αὐτὴ καὶ μ τὸ μῆκος τῆς διαμέσου ΑΖ.

Θὰ ἔχωμεν: $ZΘ = μ\ ημ\ α$. Ὅταν ἡ γωνία α εἶναι 0, τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὸ μῆκος ΖΘ· ὕστερον τὸ μῆκος τοῦτο αὐξάνει, διὰ νὰ καταστῇ ἴσον πρὸς μ, διὰ $α = 90^\circ$. Ἀκολούθως ἐλαττοῦται διὰ συνεχιζομένην αὔξησιν τῆς γωνίας. Διὰ $α = 180^\circ$, τὸ μῆκος ΖΘ μηδενίζεται ἐκ νέου, διὰ $α > 180^\circ$ ἡ τιμὴ τοῦ ΖΘ καθίσταται ἀρνητικὴ καὶ ἴση πρὸς $-μ$ διὰ $α = 270^\circ$. Κατόπιν, διατηρουμένη πάντοτε ἀρνητική, ἐλαττοῦται κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ ἐπαναμηδενίζεται διὰ $α = 360^\circ$.

Πρόβλημα 88

588. **Ἀπὸ τῶν κορυφῶν ἑνὸς τετραγώνου καὶ ἀκολουθοῦντες τὴν περίμετρον αὐτοῦ καθ' ὡρισμένην φοράν, λαμβάνομεν ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς ὡρισμένον μῆκος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τετράγωνον ἐκ τῶν ἐχόντων κορυφὰς τὰ πέρατα τῶν μηκῶν τούτων.**



Σχ. 352.

Ἔστω $ΑΕ = ΒΖ = ΓΘ = ΔΗ$.

1) Θὰ πρέπει πρῶτον νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σχῆμα εἶναι τετράγωνον (§ 506).

2) Ἐπειδὴ $ΑΕ + ΑΗ = ΑΔ =$ ποσότης σταθερά, τὸ ἐλάχιστον τῆς ὑποτεινούσης ΕΗ λαμβάνεται διὰ πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας (§ 581).

Εἶναι δηλ. τὸ ἐλάχιστον τετράγωνον ΙΓΚΛ ἐκεῖνο μὲ κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ἀρχικοῦ τετραγώνου.

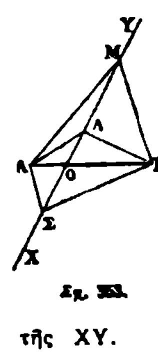
Πρόβλημα 89

589. Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων τῶν σημείων δοθείσης εὐθείας.

1) *Τὰ δοθέντα σημεῖα εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας.*

α) Ἐὰν ἡ εὐθεῖα τέμνῃ τὴν ΑΒ, τὸ σημεῖον τομῆς Ο εἶναι τὸ τοῦ μικροτέρου ἀθροίσματος· ἐπειδὴ

$$AB < ΑΛ + ΛΒ.$$



Σχ. 353.

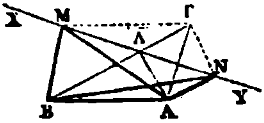
β) Τὸ ἄθροισμα αὐξάνει, ὅταν τὸ κινητὸν σημεῖον ἀπομακρύνεται τῆς ΑΒ. Πράγματι, ἡ τεθλασμένη περιβαλλομένη γραμμὴ $ΑΛ + ΛΒ$ εἶναι μικροτέρα τῆς περιβαλλούσης $ΑΜ + ΒΜ$.

γ) Τὸ ἄθροισμα τείνει εἰς ἄπειρον ὅταν τὸ σημεῖον Μ ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον κατὰ τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην διεύθυνσιν ἐπὶ τῆς ΧΥ.

Σύνοψις. Τὸ ἄθροισμα μεταβάλλεται ἀπὸ ΑΒ ἕως $+\infty$.

Διὰ δοθὲν ἄθροισμα $2\alpha >$ ΑΒ, ὑπάρχουν δύο σημεῖα Μ καὶ Ν τῆς εὐθείας καὶ δύο μόνον, διὰ τὰ ὁποῖα:

$$AM + MB = AN + NB = 2\alpha.$$



Σχ. 354.

2) *Τὰ δοθέντα σημεῖα εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας*.

Διὰ νὰ ἀναγάγωμεν τὴν περίπτωσιν ταύτην εἰς τὴν προηγουμένην, ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν τὸ σημεῖον Γ, συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς τὴν ΧΥ. Ἐπειδὴ τότε $AN + BN = \Gamma N + BN$.

Ἑπομένως, τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος παρέχεται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΛΓ καὶ τὸ ἄθροισμα μεταβάλλεται ἀπὸ ΒΓ μέχρις $+\infty$.

590. ***Σημείωσις***. Ἐκ τῆς προηγουμένης σπουδῆς, δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν πολλὰς συνεπείας ἀναφερομένας εἰς τὴν ἔλλειψιν. (G. n° 613).

Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων, Α, Β, εἶναι σταθερόν. Ἐὰν λοιπὸν 2α εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων ΑΜ, ΒΜ, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι:

1) Τὸ ἄθροισμα 2α πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως ΑΒ.

2) Πᾶσα εὐθεῖα, διερχομένη μεταξὺ τῶν ἑστιῶν Α, Β, τέμνει τὴν καμπύλην κατὰ δύο σημεῖα (σχ. 353).

3) Πᾶσα εὐθεῖα, μὴ διερχομένη μεταξὺ τῶν ἑστιῶν (σχ. 354), τέμνει τὴν ἔλλειψιν κατὰ δύο σημεῖα, ὅταν 2α εἶναι μεγαλύτερον τῆς εὐθείας ΒΓ, τῆς συνδεούσης μίαν τῶν ἑστιῶν πρὸς τὸ συμμετρικὸν πρὸς τὴν εὐθεῖαν τῆς ἑτέρας ἑστίας.

4) Ἐὰν $2\alpha <$ ΒΓ, ἡ εὐθεῖα δὲν συναντᾷ τὴν καμπύλην.

5) Ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς καμπύλης ὅταν $2\alpha =$ ΒΓ· ἐπειδὴ τότε τὰ δύο σημεῖα τομῆς Μ, Ν προσεγγίζουν ἀπείρως πρὸς ἄλληλα.

6) Ἡ ἔλλειψις εἶναι κυρτὴ καμπύλη, ἀφοῦ μία εὐθεῖα δὲν δύναται νὰ ἔχῃ μετ' αὐτῆς παρὰ δύο μόνον, τὸ πολύ, κοινὰ σημεῖα.

Πρόβλημα 90

591. Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς διαφορᾶς τῶν προηγουμένων ἀποστάσεων.

(*Μέθοδοι*, §§ 258 - 261).

Παρατήρησις. Ὅπως ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἑνὸς κινητοῦ σημείου εὐθείας ΧΥ, μᾶς ὡδήγησεν εἰς ἰδιότητας τῆς ἐλλείψεως (§ 590), οὕτω καὶ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῆς διαφορᾶς τῶν ἰδίων ἀποστάσεων δύναται νὰ μᾶς γνωρίσῃ διαφόρους ἰδιότητας τῆς ὑπερβολῆς (§ 260). Εἶναι ἐν τούτοις ἡ δευτέρα αὕτη σπουδὴ μακροτέρα καὶ μᾶλλον ἐπίπονος τῆς πρώτης.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΙ

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Ἀποστάσεις καὶ χορδαὶ

592. Διὰ τὴν ἁπλουστέραν ἀπόδειξιν τῶν θεωρημάτων τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ, χρήσιμον εἶναι ὅπως ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰ ἑπόμενα θεωρήματα.

α) *Ἡ ἐλαχίστη καὶ ἡ μεγίστη ἀπόστασις ἑνὸς σημείου ἀπὸ μιᾶς περιφερείας μετροῦνται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὸ σημεῖον μετὰ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας.*

β) *Ἡ ἐλαχίστη καὶ ἡ μεγίστη ἀπόστασις δύο σημείων κειμένων, ἀντιστοίχως, ἐπὶ δύο περιφερειῶν, μετροῦνται ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.*

γ) *Ἐκ δύο ἀνίσων χορδῶν μιᾶς περιφερείας, μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ὀλιγώτερον τοῦ κέντρου ἀπέχουσα.*

Παρατήρησις. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν θεωρημάτων τοῦ Κεφαλαίου τούτου εἶναι ἐπαρκῆ τὰ θεωρήματα τ' ἀναφερόμενα εἰς τὰς περιπτώσεις ἰσότητος τῶν τριγώνων. Ἐν τούτοις θὰ ὑποθέσωμεν γνωστὰ καὶ τὰ σχετιζόμενα πρὸς τὴν μέτρησιν τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον γωνιῶν· ἐπειδὴ ἡ γνῶσις αὐτῶν μᾶς ὁδηγεῖ εἰς ἀποδείξεις πολὺ μᾶλλον ἁπλουστέρας ἀπὸ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι στηρίζονται μόνον ἐπὶ τῶν θεωρημάτων τῆς ἰσότητος δύο τριγώνων.

Μία ἢ δύο ἀσκήσεις προϋποθέτουν τὴν γνῶσιν τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐφαπτομένης μιᾶς καμπύλης.

Θεώρημα 91

593. **Πᾶσα εὐθεῖα ΑΒ, διαιροῦσα περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα τμήματα, ΑΜΒ καὶ ΑΝΒ, εἶναι διάμετρος αὐτῆς.**

Θεώρημα 92

594. **Τὸ μεγαλυτέρου μήκους εὐθύγραμμον τμῆμα, ἐκ τῶν ὁριζομένων ὑπὸ σημείου Μ καὶ τῶν διαφόρων σημείων μιᾶς περιφερείας (Ο), εἶναι τὸ ΜΟΑ, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου καὶ καταλῆγον εἰς τὴν περιφέρειαν.**

Θεώρημα 93

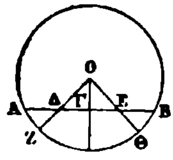
595. **Ἐὰν δύο περιφέρειαι δὲν ἔχουν κοινὰ σημεῖα, ἡ μικροτέρα ἀπόστασις δύο σημείων κειμένων, ἀντιστοίχως, ἐπ' αὐτῶν μετρεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου.**

Θεώρημα 94

596. **Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις δύο περιφερειῶν (Α) καὶ (Β), ἡ μεγαλυτέρου μήκους τέμνουσα αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου.**

Θεώρημα 95

597. Δύο σημεῖα κείμενα ἐπὶ μιᾶς χορδῆς καὶ ἴσον ἀπέχοντα τοῦ μέσου αὐτῆς, ἴσον ἀπέχουν καὶ τῆς περιφερείας.



Σχ. 355.

Θεώρημα 95—I

598. Δύο σημεῖα ἐπὶ μιᾶς ἐφαπτομένης καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς, ἴσον ἀπέχουν καὶ τῆς περιφερείας.

Θεώρημα 95—II

599. Τὰ σημεῖα τῆς μιᾶς ἐκ δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν, τὰ ἴσον ἀπέχοντα τοῦ σημείου ἐπαφῆς, ἴσον ἀπέχουν ἀπὸ τῆς ἄλλης περιφερείας.

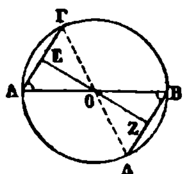
Θεώρημα 96

600. Δύο παράλληλοι χορδαί, ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων μιᾶς διαμέτρου, εἶναι ἴσαι καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ ἄλλα ἄκρα των εἶναι ἐπίσης διάμετρος.

1) Τοξ ΒΓ = τοξ ΑΔ, ὡς περιεχόμενα μεταξὺ τῶν ἴσων ἐγγεγραμμένων γωνιῶν Α καὶ Β. Ἐὰν ἐξ ἑκάστου τῶν τόξων τούτων ἀφαιρέσωμεν μίαν ἡμιπεριφέρειαν, λαμβάνομεν

τοξ ΑΓ = τοξ ΒΔ

ἄρα: χορδὴ ΑΓ = χορδὴ ΒΔ.



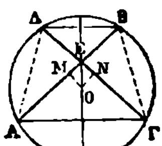
Σχ. 356.

2) Τὸ τοξ (ΒΓ + ΒΔ) εἶναι ἴσον πρὸς μίαν ἡμιπεριφέρειαν, ἀφοῦ $\widehat{ΒΔ} = \widehat{ΑΓ}$, καὶ ἑπομένως ἡ ΓΔ εἶναι διάμετρος.

Ἄλλη ἀπόδειξις. Ἐὰν δὲν ἐπιθυμῶμεν νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἔννοιαν τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, ἂς φέρωμεν τὴν κάθετον ΕΟΖ. Τὰ τρίγωνα ΑΟΕ, ΒΟΖ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην· ἑπομένως: ΟΕ = ΟΖ καὶ $\widehat{ΑΓ} = \widehat{ΒΔ}$. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου μέρους παραμένει ἡ ἰδία.

Θεώρημα 96—I

601. Διὰ τῶν ἄκρων χορδῆς κυκλικοῦ τμήματος καὶ ἐντὸς αὐτοῦ φέρομεν δύο χορδὰς ἴσον κεκλιμένας πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ τμήματος. Δείξατε ὅτι αἱ χορδαὶ αὗται εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι ἡ χορδὴ τῶν ἄκρων των εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ τμήματος.



Σχ. 357.

Θεώρημα 97

602. Δύο χορδαὶ ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τὴν διάμετρον, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς των, εἶναι ἴσαι.

Ἔστωσαν ΟΜ, ΟΝ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς χορδὰς ἐκ τοῦ κέντρου.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΜΕ, ΟΝΕ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα κοι-

νην τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ἴσην μίαν ὀξεῖαν γωνίαν, τὴν ΜΕΟ = ΝΕΟ· ἄρα ΟΜ = ΟΝ καὶ αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΓΔ, ὡς ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ κέντρου, εἶναι ἴσαι.

Θεώρημα 97—Ι

603. Δύο τέμνουσαι ἢ ἐφαπτόμεναι μιᾶς περιφερείας, μὴ τεμνόμεναι καὶ ὁρίζουσαι ἐπ' αὐτῆς ἴσα τόξα, εἶναι παράλληλοι.

Θεώρημα 98

604. Δύο χορδαὶ ἑνὸς κύκλου, ἴσαι καὶ τεμνόμεναι, εἶναι αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου.

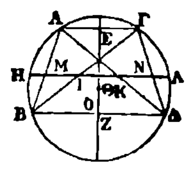
Θεώρημα 98—Ι

605. Δύο χορδαὶ ἑνὸς κύκλου, ἴσαι καὶ μὴ τεμνόμεναι, εἶναι αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς καὶ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν τραπεζίου.

Θεώρημα 99

606. Δύο ἴσαι χορδαὶ μιᾶς περιφερείας καὶ τὰ τόξα ἅτινα αὗται ὑποτείνουν, ἀποκόπτουν ἴσα τμήματα ἐπὶ πάσης χορδῆς παραλλήλου προς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν τὰ μέσα τῶν χορδῶν.

Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ αἱ ἴσαι χορδαί, Ο τὸ κέντρον τῆς περιφερείας καὶ Θ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς διαμέτρου, τῆς καθέτου ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΒΔ, καὶ τῆς παραλλήλου ΗΛ πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰ μέσα τῶν ΑΒ, ΓΔ.



Σχ. 358.

Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ τὰς τρεῖς παραλλήλους χορδὰς διαιρεῖ ἑκάστην εἰς δύο μέρη ἴσα· ἐπομένως, τὸ μέσον Θ τῆς χορδῆς ΗΛ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΕΖ.

Ἀφ' ἑτέρου, τὰ δύο σχήματα ΕΖΔΓ καὶ ΕΖΒΑ εἶναι ἴσα καὶ ἐφαρμόσιμα· ἄρα ΘΝ = ΘΜ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ΜΗ = ΝΛ.

Παρατήρησις. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν χορδῶν ΑΔ, ΒΓ ἕπεται: ΗΙ = ΙΛ.

Θεώρημα 99—Ι

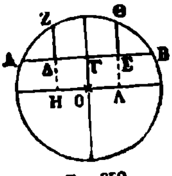
607. Ἐὰν μία χορδὴ στρέφεται περὶ σταθερὸν σημεῖον καὶ ἐκ τῶν ἄκρων αὐτῆς φέρωμεν ἑκάστοτε χορδὰς παραλλήλους πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ ἄκρα αὐτῶν διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου. (Εἰδικὴ περίπτωσις ἑνὸς προβλήματος τοῦ Poncelet (Βλ. § 1236).

Ἔστω ΑΒ ἡ μεταβλητὴ χορδὴ διὰ τοῦ σημείου Μ (Σχ. 358)· ἡ χορδὴ ΓΔ θὰ διέρχεται πάντοτε διὰ τοῦ σημείου Ν, συμμετρικοῦ τοῦ Μ πρὸς τὴν κάθετον ΕΟΖ.

Θεώρημα 100

608. Εἰς δύο σημεῖα κείμενα ἐπὶ μιᾶς χορδῆς καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ μέσου αὐτῆς, ὑψοῦμεν καθέτους ἐπὶ τὴν χορδήν, περατουμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Δείξατε ὅτι αἱ κάθετοι αὗται εἶναι ἴσαι.

Παρατήρησις. Αἱ κάθετοι ΔΖ, ΕΘ ὀνομάζονται καὶ *τεταγμέναι* τῶν σημείων Ζ καὶ Θ, ἀναφορικῶς πρὸς τὸ τόξον ΑΖΘΒ καὶ τὴν χορδήν του.



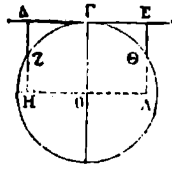
Σχ. 359.

Θεώρημα 100—Ι

609. Ἀναφορικῶς πρὸς τόξον καὶ τὴν χορδήν του, δύο ἴσαι τεταγμέναι αὐτοῦ ἴσον ἀπέχουν τοῦ μέσου τῆς χορδῆς.

Θεώρημα 101

610. Ἐὰν αἱ τεταγμέναι ΔΖ καὶ ΕΘ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς, εἶναι ἴσαι.



Σχ. 360.

Τὸ θεώρημα τοῦτο, ἀνάλογον πρὸς τὸ προηγούμενον, ὑποθέτει τὴν γνῶσιν τῆς ἑπομένης θεμελιώδους ἰδιότητος: *Ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.*

Παρατήρησις. Εἰς τὴν Τοπογραφίαν τὰ τμήματα ΔΖ καὶ ΕΘ ὀνομάζονται εἰδικῶς *τεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.* (Βλ. *Στοιχεῖα τοπογραφίας* ὑπὸ Edmond Gabriel, σελὶς 323, nº 654).

Θεώρημα 101—Ι

611. **Αἱ ἴσαι ἀποστάσεις ΓΔ, ΓΕ ὁρίζουν ἴσα τόξα ΓΖ, ΓΘ.**

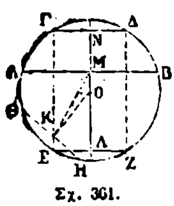
Ἐπειδὴ ΓΕ = ΓΔ, ἕπεται ΟΛ = ΟΗ, ἄρα καὶ ΗΖ = ΛΘ. Ὥστε: ΔΕ = ΘΕ.

Θεώρημα 102

612. Ἡ μεγαλυτέρα ἢ ἡ μικροτέρα χορδή, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν διὰ δοθέντος σημείου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κύκλου, εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ ἡ μία τούτων εἶναι διάμετρος.

Αἱ χορδαὶ αὐταὶ εἶναι ἡ διάμετρος καὶ ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν χορδὴ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ σημεῖον εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ὁρίζεται μόνον ἡ μεγαλυτέρα χορδή· εἶναι ἡ διὰ τοῦ σημείου διάμετρος.



Σχ. 361.

Θεώρημα 102—Ι

613. Δύο χορδαὶ μιᾶς περιφερείας μὲ μήκη λ καὶ λ' εἶναι μεταβληταὶ κατὰ θέσιν. Δείξατε, ὅτι ἡ μεγαλυτέρα ἢ ἡ μικροτέρα ἀπόστασις τῶν μέσων των ἀντιστοιχοῦν εἰς παραλλήλους θέσεις τῶν χορδῶν.

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΗΘ αἱ χορδαί, ΕΖ δὲ καὶ ΓΔ χορδαὶ ἴσαι πρὸς τὴν ΘΗ καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ.

ΜΝ εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπόστασις.

ΜΛ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἀπόστασις.

Θεώρημα 103

614. Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται καὶ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τυχοῦσαν τέμνουσαν, διερχομένην δι' ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς, ἡ μεταξὺ τῶν καθέτων αὐτῶν ἀπόστασις εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα ἢ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν χορδῶν τῶν ὁριζομένων ὑπὸ ἑκάστης περιφερείας ἐπὶ τῆς τεμνούσης.

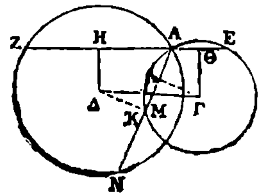
1) Διὰ τὴν τέμνουσαν ΕΖ, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ σημεῖον Α εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν Ε καὶ Ζ, ἔχομεν

$$ΑΗ = \frac{1}{2} ΑΖ$$

$$ΑΘ = \frac{1}{2} ΑΕ$$

ὥστε :

$$ΗΘ = \frac{1}{2} ΖΕ.$$



Σχ. 362.

2) Διὰ τὴν τέμνουσαν ΑΜΝ τὴν τοιαύτην, ὥστε τὸ σημεῖον Α νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΜΝ, εὑρίσκομεν :

$$ΑΚ = \frac{1}{2} ΑΝ$$

$$ΑΛ = \frac{1}{2} ΑΜ.$$

Ὅθεν :

$$ΚΛ = \frac{1}{2} (ΑΝ - ΑΜ) = \frac{1}{2} ΜΝ.$$

Παρατήρησις. Εἰς τὰς ἐφαρμογάς, ὡς μῆκος τεμνούσης διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου δύο περιφερειῶν νοεῖται τὸ μῆκος ΕΖ ἢ ΜΝ, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν σημείων τομῆς τῶν διαφόρων τοῦ σημείου Α.

Θεώρημα 103—Ι

615. Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται, δύο παράλληλοι τέμνουσαι αὐτῶν, δι' ἑκάστου τῶν σημείων τομῆς, εἶναι ἴσαι.

Θεώρημα 104

616. Ἐκ τῶν διαφόρων τεμνουσῶν δύο τεμνομένων περιφερειῶν, τῶν ἀγομένων δι' ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς, μεγαλυτέρα εἶναι ἡ παράλληλος πρὸς τὴν διάκεντρον.

Ἐπειδὴ ἡ τέμνουσα αὕτη εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων.

Ἐφαπτομένη

617. ***Ὁρισμοί.*** 1) *Ἐφαπτομένη μιᾶς καμπύλης εἶναι μία ἀπέρατος εὐθεῖα, ἔχουσα ἓν καὶ μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς καμπύλης.*

Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς ἐφαρμόζεται ἀκριβῶς διὰ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν περιφέρειαν, εἰς τὴν ἔλλειψιν καὶ εἰς ἄλλας κυρτὰς

καὶ κλειστὰς καμπύλας, ἀλλ' εἶναι ἀκατάλληλος διὰ τὴν ὑπερβολὴν ἢ τὴν παραβολήν. Ἐπειδὴ δύναται μία εὐθεῖα νὰ ἔχῃ μετὰ μιᾶς ἐκ τῶν καμπύλων τούτων ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον εἰς τὸ *πεπερασμένον* καὶ ἐν τούτοις νὰ μὴ εἶναι ἐφαπτομένη πρὸς αὐτήν.

Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν θὰ πρέπει νὰ καταφύγωμεν εἰς ἄλλους ὁρισμούς.

2) *Ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς καμπύλης εἶναι τὸ ὅριον τῶν θέσεων μιᾶς μεταβλητῆς τεμνούσης αὐτῆς, κινουμένης παραλλήλως πρὸς ἑαυτήν, ἕως ὅτου τὰ δύο σημεῖα τομῆς συμπέσουν εἰς ἕν.*

Ὁ νέος οὗτος ὁρισμὸς ἰσχύει διὰ πάσας τὰς κυρτὰς καμπύλας· εἶναι κατάλληλος λοιπὸν διὰ τὴν ὑπερβολήν, παραβολήν, καθὼς ἐπίσης καὶ διὰ τὴν ἔλλειψιν καὶ μᾶς ὁδηγεῖ μὲ πολὺ ἁπλοῦν τρόπον εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς θεμελιώδους προτάσεως διὰ τὴν ἐφαπτομένην μιᾶς περιφερείας:

Ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς περιφερείας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.

Ἀντιστρόφως· *Πᾶσα εὐθεῖα, κάθετος ἐπὶ μίαν ἀκτῖνα εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς, εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας.*

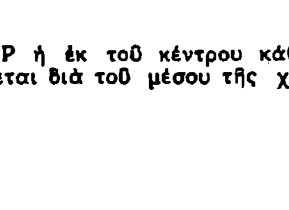
Παρατήρησις. Ὁ δεύτερος ὁρισμὸς δὲν ἰσχύει διὰ πάντα τὰ σημεῖα μιᾶς καμπύλης μὲ πολλαπλᾶ σημεῖα καὶ τὰς ὁποίας καμπύλας τόσον συχνὰ ἀπαντῶμεν εἰς τὴν Παραστατικὴν Γεωμετρίαν. Εἶναι χρήσιμον λοιπὸν νὰ δώσωμεν ἕνα τρίτον ὁρισμὸν τῆς ἐφαπτομένης, κατάλληλον διὰ πάσας τὰς περιπτώσεις:

3) *Ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς καμπύλης εἶναι τὸ ὅριον ΜΤ* (Σχ. 363) *τῶν θέσεων μιᾶς μεταβλητῆς τεμνούσης ΜΜ', στρεφομένης περὶ τὸ ἓν ἐκ τῶν σημείων τομῆς της Μ μετὰ τῆς καμπύλης, καὶ κατὰ τρόπον, ὥστε τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς Μ' νὰ πλησιάζῃ συνεχῶς πρὸς τὸ πρῶτον.*

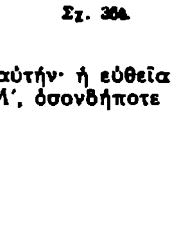
Μία εὐθεῖα δύναται νὰ τέμνῃ μίαν καμπύλην εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ προηγούμενος ὁρισμὸς προϋποθέτει ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' εἶναι σημεῖα διαδοχικὰ ἐπὶ τῆς καμπύλης κατὰ τὴν διαγραφήν της ὑπὸ ἑνὸς κινητοῦ διά τινος συνεχοῦς κινήσεως.

Ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος διὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας βάσει τοῦ τρίτου ὁρισμοῦ τῆς ἐφαπτομένης.

Ἔστω ΜΜ' (σχ. 364) μία τυχοῦσα τέμνουσα τῆς περιφερείας



Σχ. 363



Σχ. 364

καὶ ΟΡ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπ' αὐτήν· ἡ εὐθεῖα ΟΡ θὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς ΜΜ', ὁσονδήποτε πλησίον

καὶ ἂν εὑρίσκωνται τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ μεταξύ των. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἰδιότης αὐτὴ θὰ διατηρηθῇ καὶ κατὰ τὴν ὁριακὴν θέσιν της, δηλ. ὅταν ἡ τέμνουσα ΜΜ′ ἀποβῇ ἐφαπτομένη, ἕπεται ἀμέσως ὅτι ἡ κάθετος ΟΡ, διερχομένη πάντοτε διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς, ἀποβαίνει εἰς τὸ ὅριον ἡ ἀκτὶς ΟΜ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Εἶναι λοιπὸν ἡ ἐφαπτομένη κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.

Σημείωσις. Ὁ τρίτος ὁρισμὸς ὀφείλεται εἰς τοὺς μεγάλους Γεωμέτρας τοῦ XVII αἰῶνος Fermat, Huygens, Newton, Leibniz.

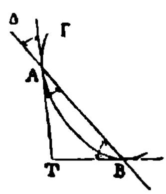
618. ***Ἐφαπτόμεναι καμπύλαι.*** *Δύο καμπύλαι ἐφάπτονται ἀλλήλων εἰς τὸ σημεῖον Μ, ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.*

Ἐκ τοῦ γενικοῦ τούτου ὁρισμοῦ, πολὺ σπανίως διδομένου, ἕπεται ἀμέσως ὅτι αἱ ἀκτῖνες εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας. Ἐπειδὴ ἑκάστη τούτων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

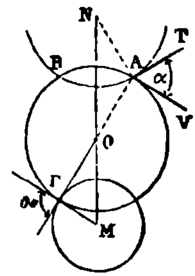
619. ***Γωνία εὐθείας καὶ καμπύλης.*** Ὀνομάζομεν γωνίαν μιᾶς εὐθείας ΑΒ καὶ τῆς καμπύλης ΓΑΒ (Σχ. 365), τὴν γωνίαν ΒΑΤ, σχηματιζομένην ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΑΤ τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς της Α μετὰ τῆς εὐθείας.

Ἡ γωνία ΑΒΤ εἶναι ἡ γωνία τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Β.

Ἐκ τῶν δύο παραπληρωματικῶν γωνιῶν ΒΑΤ, ΔΑΤ, τῶν σχηματιζομένων εἰς τὸ σημεῖον Α ὑπὸ τῆς τεμνούσης ΑΒ καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΑΤ, ἐκλέγομεν διὰ γωνίαν τῆς εὐθείας καὶ τῆς καμπύλης τὴν μικροτέραν ἐξ αὐτῶν.



Σχ. 365.



Σχ. 366.

Μία εὐθεῖα λέγεται *κάθετος* ἐπὶ τὴν καμπύλην—ἢ ὅτι τέμνει *ὀρθογωνίως* αὐτὴν—εἰς τὸ Α, ἐὰν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.

Γωνία δύο καμπύλων. Ὀνομάζομεν γωνίαν εἰς τὸ Α δύο τεμνομένων καμπύλων ΑΒ, ΑΓ (Σχ. 366), τὴν [μικροτέραν] ἐκ τῶν γωνιῶν, ἃς σχηματίζουν εἰς τὸ σημεῖον Α αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν καμπύλων.

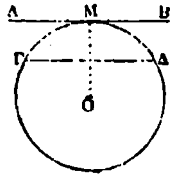
620. ***Ὀρθογώνιοι περιφέρειαι.*** Λέγομεν ὅτι μία περιφέρεια *τέμνει ὀρθογωνίως* μίαν ἄλλην, ἐὰν αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τομῆς των εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Λ. χ. αἱ περιφέρεια μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Μ καὶ Ο (Σχ. 366) εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας (Βλ. ἐπίσης § 627).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, αἱ ἀκτῖνες εἰς τὰ σημεῖα τομῆς τῶν δύο περιφερειῶν εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

Θεώρημα 105

621. Ἡ ἐφαπτομένη ΑΒ, ἡ ἀγομένη εἰς τὸ μέσον Μ τοῦ τόξου ΓΜΔ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν τὸ τόξον χορδήν.

Ἡ ἀκτὶς ΟΜ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, καθὼς ἐπίσης καὶ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΓΔ, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου ΓΜΔ. Ἑπομένως, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

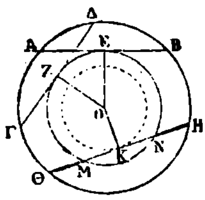


Σχ. 367.

Θεώρημα 106

622. Ἐὰν δύο περιφέρειαι εἶναι ὁμόκεντροι: 1) Ἡ μεγαλυτέρα περιφέρεια ἀποτέμνει ἴσας χορδὰς ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων τῆς μικροτέρας.

2) Τὰ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τμήματα ΘΜ, ΝΗ μιᾶς κοινῆς τεμνούσης αὐτῶν ΘΜΝΗ εἶναι ἴσα.

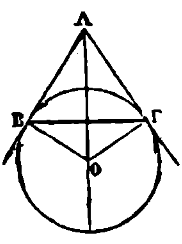

Σχ. 368

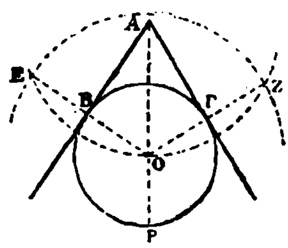
Θεώρημα 107

623. Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας ἐπὶ μίαν περιφέρειαν: 1) Ἡ χορδὴ τῶν ἐπαφῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν συνδέουσαν τὸ κέντρον μετὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐφαπτομένων.

2. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἶναι ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τὴν χορδὴν τῶν ἐπαφῶν.

Παρατήρησις. Ἡ συνήθης κατασκευὴ τῶν ἐφαπτομένων ἐπὶ μίαν περιφέρειαν ἐξ ἑνὸς σημείου Μ ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου—διὰ τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΟΑ (Σχ. 369)—μολονότι πολὺ ἁπλῆ δὲν


Σχ. 369.


Σχ. 370.

δύναται, προφανῶς, νὰ χρησιμεύσῃ εἰς τὸ ἀνάλογον πρόβλημα διὰ τὴν σφαῖραν. Ἡ ἑπομένη κατασκευὴ εἶναι ἐφαρμόσιμος καὶ εἰς τὴν χάραξιν τόξων ἐφαπτομένων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ο (Σχ. 370) καὶ ἀκτῖνα διπλασίαν τῆς ΟΡ γράφομεν περιφέρειαν ὁμόκεντρον τῆς δοθείσης. Ἀκολούθως, γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ΟΑ, τέμνουσαν τὴν πρώτην εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ· αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΟΕ καὶ ΟΖ εἰς τὰ μέσα αὐτῶν εἶναι αἱ ζητούμεναι ἐφαπτόμεναι.

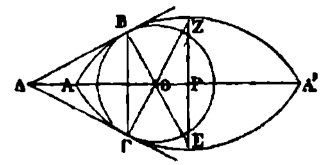
Θεώρημα 108

624. Ἐὰν δύο τόξα ΑΒ, ΑΓ, ἀνήκοντα εἰς περιφερείας τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος, εἶναι ἐφαπτόμενα μιᾶς περιφερείας:

1) *Ἡ χορδὴ τῶν ἐπαφῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν συνδέουσαν τὸ κέντρον τῆς περιφερείας μετὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν δύο τόξων.*

2) *Τὰ τόξα εἶναι ἴσα καὶ ἴσον κεκλιμένα πρὸς τὴν χορδὴν τῶν ἐπαφῶν.*

Ἔστωσαν Ε, Ζ τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν εἰς ἃς ἀνήκουν τὰ ἐν λόγῳ τόξα, ἐφαπτόμενα τῆς περιφερείας (Ο).



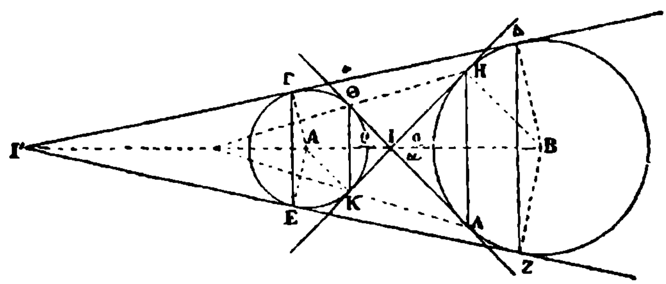
Σχ. 371.

1) Ἡ διάκεντρος ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν χορδὴν ΑΑ' καὶ αἱ ἀκτῖνες ΕΒ, ΖΓ ἴσαι καὶ διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου Ο. Ἐπειδὴ ΟΒ = ΟΓ, αἱ πλάγιαι ΟΕ καὶ ΟΖ εἶναι ἴσαι, καθὼς καὶ τὰ τμήματα ΡΕ καὶ ΡΖ. Εἶναι λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΖΟΕ, ΒΟΓ ἰσοσκελῆ, ἔχοντα τὰς γωνίας εἰς τὴν κορυφὴν ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν· καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΟΡ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΖΕ εἰς τὸν μέσον της Ρ, εἶναι διχοτόμος τῶν δύο γωνιῶν ΒΟΓ καὶ ΖΟΕ, ἕπεται ὅτι εἶναι καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν τῶν ἐπαφῶν ΒΓ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

2) Ἡ γωνία τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ τῆς καμπύλης ΒΑ εἶναι ἡ γωνία ΓΒΔ (§ 619). Ἀλλ' εἶναι ΟΒΓ = ΟΓΒ, ἄρα καὶ ΓΒΔ = ΒΓΔ, ὡς συμπληρώματα τῶν ἴσων αὐτῶν γωνιῶν.

Θεώρημα 109.

625. Αἱ ἐξωτερικαὶ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι, ΓΔ καὶ ΕΖ, δύο περιφερειῶν (Α) καὶ (Β) τέμνονται ἐπὶ τῆς διακέντρου. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ἐσωτερικὰς κοινὰς ἐφαπτομένας, ΘΛ καὶ ΚΗ.



Σχ. 372.

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἴσον ἀπέχουν τῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων, εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν δύο τούτων εὐθειῶν. Ἤτοι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Ι' συμπίπτει πρὸς τὴν διάκεντρον τῶν περιφερειῶν.

Τὰ αὐτὰ σημεῖα ἀνήκουν καὶ εἰς τὰς διχοτόμους τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν, τῶν σχηματιζομένων εἰς τὸ Ι ὑπὸ τῶν ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν, ρ καὶ σ, θὰ εἶναι ἴσα· ἀλλ' εἶναι $\widehat{I} + \sigma + \omega = 2$ ὀρθαί, ἄρα καὶ $\widehat{I} + \rho + \sigma = 2$ ὀρθαί, δηλ. αἱ δύο διχοτόμοι ΙΑ, ΙΒ εὑρί-

σκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τῆς διακέντρου τῶν δύο περιφερειῶν. Ἤτοι τὸ κοινὸν σημεῖον Ι τῶν ἐσωτερικῶν κοινῶν ἐφαπτομένων τῶν δύο περιφερειῶν εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.

Θεώρημα 109—I

626. Μὲ τὰ αὐτὰ δεδομένα ὡς καὶ προηγουμένως (§ 625):

1) *Αἱ χορδαὶ τῶν ἐπαφῶν ΓΕ, ΘΚ, ΗΛ, ΔΖ εἶναι παράλληλοι.*
2) *Τὰ τμήματα ΓΖ, ΔΕ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, καθὼς καὶ τὰ ΘΗ καὶ ΚΛ.*

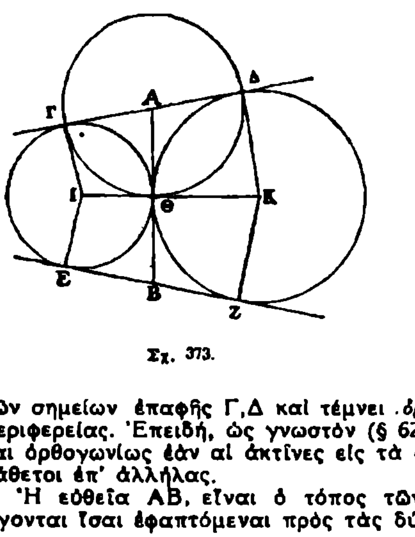
1) Αἱ τέσσαρες αὗται χορδαὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν διάκεντρον.
2) Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς χορδὰς ΓΕ καὶ ΔΖ εἰς τὰ μέσα αὐτῶν, τὸ σχῆμα ΓΔΖΕ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ κατὰ συνέπειαν αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΓΖ, ΔΕ εἶναι ἴσαι.

Καὶ τὸ τραπέζιον ΘΚΛΗ εἶναι ἐπίσης ἰσοσκελές· ἄρα ΘΗ=ΚΛ.

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον Ι εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιότητος καὶ τὸ Ι′ τὸ ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιότητος τῶν δύο περιφερειῶν.

Θεώρημα 109—II

627. Ἐὰν φέρωμεν τὰς τρεῖς κοινὰς ἐφαπτομένας δύο κύκλων, (Ι) καὶ (Κ), ἐφαπτομένων ἀλλήλων, ἡ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη ΑΒ συναντᾷ τὰς δύο ἄλλας εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν σημείων ἐπαφῆς.



Σχ. 373.

Πράγματι, ἐπειδὴ αἱ ἐξ ἑνὸς σημείου ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι ἐπὶ μίαν περιφέρειαν εἶναι ἴσαι, θὰ ἔχωμεν ΑΓ = ΑΘ, ΑΘ = ΑΔ· ἤτοι τὸ σημεῖον Α εἶναι τὸ μέσον τῆς ΓΔ.

Ἀναλόγως, τὸ σημεῖον Β εἶναι τὸ μέσον τῆς ΕΖ.

Παρατήρησις. Ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ΑΘ διέρχεται διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς Γ,Δ καὶ τέμνει *ὀρθογωνίως* τὰς δύο δοθείσας περιφερείας. Ἐπειδή, ὡς γνωστὸν (§ 620), δύο περιφέρειαι τέμνονται ὀρθογωνίως ἐὰν αἱ ἀκτῖνες εἰς τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῶν εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

Ἡ εὐθεῖα ΑΒ, εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων ἐκ τῶν ὁποίων ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸς τὰς δύο περιφερείας.

Θεώρημα 109—III

628. **Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν περιφερειῶν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως (§ 627) καὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μιᾶς ἐξωτερικῆς ἐφαπτομένης, ὁρίζουν μίαν ἡμιπεριφέρειαν, ἐφαπτομένην τῆς ἀντιστοίχου πρὸς τὴν ἄλλην ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην ἡμιπεριφερείας.**

Πράγματι, αἱ περιφέρειαι μὲ κέντρα Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνας ΑΘ = ΘΒ ἐφάπτονται· ἐπειδὴ αἱ ἡμιευθεῖαι ΑΘ καὶ ΘΒ ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν.

Θεώρημα 110

629. Τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων ἑνὸς τριγώνου εἶναι κέντρα περιφερειῶν ἐφαπτομένων τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Αἱ περιφέρειαι αὗται ὀνομάζονται *παρεγγεγραμμέναι* εἰς τὸ τρίγωνον.

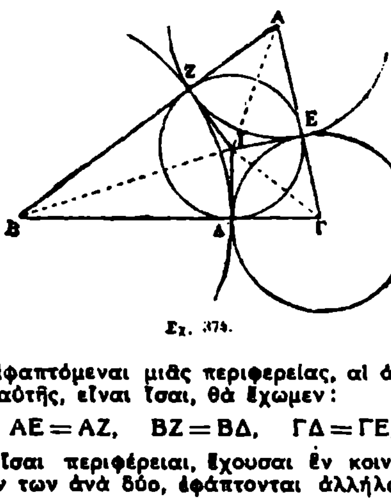
Θεώρημα 110—I

630. Αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου σχηματίζουν τρίγωνον, ἔχον ὕψη κείμενα ἐπὶ τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

Πράγματι, αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς διχοτόμους τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν καὶ ἐπὶ πλέον ἑκάστη ἐσωτερικὴ διχοτόμος διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς δύο ἐξωτερικῶν διχοτόμων.

Θεώρημα 111

631. Αἱ περιφέρειαι μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ καὶ διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας μετὰ τῶν πλευρῶν, ἐφάπτονται ἀνὰ δύο.



Σχ. 374.

Ἐπειδὴ αἱ ἐφαπτόμεναι μιᾶς περιφερείας, αἱ ἀγόμεναι ἐξ ἑνὸς σημείου ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι ἴσαι, θὰ ἔχωμεν:

$$ΑΕ = ΑΖ, \quad ΒΖ = ΒΔ, \quad ΓΔ = ΓΕ,$$

καὶ αἱ θεωρηθεῖσαι περιφέρειαι, ἔχουσαι ἓν κοινὸν σημεῖον ἐπὶ τῶν διακέντρων των ἀνὰ δύο, ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ ζεύγη.

Θεώρημα 111—I

632. Αἱ περιφέρειαι, αἱ γραφόμεναι μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς ἑκάστης τῶν παρεγγεγραμμένων εἰς τὸ τρίγωνον περιφερειῶν μετὰ τῶν πλευρῶν, ἐφάπτονται ἀνὰ δύο.

Ἀπόδειξις ἀνάλογος πρὸς τὴν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως. Υπάρχουν τρεῖς ὁμάδες τοιούτων περιφερειῶν, ἐκ τριῶν μελῶν ἑκάστη.

Θεώρημα 111—II

633. 1) *Ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον περιφέρεια καὶ ἑκάστη τῶν παρεγγεγραμμένων εἰς αὐτό, τέμνουν ὀρθογωνίως τὴν ὁμάδα τῶν τριῶν, ἐφαπτομένων ἀνὰ δύο, περιφερειῶν (τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως), τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν θεωρουμένην παρεγγεγραμμένην περιφέρειαν.*

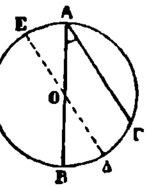
Ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς ΙΔ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΔΓ τῆς περιφερείας μὲ κέντρον Γ, κλπ. (Σχ. 374).

2) *Ἐὰν τρεῖς περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἀνὰ δύο, ἡ διὰ τῶν τριῶν σημείων ἐπαφῆς διερχομένη περιφέρεια τέμνει ὀρθογωνίως αὐτάς.*

Μέτρησις τῶν γωνιῶν

634. Αἱ ἀποδείξεις τῶν προτάσεων διὰ τὰς ἐγγεγραμμένας εἰς κύκλον γωνίας εἶναι πολὺ ἁπλαῖ. Εἰς ταύτας δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν καὶ τὰς ἀκολούθους:

Θεώρημα. *Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της.*



Σχ. 375.

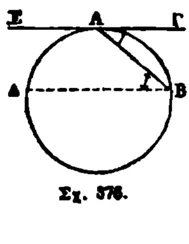
Ἔστω $\widehat{A}$ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία, τῆς ὁποίας μία πλευρὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου.

Φέρομεν τὴν διάμετρον ΔΟΕ, παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ.

Αἱ γωνίαι Α καὶ Ο εἶναι ἴσαι ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΓ καὶ ΟΔ καὶ ἑπομένως ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον. Τὸ μέτρον τῆς ἐπικέντρου γωνίας εἰς τὸ Ο εἶναι τὸ τόξον ΒΔ = τόξον ΑΕ = τόξον ΔΓ, ἐπειδὴ τὰ δύο τελευταῖα τόξα εἶναι ἴσα, ὡς περιεχόμενα μεταξὺ παραλλήλων χορδῶν. Ἄρα τόξον ΒΔ = τόξον ΔΓ καὶ συνεπῶς τὸ τόξον ΒΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΓ.

Ἤτοι, ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία Α ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΓ, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της.

Θεώρημα. *Ἡ γωνία ἑνὸς κυκλικοῦ τμήματος* [42] *ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου αὐτοῦ.*



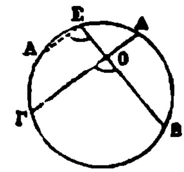
Σχ. 376.

Ἔστω ΒΑΓ ἡ γωνία τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΜΒ καὶ ΒΔ χορδὴ τῆς περιφερείας, παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Α. Τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΑΒ εἶναι ἴσα, ὡς περιεχόμενα μεταξὺ παραλλήλων, αἱ δὲ γωνίαι Α καὶ Β ἐπίσης ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία Β ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΔ, ἕπεται ὅτι ἡ ἴση της Α μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ τόξου ΑΒ.

---

42. Σημ. μετ. Ἡ γωνία ἑνὸς κυκλικοῦ τμήματος εἶναι ἡ γωνία τῆς χορδῆς αὐτοῦ μετὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς.

635. Θεώρημα. Ἡ γωνία δύο χορδῶν τεμνομένων ἐντὸς τῆς περιφερείας ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τόξων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς καὶ τῶν προεκτάσεών των.



Σχ. 377.

Ἔστω ΒΟΓ μία τοιαύτη γωνία.

Διὰ τοῦ σημείου Ε φέρομεν χορδὴν ΕΑ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ: Τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΔΕ εἶναι ἴσα, καθὼς καὶ αἱ γωνίαι Ο καὶ Ε, ἕνεκα τῶν παραλλήλων.

Ἡ γωνία Ε ἔχει ὡς μέτρον:

$$\frac{\widehat{B\Gamma A}}{2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\widehat{B\Gamma}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma A}}{2}$$

καὶ ἑπομένως τὸ μέτρον τῆς γωνίας Ο εἶναι: $\dfrac{\widehat{B\Gamma}}{2} + \dfrac{\widehat{\Delta E}}{2}$.

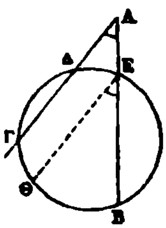
636. Θεώρημα. Ἡ γωνία δύο χορδῶν, τεμνομένων ἐκτὸς τῆς περιφερείας, ἔχει ὡς μέτρον τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν τόξων τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς.

Ἔστω ΒΑΓ μία τοιαύτη γωνία καὶ ΖΘ παράλληλος χορδὴ πρὸς τὴν ΑΓ (σχ. 378).

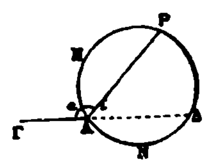
Ἔχομεν: τόξον ΓΘ = τόξον ΔΖ, $\widehat{A} = \widehat{Z}$

καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία Ζ ἔχει ὡς μέτρον $\dfrac{\widehat{B\Theta}}{2}$ ἢ $\dfrac{\widehat{B\Gamma}}{2} - \dfrac{\widehat{\Gamma\Theta}}{2}$, ἕπεται ὅτι τὸ μέτρον τῆς γωνίας Α εἶναι: $\dfrac{\widehat{B\Gamma}}{2} - \dfrac{\widehat{\Delta Z}}{2}$.

636 α. Τὸ μέτρον μιᾶς «παρεγγεγραμμένης» γωνίας εἰς περιφέρειαν— δηλ. τῆς γωνίας μὲ κορυφὴν ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ πλευρὰς μίαν χορδὴν καὶ τὴν προέκτασιν μιᾶς ἄλλης—ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τόξων, ἅτινα δὲν περιέχονται μεταξὺ τῶν χορδῶν.



Σχ. 378.



Σχ. 379.

Πράγματι, ἡ γωνία ΒΑΓ (Σχ. 379) ἔχει ὡς μέτρον:

$$\frac{1}{2}\widehat{AMB} + \frac{1}{2}\widehat{AN\Delta},$$

ἐπειδὴ εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς γωνίας ΒΑΔ, ἐχούσης ὡς μέτρον $\frac{\widehat{B\Delta}}{2}$.

Ἡ γωνία αὕτη ἀπαντᾶται ἀρκετὰ συχνά· τὴν ὀνομάζομεν *παρεγγεγραμμένην*. Τὸ μέτρον της εἶναι *τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τόξων ἅτινα δὲν περιέχονται μεταξὺ τῶν δύο χορδῶν*, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ἡ μία πλευρὰ τῆς γωνίας καὶ ἡ ἄλλη ἡ προέκτασις τῆς ἄλλης πλευρᾶς.

636 β. ***Σημείωσις.*** Ἡ σπουδὴ τῶν γωνιῶν, τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς περιφερείας ὀφείλεται εἰς τὸν Alhazen, γνωστὸν καὶ ἐκ τοῦ προβλήματος αὐτοῦ τοῦ *κυκλικοῦ σφαιριστηρίου* ἢ *κυκλικοῦ κατόπτρου* (§ 1545).

Θεώρημα 112

637. **Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται εἰς Α, πᾶσα τέμνουσα αὐτῶν ΜΑΝ, διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς, ὁρίζει ἐπὶ τῶν περιφερειῶν τόξα ΑΜ, ΑΝ, μετρούμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μοιρῶν.**

Τοιαῦτα τόξα δύνανται νὰ ὀνομασθοῦν *ὅμοια*.

Ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.

Θεώρημα 113

638. **Δύο τέμνουσαι διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν ὁρίζουν ἐπ' αὐτῶν ἀπέναντι χορδὰς παραλλήλους.**

Θεώρημα 113—Ι

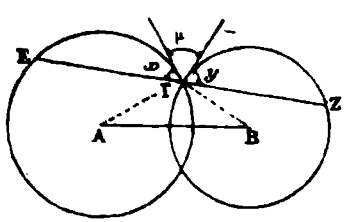
639. **Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς τεμνούσης, ἀγομένης διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν, εἶναι παράλληλοι.**

Θεώρημα 114

640. **Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται καὶ δι' ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς φέρωμεν τὰς διαμέτρους, ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ ἄκρα αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ ἑτέρου σημείου τομῆς καὶ εἶναι διπλασία τῆς διακέντρου.**

Θεώρημα 115

641. **Ἐὰν δύο περιφέρειαι Α καὶ Β τέμνωνται καὶ δι' ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς Γ θεωρήσωμεν μεταβλητὴν τέμνουσαν αὐτῶν ΕΓΖ, τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων εἰς μοίρας τῶν τόξων ΓΕ καὶ ΓΖ, κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης, εἶναι σταθερόν.**



Σχ. 380.

Ἡ γωνία μ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὸ Γ εἶναι σταθερά· ἄρα καὶ τὸ παραπλήρωμα αὐτῆς $\widehat{x} + \widehat{y}$ εἶναι σταθερόν.

Θεώρημα 116

642. Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι ἓν τῶν κοινῶν σημείων δύο περιφερειῶν μετὰ τῶν ἄκρων μιᾶς μεταβλητῆς τεμνούσης, διερχομένης διὰ τοῦ ἑτέρου κοινοῦ σημείου, σχηματίζουν σταθερὰν γωνίαν.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς γωνίας τῶν δύο περιφερειῶν.

642 α. *Σημείωσις.* Τὸ θεώρημα ὀφείλεται εἰς τὸν Moebius, *Στατική*, σελ. 118. (*Planimétrie* τοῦ *Baltzer* § IV σ. 53).

Θεώρημα 117

643. Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται καὶ δι' ἑνὸς τῶν κοινῶν σημείων αὐτῶν φέρωμεν μεταβλητὴν τέμνουσαν, ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς μένει σταθερά.

Θεώρημα 118

644. Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται καὶ διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς φέρωμεν δύο τεμνούσας αὐτῶν, αἱ χορδαί, αἱ ὁριζόμεναι ἐπὶ τῶν περιφερειῶν ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν τεμνουσῶν, σχηματίζουν, προεκτεινόμεναι, γωνίαν σταθεράν.

Θεώρημα 119

645. Δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς Α καὶ διὰ τοῦ ἄκρου Β τῆς διακέντρου ΑΒ φέρομεν χορδὴν ΒΓΔ, ἐφαπτομένην εἰς Γ τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας. Δείξατε ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΔ.

1η *Ἀπόδειξις.* Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΕ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓΖ.

Ἐπειδὴ αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΕ καὶ ΓΕ εἶναι ἴσαι, θὰ ἔχωμεν:

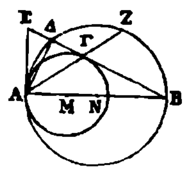
$$\text{γωνία } ΕΑΓ = ΕΓΑ\cdot$$

ἀλλὰ

$$\widehat{ΕΑΓ} = \frac{\overset{\frown}{ΑΔ} + \overset{\frown}{ΔΖ}}{2},$$

$$\widehat{ΕΓΑ} = \frac{\overset{\frown}{ΑΔ} + \overset{\frown}{ΒΖ}}{2}$$

ἑπομένως $\overset{\frown}{ΔΖ} = \overset{\frown}{ΒΖ}$



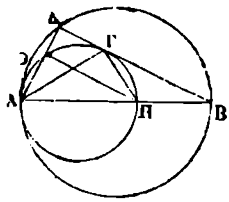
Σχ. 381.

ἄρα καὶ $\widehat{ΔΑΓ} = \widehat{ΓΑΒ}$. Ἤτοι ἡ ΑΓ εἶναι διχοτόμος τῆς ΒΑΔ.

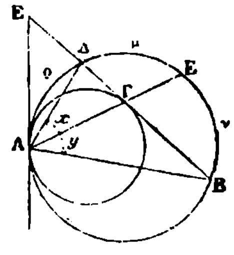
Ἄλλαι ἀποδείξεις. 2) Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΜΓ (σχ. 381)· ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΜΓ, ἕπεται $\widehat{ΓΑΜ} = \widehat{ΑΓΜ}$ καί, ἐπειδὴ ἡ ΜΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ΒΓ, ἡ ΜΓ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ. Ὥστε $\widehat{ΑΓΜ} = \widehat{ΓΑΔ}$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι, καὶ κατὰ συνέπειαν $\widehat{ΓΑΔ} = \widehat{ΓΑΜ}$.

3) ΘΗ εἶναι παράλληλος πρὸς ΒΔ (Σχ. 382), ἕνεκα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν εἰς τὰ Θ καὶ Δ, καὶ ἑπομένως Γ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΘΗ.

4) Αἱ γωνίαι εἰς τὸ Α ἔχουν ὡς συμπληρώματα τὰς γωνίας ΑΓΔ καὶ ΑΗΓ, ἐχούσας τὰ αὐτὰ μέτρα.



Σχ. 382



Σχ. 383

5. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΕΑΓ εἶναι ἰσοσκελὲς (Σχ. 383), θὰ ἔχωμεν:

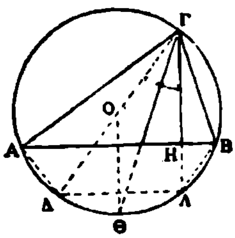
$$\widehat{\lambda}+\widehat{\nu}=\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}.$$

Ἑπομένως: $\widehat{\mu}=\widehat{\nu}$

καὶ $\widehat{x}=\widehat{y}$.

Θεώρημα 119—I

646. **Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας ἑνὸς τριγώνου εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς διαμέτρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου, τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς θεωρουμένης γωνίας.**



Σχ. 384.

Εστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον, ΓΟΔ ἡ ἐκ τοῦ Γ διάμετρος τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας, ΓΔ ἡ διάμετρος ἐκ τοῦ Γ καὶ ΓΗΛ τὸ ἐπὶ τὴν ΑΒ ὕψος τοῦ τριγώνου. Ἡ συνδέουσα εὐθεῖα τὴν κορυφὴν Γ μὲ τὸ μέσον Θ τοῦ τόξ υ ΑΒ εἶναι ἡ διχοτόμος ῆς γωνίας Γ.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΛΔ εἶναι ὀρθή, καθὼς καὶ ἡ ΓΗΑ, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΛ εἶναι παράλληλοι καὶ ἑπομένως:

$\widehat{\text{ΙΛ}}=\widehat{\text{ΑΔ}}$ κλπ.

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ γνωστὴ πρότασις: *Ἡ διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας ἑνὸς τριγώνου εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαμέσου, τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς* (§ 500), εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος. Ἐπειδή, ἐπὶ τοῦ προκειμένου, ἡ διάμεσος εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

2) Δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ δευτέραν ἀπόδειξιν τῆς ἰδίας ροτάσεως, ὡς ἐν § 664.

3) Αἱ εὐθεῖαι ΓΙ καὶ ΓΔ, σχηματίζοι σαι ἴσας γωνίας πρὸς τὴν

διχοτόμον τῆς γωνίας Γ, ὀνομάζονται *ἰσογώνιοι εὐθεῖαι* (§§ 1108 καὶ 2307).

4) Ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος σχηματίζει ἴσας ἐπίσης γωνίας μετὰ τῆς διαμέτρου καὶ τοῦ ὕψους.

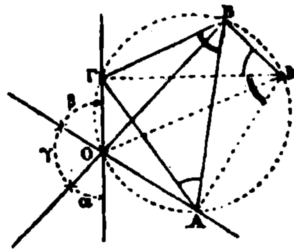
Θεώρημα 120

647. Ἐὰν ἓν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, ἀμεταβλήτου μεγέθους, κινῆται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του κατὰ τρόπον, ὥστε δύο προσκείμεναι πλευραί του ΑΒ, ΑΔ νὰ διέρχωνται διὰ δύο σταθερῶν σημείων, ἡ διαγώνιος ΑΓ διέρχεται ἐπίσης διὰ σταθεροῦ σημείου.

(*Μέθοδοι*, § 14*).

Θεώρημα 120—I

648. Αἱ προβολαὶ Α, Β, Γ ἑνὸς τυχόντος σημείου Μ ἐπὶ τριῶν εὐθειῶν διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ σχηματιζουσῶν πρὸς ἀλλήλας γωνίας α, β, γ (κατὰ τὸ σχῆμα) μὲ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma=2$ ὀρθ., εἶναι αἱ κορυφαὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ μὲ γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς α, β, γ.



Σχ. 383.

Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν· ἐὰν μὲ διάμετρον ΟΜ γράψωμεν περιφέρειαν, τὰ σημεῖα Α, Β, Γ θὰ εὑρίσκωνται ἐπ' αὐτῆς καὶ θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{A}=\Gamma\widehat{M}B=\Gamma\widehat{O}B=\alpha,\quad \widehat{B}=\beta,\quad \widehat{\Gamma}=\gamma.$$

Παρατηρήσεις. Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου ἕπονται πολλαὶ περιπτώσεις ὁμοιότητος τριγώνων. Οὕτω:

1) Αἱ προβολαὶ τοῦ ὀρθοκέντρου ἑνὸς τριγώνου ἐπὶ τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ὁρίζουν τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ἀρχικόν.

2) Αἱ προβολαὶ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης εἰς τρίγωνον περιφερείας ἐπὶ τῶν τριῶν ὑψῶν αὐτοῦ, ὁρίζουν τρίγωνον ὅμοιον ἐπίσης πρὸς τὸ ἀρχικόν.

3) Δυνάμεθα νὰ συσχετίσωμεν τὸ θεώρημα τῆς § 648 πρὸς τὸ τῆς § 2287.

Σχήματα ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον

649. Διὰ τὴν λύσιν τῶν ἀσκήσεων τῶν σχετικῶν πρὸς γωνίας, τρίγωνα καὶ τετράπλευρα ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον, μᾶς εἶναι ἀναγκαία ἡ χρῆσις τῶν ἑπομένων, κυρίως, θεωρημάτων:

Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της.

Εἰς ἴσα τόξα ἢ εἰς ἴσας χορδὰς ἀντιστοιχοῦν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν δύο αὐτῶν θεωρημάτων λαμβάνομεν τό, συχνῆς ἐφαρμογῆς, ἀκόλουθον θεώρημα:

Εἰς ἴσα τόξα ἢ χορδὰς ἀντιστοιχοῦν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι· καὶ ἀντιστρόφως.

Διὰ τὰς ἀσκήσεις τὰς σχετικὰς πρὸς τὸ τετράπλευρον, βοηθούμεθα ὑπὸ τῶν ἑξῆς δύο βασικῶν θεωρημάτων :

Εἰς ἓν ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ κυρτὸν τετράπλευρον, αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ἀντιστρόφως, *ἓν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἐὰν αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι παραπληρωματικαί.*

Δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν καὶ τὰ ἀκόλουθα δύο θεωρήματα (§ 658):

Εἰς ἓν μὴ κυρτὸν ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον, αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως, *ἓν μὴ κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον ἐὰν αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι ἴσαι.*

Παρατηρητέον, ὅτι δύο ἀντικείμεναι πλευραὶ ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ἀποτελοῦν ἓν μὴ κυρτὸν τετράπλευρον, διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύουν τὰ ἀνωτέρω δύο θεωρήματα.

Θεώρημα 121

650. Εἰς ἴσα τόξα ἢ χορδὰς ἀντιστοιχοῦν ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως.

Θεώρημα 121—I

650 α. Ἔστω $\widehat{AOB} = \varphi$ μία ἐπίκεντρος γωνία καὶ Μ ἡ κορυφὴ μιᾶς ἄλλης γωνίας ἴσης πρὸς τὴν φ.

Τὸ ὑποτεῖνον τόξον $\overset{\frown}{AB}$ τὴν γωνίαν φ ἰσοῦται πρὸς

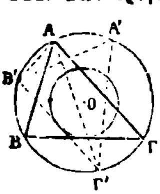
1) *Τὸ ἥμισυ τοῦ ὑποτείνοντος τόξου τὴν γωνίαν* $\widehat{M}$, *ἐὰν ἡ κορυφὴ* Μ *εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας.*

2) *Τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, ἐὰν ἡ κορυφὴ* Μ *εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς περιφερείας.*

3) *Τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν, τῆς γωνίας, ἐὰν ἡ κορυφὴ* Μ *εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς περιφερείας·* καὶ ἀντιστρόφως.

Θεώρημα 121—II

651. Τῶν τριγώνων ΑΒΓ τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς περιφέρειαν (Ο) καὶ ἐχόντων σταθερὰν τὴν γωνίαν Α, ἡ πλευρὰ ΒΓ ἐφάπτεται σταθερᾶς καὶ ὁμοκέντρου πρὸς τὴν (Ο) περιφερείας.



Σχ. 386.

Ἔστω Α ἡ σταθερὰ γωνία· τὸ μέτρον της ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΓ. Ἐὰν λοιπὸν

$$\widehat{A'} = \widehat{A},$$

θὰ εἶναι καὶ $\overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{B'\Gamma'}$

καὶ ἑπομένως $B\Gamma = B'\Gamma'$.

Καὶ ἐπειδὴ ἴσαι χορδαὶ ἀπέχουν ἴσον τοῦ κέντρου, αἱ χορδαὶ ΒΓ, Β'Γ' θὰ ἐφάπτωνται μιᾶς περιφερείας ὁμοκέντρου τῆς (Ο).

Θεώρημα 121—III

652. Τῶν τριγώνων ΑΒΓ, τῶν περιγεγραμμένων εἰς περιφέρειαν (Ο) καὶ ἐχόντων σταθερὰν τὴν γωνίαν Α, ἡ πλευρὰ ΒΓ ἐφάπτεται σταθερᾶς καὶ ὁμοκέντρου πρὸς τὴν (Ο) περιφερείας.

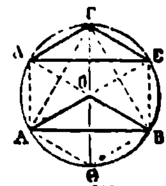
Ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις ΑΟ θὰ εἶναι σταθερά, ὡς ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΤ (ὅπου Τ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ τῆς περιφερείας (Ο), προφανῶς σταθεροῦ.

Θεώρημα 122

653. Εἰς περιφέρειαν, μία ἐπίκεντρος γωνία φ ἰσοῦται πρὸς μίαν ἄλλην ἐγγεγραμμένην ω. Δείξατε, ὅτι ἐὰν ἑκάστη γωνία ἰσοῦται πρὸς $\frac{4}{3}$ μιᾶς ὀρθῆς, αἱ ἀντίστοιχοι χορδαὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

Ἔστω γωνία $ΑΟΒ = ΔΓΕ = ω = \frac{4}{3}$ ὀρθῆς· θὰ δείξωμεν ὅτι $ΔΕ = ΑΒ$.

Πράγματι, πᾶσαι αἱ γωνίαι περὶ τὸ Ο (Σχ. 387) ἔχουν ἄθροισμα 4 ὀρθάς, καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία 4 ὀρθῶν εἶναι τριπλασία, τῆς γωνίας $\frac{4}{3}$ ὀρθῆς; ἕπεται ὅτι περὶ τὸ σημεῖον Ο δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τρεῖς γωνίας ἴσας πρὸς $\frac{4}{3}$ ὀρθῆς καὶ ἓξ γωνίας ἴσας πρὸς $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς.



Σχ. 387.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι γων. $ΑΟΒ = \frac{4}{3}$ ὀρθῆς καὶ γωνία $ΑΟΘ = \frac{2}{3}$ ὀρθῆς. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΟΘ, ἐπειδὴ ἡ γωνία εἰς τὸ Ο ἰσοῦται πρὸς $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν ἰσοῦται πρὸς $\frac{4}{3}$ ὀρθῆς καὶ ἑπομένως ἑκάστη πρὸς $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς. Ἤτοι τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἰσόπλευρον, καὶ $ΑΘ = ΑΟ = ΟΘ$. Ἐξ ἄλλου, ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΘΒ ἰσοῦται πρὸς $\frac{4}{3}$ ὀρθῆς καὶ πρὸς τὴν γωνίαν $ΑΟΒ = ΔΓΕ$. Ἑπομένως: $ΑΒ = ΔΕ$.

Θεώρημα 122—I

654. Ἐὰν ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως εἶναι μικροτέρα τῶν $\frac{4}{3}$ ὀρθῆς, ἡ χορδὴ τῆς ἐπικέντρου φ εἶναι μικροτέρα τῆς χορδῆς τῆς ἐγγεγραμμένης ω ἀλλὰ μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος αὐτῆς.

Ἔστω ἡ γωνία $ΑΓΒ < \frac{4}{3}$ ὀρθῆς καὶ ΓΟΘ ἡ διχοτόμος της (Σχ. 387). Ἔχομεν

$$Α\widehat{Ο}Θ = Θ\widehat{Ο}Β = Α\widehat{Γ}Β.$$

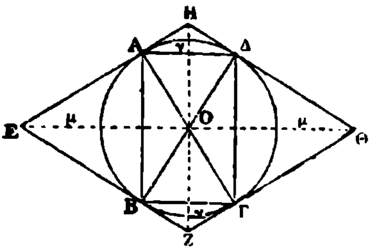
Ἀλλ' εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΘΒ εἶναι

$$ΑΘ < ΑΒ \quad \text{καὶ ἑπομένως } ΑΘ > \frac{ΑΒ}{2}.$$

Σημείωσις. Ἐὰν ἡ τιμὴ ἑκάστης γωνίας εἶναι μεγαλυτέρα τῶν $\frac{4}{3}$ ὀρθῆς, ἡ χορδὴ τῆς ἐπικέντρου φ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐγγεγραμμένης ω ἀλλὰ μικροτέρα τοῦ διπλασίου τῆς χορδῆς αὐτῆς, ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς ἐπικέντρου δὲν ὑπερβαίνῃ τὰς $151^\circ 2' 40''$. Ἐὰν $\varphi = 151^\circ 2' 40''$, ἡ χορδὴ τῆς φ εἶναι διπλασία τῆς χορδῆς τῆς ω· διὰ $\varphi > 151^\circ 2' 40''$ ἡ χορδὴ τῆς φ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς χορδῆς τῆς ω. Τέλος, διὰ $\varphi = 180^\circ$, ἡ πρώτη χορδὴ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον καὶ ἡ δευτέρα μηδενίζεται.

Θεώρημα 123

655. Πᾶν ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ αἱ διαγώνιοί του εἶναι διάμετροι.



Σχ. 388

Ἐπειδὴ ΑΔ=ΒΓ, ὡς ἀντικείμεναι πλευραὶ παραλληλογράμμου, θὰ εἶναι καὶ $\widehat{ΑΔ} = \widehat{ΒΓ} = \nu$ καὶ ἀναλόγως $\widehat{ΑΒ} = \widehat{ΓΔ} = \mu$. Καὶ ἐπειδή, ἀκόμη, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ἀμέσως, ἑκάστη τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, Δ τοῦ παραλληλογράμμου ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς $\frac{1}{2}(\mu + \nu)$, ἕπεται ὅτι ἑκάστη τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι ὀρθή.

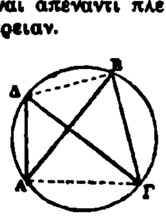
Τῆς γωνίας Α οὔσης ἐγγεγραμμένης καὶ ὀρθῆς, ἡ χορδὴ ΒΔ εἶναι διάμετρος· τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν χορδὴν ΑΓ.

Θεώρημα 123—I

656. Τέσσαρες ἐφαπτόμεναι μιᾶς περιφερείας, παράλληλοι ἀνὰ δύο, σχηματίζουν ἕνα περιγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν ῥόμβον· τὸ τετράπλευρον μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα ἐπαφῶν εἶναι ὀρθογώνιον.

Θεώρημα 123—II

657. Αἱ χορδαί, αἱ κάθετοι ἐπὶ τυχοῦσαν χορδὴν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς εἶναι ἀπέναντι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν.



Σχ. 389.

Θεώρημα 123—III

658. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἑνός, μὴ κυρτοῦ καὶ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι.

Ἓν μὴ κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἐὰν αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι ἴσαι.

Ἔστω ΑΒΓΔ ἓν μὴ κυρτὸν καὶ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον. Πρὸς καθορισμὸν τῆς ἐννοίας «ἀπέναντι γωνίαι» παρατηροῦμεν, ὅτι κατὰ τὴν διαγραφὴν τῆς περιμέτρου τοῦ τετραπλεύρου κατά τινα φοράν, αἱ κορυφαὶ Α καὶ Γ συναντῶνται ὡς πρώτη καὶ τρίτη, αἱ δὲ Β καὶ Δ ὡς δευτέρα καὶ τετάρτη. Αἱ Α, Γ ἢ Β, Δ

κορυφαὶ εἶναι *ἀπέναντι κορυφαὶ* τοῦ τετραπλεύρου καὶ αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι, *ἀπέναντι γωνίαι* αὐτοῦ.

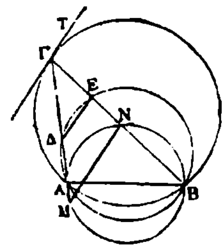
1) $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, ὡς μετρούμεναι ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ τόξου ΒΔ.

2) Ἐὰν $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, τὰ σημεῖα Α καὶ Γ εὑρίσκονται ἐπὶ τόξου κύκλου διερχομένου διὰ τῶν Β καὶ Δ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς $\widehat{A}$. Ἤτοι τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Θεώρημα 124

659. **Αἱ περιφέρειαι αἱ διερχόμεναι διὰ τῶν κορυφῶν Α καὶ Β ἑνὸς τριγώνου, τέμνουν τὰς πλευρὰς τῆς τρίτης γωνίας κατὰ χορδὰς παραλλήλους.**

Τὰ τετράπλευρα ΑΔΕΒ, ΑΜΝΒ εἶναι ἐγγράψιμα (§ 649) καὶ ἑπομένως $\widehat{E} = \widehat{N}$, ἀφοῦ ἡ πρώτη τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς ΒΑΔ καὶ ἡ δευτέρα ἴση πρὸς ΒΑΜ. Ἤτοι αἱ ΕΔ καὶ ΝΜ χορδαὶ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 390.

Παρατηρήσεις. 1) Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου εἶναι ἀντιπαράλληλοι εὐθεῖαι (§ 471).

Πράγματι, ἐπειδὴ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ γωνίαι ΓΔΕ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ ΒΑΓ καὶ ΔΕΓ.

2) Ἡ ἐφαπτομένη ΓΤ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ· ἄρα: Ἡ *ἐφαπτομένη* ΓΤ εἶναι ἀντιπαράλληλος πρὸς τὴν *χορδὴν* ΑΒ.

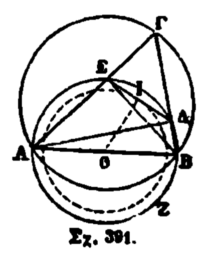
3) Αἱ τομαὶ τῶν ΓΑ καὶ ΓΒ ὑπὸ τῶν διὰ τῆς ΑΒ περιφερειῶν, ὁρίζουν χορδὰς ΜΝ παραλλήλους πρὸς τὴν ΔΕ καὶ ἑπομένως ἀντιπαραλλήλους τῆς ΑΒ πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Γ.

Θεώρημα 125

660. **Μὲ βάσιν δοθὲν τμῆμα ΑΒ, κατασκευάζομεν τρίγωνα ΑΒΓ ἔχοντα σταθερὰν τὴν γωνίαν Γ. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, αἱ συνδέουσαι τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν ΑΔ, ΒΕ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΑΓ, ἔχουν σταθερὸν μῆκος.**

Ἐπειδὴ ἡ γωνία Γ εἶναι σταθερά, ἡ κορυφή της θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ κυκλικοῦ τόξου δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν σταθερὰν τιμὴν τῆς Γ.

Ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΑΒ διέρχεται διὰ τῶν ποδῶν Δ, Ε τῶν ὑψῶν, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τῆς κορυφῆς Γ ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου. Ἀλλ' ἡ γωνία Γ, τῶν τεμνουσῶν ΓΕΑ καὶ ΓΔΒ τὴν περιφέρειαν ΑΕΔΒ, ἔχει ὡς μέτρον:



Σχ. 391.

$$\widehat{\Gamma} = \frac{\overset{\frown}{AZB} - \overset{\frown}{\Delta E}}{2},$$

ἡ δὲ γωνία Γ εἶναι σταθερὰ ὡς καὶ ἡ ἡμιπεριφέρεια ΑΖΒ· Ἄρα ΔΕ = σταθ., ὡς χορδὴ τόξου σταθεροῦ μεγέθους.

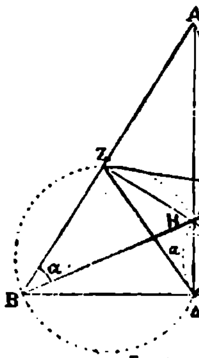
661. *Παρατηρήσεις.* 1) Ἔστω Ι τὸ μέσον τῆς χορδῆς· ἐπειδή, εἰς ἑκάστην θέσιν τῆς κορυφῆς Γ, ἡ χορδὴ ΔΕ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΙ, συμπεραίνομεν: *Ἡ περιφέρεια* (Ο, ΟΙ) *εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν* ΔΕ (§ 119).

2) *Ἡ εὐθεῖα* ΔΕ, *ἡ συνδέουσα τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν, εἶναι ἀντιπαράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν* ΑΒ, *ἐκ τῶν ἄκρων τῆς ὁποίας ἄγονται τὰ ὕψη.*

Πράγματι, τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΕ εἶναι ἐγγράψιμον (§ 659) καὶ ἡ γωνία ΓΔΕ, παραπληρωματικὴ τῆς ΕΔΒ, εἶναι ἴση τῆς ΕΑΒ, παραπληρώματος τῆς ΕΔΒ.

Θεώρημα 126

662. Τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου κεῖνται ἐπὶ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.



Σχ. 392.

Μολονότι ἡ πρότασις αὕτη ἀπεδείχθη εἰς τὰς *Μεθόδους* (§ 292, ι), παραθέτομεν ἐνταῦθα καὶ μίαν ἄλλην ἀπόδειξιν: Εἰς τὰ ἐγγράψιμα τετράπλευρα ΒΔΗΖ, ΔΓΕΗ ἔχομεν:

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'.$$

Ἀλλ' εἶναι $\alpha' = \beta'$, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας· ἄρα:

$$\alpha = \beta.$$

Παρατήρησις. Πρβλ. θεωρήματα (§ 1136) καὶ (§ 1138).

Θεώρημα τοῦ Nagel 127

663. Αἱ ἀκτῖνες περιφερείας εἰς τὰς κορυφὰς ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν τριγώνου, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας, αἵτινες συνδέουν ἀνὰ δύο τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου.

Α' *Ἀπόδειξις* (*Μέθοδοι*, § 292 θ).

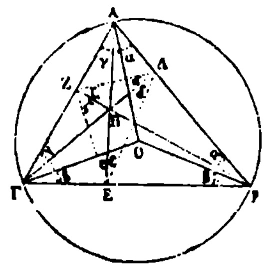
Β' *Ἀπόδειξις* (Housel, N. A., 1860, σελ. 438): Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΟΒ, λαμβάνομεν $\alpha = 90^\circ - \Gamma$. Τὰ ὕψη τοῦ ΑΒΓ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ ΔΕΖ· ἐπομένως $\delta = 90^\circ - (\varepsilon + \zeta)$ καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία $(\varepsilon + \zeta)$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ΕΗΖ, τῆς ὁποίας, πάλιν, παραπλήρωμα εἶναι ἡ Γ, ἕπεται: $\varepsilon + \zeta = \widehat{\Gamma}$, $\alpha = \delta$.

Ἀλλὰ ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΓ· ἄρα καὶ ἡ ΑΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΖ.

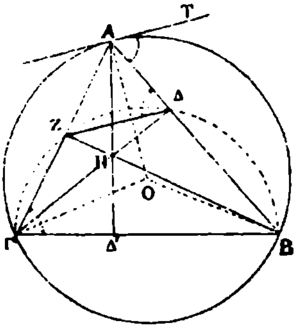
Γ' *Ἀπόδειξις.* Τὸ ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΓΖΔΒ (Σχ. 394) δίδει:

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}.$$

καὶ ἐὰν ΑΤ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Α: $\widehat{A}=\widehat{\Gamma}$, $\widehat{A}=\widehat{\Delta}$. Ἑπομένως, ἡ ΖΔ, παράλληλος οὖσα πρὸς τὴν ΑΤ, εἶναι καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΟ.



Σχ. 393.



Σχ. 394.

664. Παρατήρησις. 1) *Ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας τριγώνου διαιρεῖ εἰς δύο μέρη ἴσα τὴν γωνίαν τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ τοῦ ὕψους, τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς θεωρουμένης γωνίας.*

Πράγματι, ἐπειδὴ (Σχ. 393) $\widehat{AOB}=2\widehat{\Gamma}$, θὰ εἶναι $\alpha=90^\circ-\widehat{\Gamma}$· ἀφ' ἑτέρου $\widehat{\Gamma B Z}=90^\circ-\widehat{\Gamma}$. Ὥστε: $\alpha=\widehat{\Gamma B Z}$, δηλ. ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Β εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας ΟΒΖ (πρβλ. § 646).

2) Τὸ *θεώρημα τοῦ Nagel* εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις ἑνὸς γενικωτέρου θεωρήματος.

664 α. Σημείωσις. Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ὑψῶν ἑνὸς τριγώνου ὠνομάσθη *ὀρθόκεντρον* αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ Μ. Besant, συγγραφέως διαφόρων ἐκτιμωμένων μαθηματικῶν συγγραμμάτων. Τὸν ὅρον τοῦτον ἐχρησιμοποίησε εἰς τὸ ἔργον του: *Geometrical Conics*, 1869.

Εἰς τὴν Γαλλίαν, ὁ Μ. Morel εἰσήγαγεν τὸν ὅρον αὐτὸν (*Journal de Math. élémentaires*, 1879 σελ. 178 καὶ 1890 σελ. 106), κατὰ τὴν ἀπόδοσιν ἑνὸς ἔργου τοῦ *James Booth*, μέλους τῆς Ἀγγλικῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λονδίνου.

Εἰς τὴν *Νεωτέραν Γεωμετρίαν τοῦ Τριγώνου*, τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ὑψῶν ἑνὸς τριγώνου συμβολίζεται διὰ τοῦ γράμματος Η.

Οἱ ὡς ἄνω συγγραφεῖς ὠνόμασαν *ὀρθοκεντρικὸν* τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Σήμερον ἐπεκράτησεν νὰ λέγεται *ὀρθικὸν* (ἐνίοτε καὶ *ποδικόν*).

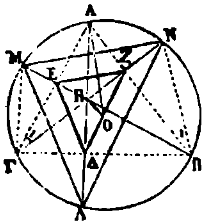
Θεώρημα 127—I

665. **Τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ὑψῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας, ὁρίζουν μετὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἓξ τόξα ἐπ' αὐτῆς ἴσα ἀνὰ δύο.**

Ἡ ἀπόστασις τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς, ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ ποδὸς ἐπ' αὐτῆς τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ ὕψους αὐτοῦ μετὰ τῆς περιφερείας.

(Μέθοδοι, § 292 β καὶ γ).

666. Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ ἕπεται ἀμέσως ἡ κατασκευὴ τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῶν σημείων Λ, Μ, Ν κατὰ τὰ ὁποῖα τὰ ὕψη του συναντοῦν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν. Ἐπειδὴ αἱ διχοτόμοι ΛΑ, ΜΒ, ΝΓ τοῦ ΛΜΝ εἶναι τὰ ὕψη τοῦ ζητουμένου τριγώνου.



Σχ. 395.

Θεώρημα 128

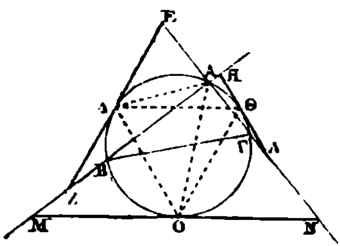
667. Ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τρίγωνον, εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην ἐκ τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου καὶ δύο κορυφῶν (Carnot).

(Μέθοδοι, § 292 γ).

Σημείωσις. Πρὸς συμπλήρωσιν διαφόρων στοιχειωδῶν θεωρημάτων διὰ τὸ τρίγωνον καὶ ἰδιαιτέρως τῶν ἀσκήσεων 646, 662 - 667, 701, 737, δύναταί τις νὰ ἀνατρέξῃ εἰς μίαν πολὺ ἐνδιαφέρουσαν μελέτην τοῦ J. Mention (N. A. 1850, σελ. 324 καὶ 401).

Θεώρημα τοῦ Pollock 129

668. Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν. Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ φέρομεν ἐφαπτομένας πρὸς ἕκαστον τῶν τόξων ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, κατὰ τρόπον ὥστε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς νὰ εἶναι τὸ μέσον ἑκάστοτε τοῦ τμήματος τοῦ ἀποκοπτομένου ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τρία σημεῖα ἐπαφῆς εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου. (N. A. 1857, σ. 126, n° 367).



Σχ. 396.

Ἔστωσαν ΕΖ, ΗΛ, ΜΝ αἱ ἐφαπτόμεναι, τοιαῦται ὥστε :

$$\Delta E = \Delta Z, \quad \Theta H = \Theta \Lambda, \quad OM = ON.$$

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τόξον ΑΔΘ = τόξον ΔΒΟ = τρίτον τῆς περιφερείας.

Ἄς συνδέσωμεν τὸ σημεῖον Α μετὰ τοῦ Δ. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΑΖ, ἡ διάμεσος ΑΔ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ΕΖ. Ἄρα $A\Delta = \Delta E = \Delta Z$ καὶ $\widehat{\Delta A Z} = \widehat{\Delta Z A}$.

Ἀλλ' εἶναι

$$\widehat{\Delta A Z} = \frac{\overset{\frown}{\Delta B}}{2}$$

καὶ

$$\widehat{Z} = \frac{\overset{\frown}{A\Delta} - \overset{\frown}{\Delta B}}{2}.$$

Ἑπομένως τὸ τόξον ΔΒ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΔ ἤ

$$\overset{\frown}{A\Delta} = \frac{2}{3}\,\overset{\frown}{A\Delta B}.$$

Ἐπίσης $\widehat{A\Theta} = \frac{2}{3}\,\widehat{A\Theta\Gamma}$,

καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\widehat{A\Delta} + \widehat{A\Theta} = \widehat{\Delta A\Theta} = \frac{2}{3}$ ἡμιπεριφερείας ΒΑΓ.

Εἶναι λοιπὸν τὸ τόξον ΔΑΘ τὸ τρίτον τῆς περιφερείας καὶ ἡ χορδὴ ΔΘ ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Ἀναλόγως, εὑρίσκομεν

$$\widehat{MAO} = \widehat{AMO}$$

ἑπομένως $$\widehat{BO} = \frac{1}{2}\,\widehat{A\Gamma O}$$

καὶ ἐπειδὴ $$\widehat{B\Delta} = \frac{1}{2}\,\widehat{A\Delta},$$

ἕπεται : $\widehat{OB\Delta} = \frac{1}{2}\,\widehat{\Delta A\Gamma O}$ ἢ $\widehat{OB\Delta} = \frac{1}{3}$ περιφερείας.

669. Παρατήρησις. Ἡ κατασκευὴ τῶν ἐφαπτομένων ὡς ἡ ΕΖ κλπ., ἀπαιτεῖ τὴν τριχοτόμησιν τοῦ τόξου ΑΔΒ· συνεπῶς δὲν δύναται αὕτη νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς χρήσεως τοῦ διαβήτου μόνον καὶ τοῦ κανόνος. Εἶναι ἐν τούτοις τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἀξιοσημείωτον καὶ θὰ τὸ χρησιμοποιήσωμεν εἰς τὸ IV Βιβλίον ἐπὶ ἑνὸς ζητήματος *μεγίστου* (§ 171⁹).

Θεώρημα 129—I

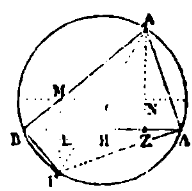
670. Ἐὰν δύο τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ὀρθαί, αἱ προβολαὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἐπὶ τῆς διαγωνίου τῶν ὀρθῶν γωνιῶν εἶναι ἴσαι.

(Βλ. § 136). Ἔχομεν ΒΖ = ΕΔ (Σχ. 397).

Θεώρημα 129 — II

671. Αἱ προβολαὶ των ἄκρων διαμέτρου ἐπὶ χορδὴν ἴσον ἀπέχουν τοῦ μέσου τῆς χορδῆς

Πρόκειται περὶ ἄλλης διατυπώσεως τοῦ προηγουμένου θεωρήματος. Θὰ ἔχωμεν ΗΕ = ΗΖ.



Σχ. 397.

Θεώρημα 129 — III

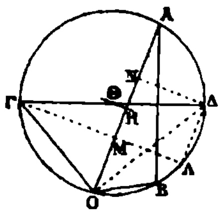
672. Ἐὰν αἱ προβολαὶ τῶν ἄκρων μιᾶς διαγωνίου ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ἐπὶ τὴν ἄλλην διαγώνιον αὐτοῦ ἴσον ἀπέχουν ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς δευτέρας διαγωνίου, ἡ πρώτη εἶναι διάμετρος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας (Ν.Α. 1852, σελ. 156).

Θεώρημα 130

673. Εἰς κύκλον δίδονται χορδὴ ΑΒ καὶ διάμετρος ΓΔ κάθετος ἐπ' αὐτήν. Συνδέομεν ἓν τυχὸν σημεῖον Ο τῆς περιφερείας μετὰ τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν αὐτῶν καὶ προβάλλομεν τὰς χορδὰς ΟΓ, ΟΔ ἐπὶ τὴν ΟΑ.

Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν εἶναι ἴσον πρὸς ΟΑ καὶ ἡ διαφορά των ἴση πρὸς ΟΒ (Grand concours, τοῦ 1847 ἐπὶ τῶν Στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν).

Ἔστωσαν ΟΜ, ΟΝ αἱ προβολαὶ τῶν εὐθειῶν ΟΓ καὶ ΟΔ.



Σχ. 398.

1) Ἂς προβάλωμεν τὸ κέντρον Θ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν χορδὴν ΟΑ. Ἐπειδὴ τὰ ἴσα τμήματα ΓΘ, ΔΘ ἔχουν ἴσας προβολὰς ΜΗ, ΝΗ καὶ τὸ σημεῖον Η εἶναι τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΟΑ, θὰ ἔχωμεν ΟΜ = ΝΑ καὶ κατὰ συνέπειαν

$$OM + ON = OA.$$

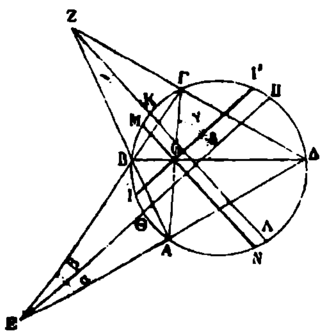
2) Προεκτείνομεν τὴν ΓΜ μέχρι τῆς περιφερείας εἰς τὸ Λ καὶ συνδέομεν τὸ σημεῖον αὐτὸ μετὰ τοῦ Δ. Ἕνεκα τῶν ἴσων μηκῶν ΟΜ, ΟΝ, ἡ χορδὴ ΛΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΜΝ· ἐπὶ πλέον

$$\widehat{O\Lambda} = \widehat{A\Delta} = \widehat{\Delta B}.$$

Ὅθεν $\widehat{OB} = \widehat{\Lambda\Delta}$ καὶ $OB = \Lambda\Delta = MN$.

Θεώρημα 131

674. Εἰς πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν, ἃς σχηματίζουν αἱ διαγώνιοι.



Σχ. 399.

Διὰ τοῦ σημείου τομῆς Ο τῶν διαγωνίων φέρομεν τὰς παραλλήλους ΙΙ′, ΜΝ πρὸς τὰς διχοτόμους ΕΗ, ΖΛ τῶν γωνιῶν εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι αἱ ΙΙ′ καὶ ΜΝ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν εἰς τὸ Ο.

Πράγματι,

$$\alpha = \frac{1}{2}(\widehat{\Delta H} - \widehat{A\Theta})$$

καὶ

$$\widehat{\Theta I} = \widehat{HI'}.$$

Ἐπομένως

$$\alpha = \frac{1}{2}(\widehat{\Delta H} + \widehat{HI'} - \widehat{A\Theta} - \widehat{\Theta I}) = \frac{1}{2}(\widehat{\Delta I'} - \widehat{AI}).$$

Ἐπίσης

$$\beta = \frac{1}{2}(\widehat{\Gamma H} - \widehat{B\Theta}) = \frac{1}{2}(\widehat{\Gamma H} - \widehat{HI'} - (\widehat{B\Theta} - \widehat{\Theta I}) = \frac{1}{2}(\widehat{\Gamma I'} - \widehat{BI}).$$

Ἐπειδὴ $\alpha = \beta$, λαμβάνομεν

$$\widehat{\Delta I'} - \widehat{AI} = \widehat{\Gamma I'} - \widehat{BI} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{\Delta I'} + \widehat{BI} = \widehat{\Gamma I'} + \widehat{AI}.$$

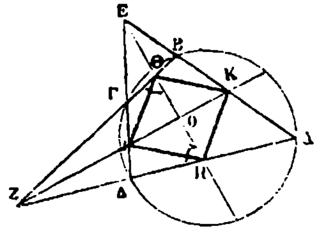
Τὸ πρῶτον μέλος τῆς τελευταίας σχέσεως μετρεῖ τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας δ καὶ τὸ δεύτερον μέλος μετρεῖ τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας γ. Ὥστε $\gamma = \delta$.

Ἀναλόγως ἀποδεικνύομεν καὶ ὅτι ἡ ΜΝ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΒΟΓ.

Παρατήρησις. Τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι τὸ ἀντίστροφον εἰδικῆς περιπτώσεως μιᾶς προτάσεως, σχετικῆς πρὸς δύο κωνικὰς τομὰς τεμνομένας κατὰ τέσσαρα ὁμοκυκλικὰ σημεῖα (§ 2104 α).

Θεώρημα 132

675. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου τέμνουν, τὰς πλευρὰς αὐτοῦ κατὰ τὰς κορυφὰς ρόμβου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τετράπλευρον.



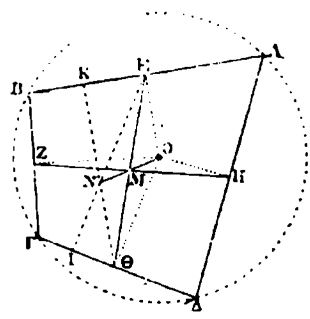
Σχ. 400.

Ἔστωσαν ΕΗ, ΖΚ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως, ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διαγώνιοι ΘΗ, ΙΚ τέμνονται ὀρθογωνίως καὶ εἰς τὰ μέσα αὐτῶν ἢ ὅτι τὸ τρίγωνον ΖΘΗ εἶναι ἰσοσκελές. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΕΗ καὶ ΒΕΘ ἔχουν τὰς γωνίας ΓΕΘ καὶ ΒΕΘ ἴσας, καθὼς καὶ τὰς γωνίας ΕΔΗ καὶ ΘΒΕ, ὡς ἐχούσας τὸ αὐτὸ παραπλήρωμα $\widehat{ΑΒΓ}$. Ἐπομένως $\widehat{ΔΗΕ} = \widehat{ΒΘΕ} = \widehat{ΓΘΗ}$ καὶ τὸ τρίγωνον ΖΘΗ εἶναι ἰσοσκελές, μὲ ὕψος ΖΟ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεώς του ΘΗ.

Ἀναλόγως ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΟ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΙΚ καί, ἐπομένως, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΙΘΚΗ εἶναι ρόμβος.

Θεώρημα 132—Ι

676. Εἰς πᾶν τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, αἱ ἐκ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Σχ. 401.

Ἔστω Ο τὸ κέντρον τῆς περ/νης περιφερείας (συμπῖπτον πρὸς τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου), Ε, Ζ, Θ, Η τὰ μέσα τῶν πλευρῶν καὶ Μ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ΕΘ καὶ ΖΗ.

Ἐὰν προεκτείνωμεν τὸ τμῆμα ΟΜ κατὰ μῆκος ΜΝ ἴσον πρὸς αὐτό, παρατηροῦμεν ὅτι σχηματίζεται τὸ τετράπλευρον ΕΝΘΟ, προφανῶς παραλληλόγραμμον. Εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΕΝΙ, παράλληλος πρὸς τὴν ΘΟ καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΓΔ· καὶ ἐπειδὴ

τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ τὴν ἔχουν, κατ' ἀναλογίαν ἀποδείξεως, καὶ αἱ ΘΝ, ΖΝ, ΗΝ ἐν σχέσει πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΔ, ΒΓ ἀντιστοίχως, ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Ν εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν τεσσάρων θεωρηθεισῶν καθέτων.

Παρατήρησις. Αἱ ἐκ τοῦ μέσου ἑκάστης διαγωνίου κάθετοι ἐπὶ τὴν ἄλλην, τέμνονται ἐπίσης εἰς τὸ σημεῖον Ν· ἐπειδὴ αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ διέρχονται δι' τοῦ Ο.

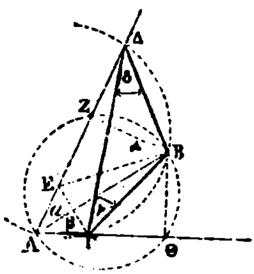
676 α. Σημείωσις. 1) Τὸ σημεῖον Ν, συμμετρικὸν τοῦ κέντρου Ο πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τετραπλεύρου, εἶναι τὸ σημεῖον ὅπερ ἐθεώρησαν εἰς τὴν πρότασιν (§ 1277 β) οἱ Mathot καὶ Deteuf.

2) Ὁ S. Kantor ἐγενίκευσε ὡς ἀκολούθως τὸ προηγούμενον θεώρημα :

Θεώρημα. **Δοθέντων ν σημείων ἐπὶ μιᾶς περιφερείας, αἱ κάθετοι ἐκ τοῦ κέντρου βάρους ν — 2 τυχόντων ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τῆς χορδῆς τῶν υπολοίπων δύο, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.** (Mathesis, 1906, σελ. 124, n° 14).

Θεώρημα 132—ΙΙ

677. **Διὰ τῆς κορυφῆς Α δοθείσης γωνίας ΖΑΘ καὶ διὰ σταθεροῦ σημείου Β ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας αὐτῆς, φέρομεν τυχοῦσαν περιφέρειαν, τέμνουσαν τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς Γ καὶ Δ. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΑΔ εἶναι σταθερόν.**



Σχ. 402.

Ἐὰν ἡ ΑΒ ἀποβῇ διάμετρος τῆς μεταβλητῆς περιφερείας, θὰ ἔχωμεν ΑΖ = ΑΘ, καὶ ἑπομένως τὸ σταθερὸν ἄθροισμα πρέπει νὰ εἶναι τὸ 2ΑΖ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι συμβαίνει πάντοτε ΑΓ + ΑΔ = 2ΑΖ.

Ἂν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΑΔ τμῆμα ΑΕ = ΑΓ, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ἀνάγεται εἰς τὴν ἀλήθεια. τῆς σχέσεως ΖΕ = ΖΔ.
Ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΒΓΑΔ ἔχομεν

$$α = γ, \quad β = δ.$$

καὶ ἐπειδὴ α = β, ἕπεται γ = δ, ἢ ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΒΔ εἶναι ἰσοσκελές· ἀφ' ἑτέρου, τὸ τρίγωνον ΕΒΓ εἶναι προφανῶς καὶ αὐτὸ ἰσοσκελές. Ἑπομένως :

$$ΒΔ = ΒΓ = ΒΕ,$$

δηλ. τὸ τρίγωνον ΔΒΕ εἶναι ἰσοσκελές. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΖΑ, ὡς βαίνουσα ἐπὶ ἡμιπεριφερείας, εἶναι ὀρθή, ἕπεται ΖΕ = ΖΔ.

678. Παρατήρησις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς. ***Ἐὰν μεταβλητὸν τρίγωνον*** ΓΑΔ ***ἔχῃ μίαν γωνίαν*** Α ***σταθερὰν κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν*** ΑΓ ***καὶ*** ΑΔ ***ἐπίσης σταθερόν, τότε ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου*** Β, ***κειμένου ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας*** Α.